Moto piano. La velocità vettoriale

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

0.1 Moto piano in coordinate cartesiane

In cinematica per *moto piano* si intende il moto di un punto materiale la cui traiettoria è una curva piana. Per lo studio di tale moto è naturale assumere una coppia di assi cartesiani (Oxy) che istituiscono un sistema di riferimento nel piano contenente la traiettoria. Ne consegue che il vettore posizione del punto materiale è la seguente funzione vettoriale della variabile reale t (che misura il tempo):

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \tag{1}$$

Tale funzione definisce una rappresentazione parametrica della traiettoria γ:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{2}$$

ovvero i *moti componenti* lungo gli assi coordinati.

Definizione 1 *La* **velocità vettoriale media** *nell'intervallo di tempo Δt è il rapporto incrementale della funzione (1)*

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

Per esplicitare il significato fisico oltre che geometrio, di questa nuova grandezza, immaginiamo di fissare un istante t_1, per cui

$$\mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\Delta t}, \tag{4}$$

avendo posto $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2)$, con $t_2 = t_1 + \Delta t$. Tutti questi vettori sono graficati in fig. 1, dacui vediamo che il vettore (4) è parallelo e concorde al vettore $\Delta \mathbf{r}$.

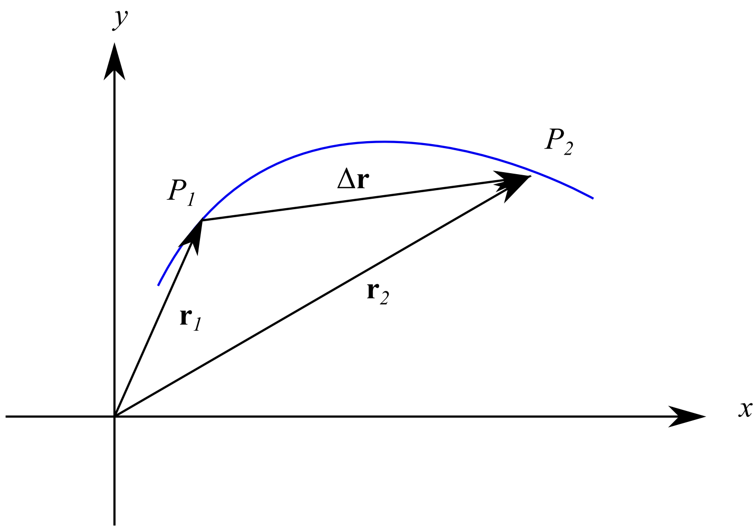

Figura 1: Deteminazione della velocità media di un punto materiale che compie un moto piano.

Per un assegnato istante t_1, $\mathbf{v}_m$ è una funzione vettoriale dell'incremento Δt, per cui scriviamo

$$\mathbf{v}_m(\Delta t) = \frac{\mathbf{r}(t_1+\Delta t) - \mathbf{r}(t_1)}{\Delta t} \tag{5}$$

Supponiamo che tale funzione sia regolare per $\Delta t \to 0$, i.e.

$$\exists \left(\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_m (\Delta t) \right) \in \mathbb{R}^3$$

Poniamo allora

$$\mathbf{v} (t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_m (\Delta t) \tag{6}$$

Definizione 2 *Il vettore* $\mathbf{v}(t_1)$ *si dice* **velocità vettoriale** *nell'istante* t_1

È chiaro che tale vettore altro non è che il valore assunto in t_1 dalla seguente funzione vettoriale

$$\mathbf{v} (t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r} (t + \Delta t) - \mathbf{r} (t)}{\Delta t} \tag{7}$$

ovvero dal derivato del vettore posizione:

$$\mathbf{v} (t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r} (t) \tag{8}$$

che nella usuale notazione puntata si riscrive:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \tag{9}$$

Definizione 3 *La funzione vettoriale (8) si dice* **velocità vettoriale istantanea** *o semplicemente* **velocità vettoriale** .

Dimostriamo che il vettore $\mathbf{v}(t)$ è tangente alla traiettoria γ nel punto $P(t)$ che si identifica con la posizione del punto materiale all'istante t. A tale scopo introduciamo su γ un sistema di ascisse curvilinee, per cui abbiamo un'equazione oraria

$$s = s (t) \,, \quad \forall t \in [t_0, t_M] \,, \quad t_M \leq +\infty \tag{10}$$

dove t_0 è un istante iniziale assegnato. Per la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \tag{11}$$

ricordando che $\dot{s}$ è la velocità scalare (istantanea). Inoltre

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} \tag{12}$$

che è un versore. Verifichiamo.

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|^2 = \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2$$

Ma

$$ds = \dot{s} dt = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

che si giustifica guardando la fig. 2.

Intuitivamente, vediamo che il triangolino individuato dall'elemento d'arco ds e dalle linee coordinate passante per i suoi punti è rettangolo, per cui

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

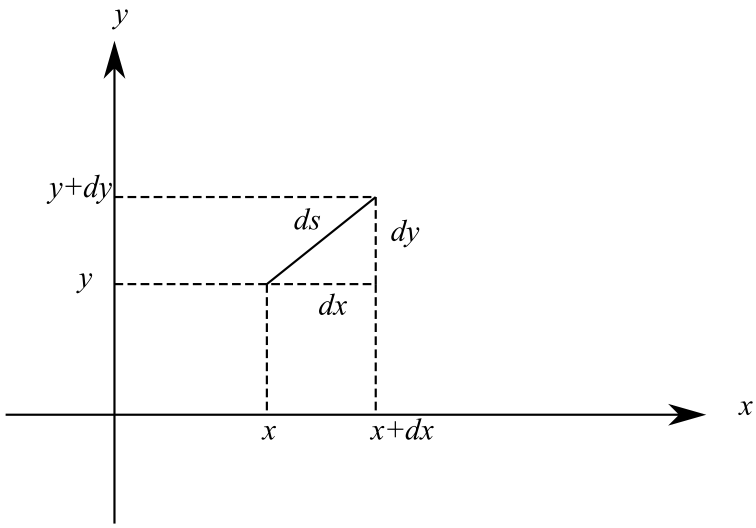

Figura 2: L'elemento d'arco su γ è espresso dal differenziale ds della funzione $s(t)$.

Ne consegue

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

che è appunto quello che volevamo dimostrare. Adesso dobbiamo vedere come è disposto il versore $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Applichiamo la definizione di derivata

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}$$

D'altra parte

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{i}\Delta x + \mathbf{j}\Delta y \tag{13}$$

essendo Δx e Δy gli incrementi delle funzioni $x(s)$, $y(s)$

$$\Delta x = x(s + \Delta s) - x(s), \quad \Delta y = y(s + \Delta s) - y(s)$$

Il vettore (13) è disposto come in fig. 3.

Il rapporto incrementale della funzione vettoriale $\mathbf{r}(s)$ si esprime facilmente attraverso i rapporti incrementali delle funzioni $x(s), y(s)$:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \mathbf{i}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \mathbf{j}\frac{\Delta y}{\Delta s} \tag{14}$$

Per $\Delta s \to 0$ tale vettore ruota attorno al punto $P(s)$ fino a sovrapporsi al vettore tangente a γ in $P(s)$ (fig. 3). Abbiamo così dimostrato che $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ è un versore tangente alla traiettoria. Scriviamo

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{15}$$

Dalla (11), dopo aver tenuto conto della (9), otteniamo

$$\mathbf{v} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}$$

da cui vediamo che la velocità vettoriale è tangente istante per istante, alla traiettoria del punto materiale. Calcoliamo il modulo di tale velocità

$$|\mathbf{v}| = |\dot{s}| \tag{16}$$

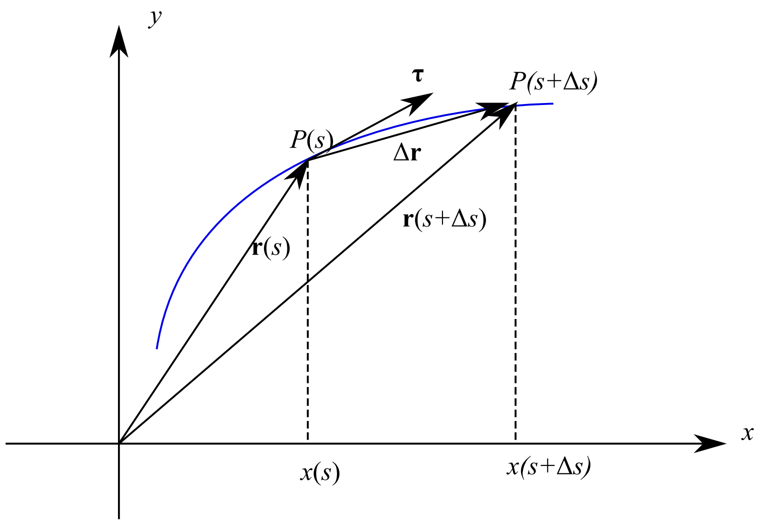

Figura 3: Le varie grandezze ($\mathbf{r}, x, y$, etc.) sono espresse in funzione di s.

Ne consegue che mentre la velocità scalare è $\dot{s}$ (quindi può essere < 0), il modulo della velocità vettoriale è il valore assoluto della velocità scalare. Tale risultato è consistente, giacché il modulo di un vettore è una grandezza non negativa. Nello specifico, il modulo della velocità vettoriale coincide con la velocità scalare se e solo se $\dot{s} \geq 0$ cioè se $s\,(t)$ è una funzione monotòna, e si dice che il moto è *progressivo*. Nel caso contrario, riesce $|\mathbf{v}| = -\dot{s}$ e il moto si dice *regressivo* (o *retrogrado*).