Moto piano in coordinate polari. Velocità radiale e velocità trasversale

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Nello studio di un moto piano possiamo assumere un riferimento polare anziché cartesiano. Precisamente, consideriamo un sistema di coordinate polari (r, φ) con polo O e asse polare x (che potrebbero essere rispettivamente l'origine e l'asse x di un riferimento cartesiano). Il vettore posizione di un punto mobile rispetto al predetto riferimento è individuato da

$$r = r(t), \ \varphi = \varphi(t), \tag{1}$$

ricordando che l'anomalia φ è contata positivamente (negativamente) dall'asse polare in verso antiorario (orario). È chiaro che $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$ con

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$$

ove x, y sono le coorispondenti coordinate cartesiane legate alle coordinate polari dalle ben note relazioni

$$x = r\cos\varphi, \ \ y = r\sin\varphi \tag{2}$$

In coordinate polari il vettore velocità esibisce una notevole decomposizione. Per essere più specifici, introduciamo un sistema di versori mutuamente ortogonali ovvero una nuova base dello spazio euclideo bidimensionale che stiamo considerando. Sia

$$\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi\}$$

con i versori $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ disposti come in fig. 1.

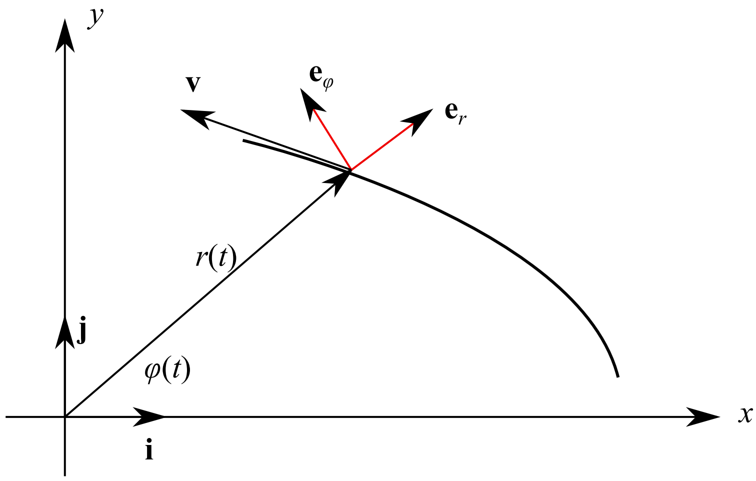

Figura 1: Moto piano in coordinate polari.

Più precisamente, il versore $\mathbf{e}_r$ è orientato come il vettore posizione $\mathbf{r}(t)$, mentre il versore $\mathbf{e}_\varphi$ è ortogonale al primo e orientato in modo tale che la coppia $\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\varphi$ sia congruente alla coppia $\mathbf{ij}$ dei versori degli assi cartesiani. Siccome il nuovo sistema di versori è manifestamente una base dello spazio euclideo bidimensionale, possiamo esprimere il vettore velocità come combinazione lineare dei vettori della nuova base. Cioè

$$v = v_r\mathbf{e}_r + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi,$$

essendo v_r e v_φ le componenti della velocità nella predetta base.

Definizione 1 *La componente v_r è la* **velocità radiale**, *mentre v_φ è la* **velocità trasversale**.

Il problema che si apre consiste nel determinare tali componenti. È chiaro che si tratta di eseguire il cambiamento di base:

$$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} \to \{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi\}$$

Dalla fig. 1 ricaviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi \end{aligned} \tag{3}$$

Risolvendo rispetto a $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{e}_r \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi \\ \mathbf{j} &= -\mathbf{e}_r \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi \end{aligned} \tag{4}$$

Adesso scriviamo la rappresentazione cartesiana della velocità

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} \tag{5}$$

Derivando rispetto al tempo le (2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \tag{6}$$

Sostituendo le (4)–(5) nelle (6), dopo qualche passaggio otteniamo

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \tag{7}$$

da cui le componenti radiale e trasversale

$$v_r = \dot{r}, \ v_\varphi = r\dot{\varphi} \tag{8}$$

Osservazione 2 *A differenza della decomposizione dell'accelerazione nelle componenti tangenziale e normale, la decomposizione della velocità nelle componenti radiale e trasversale, dipendono dalla scelta del sistema di riferimento polare. In altri termini, la decomposizione dell'accelerazione è intrinseca, nel senso che dipende esclusivamente dalla traiettoria e dalla legge oraria, mentre la decomposizione della velocità non ha un carattere intrinseco.*