Moto piano. La velocità vettoriale

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

1 Moto piano

1.1 Moto piano in coordinate cartesiane

In cinemtica per *moto piano* si intende il moto di un punto materiale la cui traiettoria è una curva piana. Per lo studio di tale moto è naturale assumere una coppia di assi cartesiani (Oxy) che istituiscono un sistema di riferimento nel piano contenente la traiettoria. Ne consegue che il vettore posizione del punto materiale è la seguente funzione vettoriale della variabile reale t (che misura il tempo):

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \tag{1}$$

Tale funzione definisce una rappresentazione parametrica della traiettoria γ:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{2}$$

ovvero i *moti componenti* lungo gli assi coordinati.

Definizione 1 *La* **velocità vettoriale media** *nell'intervallo di tempo Δt è il rapporto incrementale della funzione (1)*

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

Per esplicitare il significato fisico oltre che geometrio, di questa nuova grandezza, immaginiamo di fissare un istante t_1, per cui

$$\mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\Delta t}, \tag{4}$$

avendo posto $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2)$, con $t_2 = t_1 + \Delta t$. Tutti questi vettori sono graficati in fig. 1, dacui vediamo che il vettore (4) è parallelo e concorde al vettore $\Delta \mathbf{r}$.

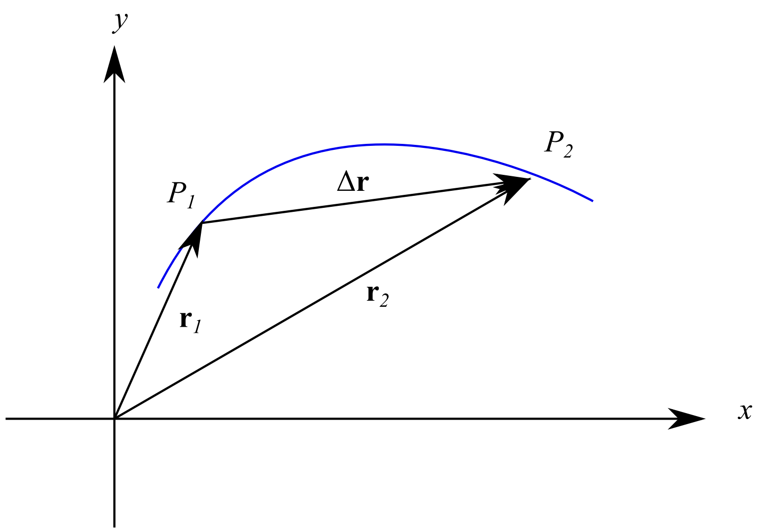

Figura 1: Deteminazione della velocità media di un punto materiale che compie un moto piano.

Per un assegnato istante t_1, $\mathbf{v}_m$ è una funzione vettoriale dell'incremento Δt, per cui scriviamo

$$\mathbf{v}_m(\Delta t) = \frac{\mathbf{r}(t_1+\Delta t) - \mathbf{r}(t_1)}{\Delta t} \tag{5}$$

Supponiamo che tale funzione sia regolare per $\Delta t \to 0$, i.e.

$$\exists \left(\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_m \left(\Delta t \right) \right) \in \mathbb{R}^3$$

Poniamo allora

$$\mathbf{v} \left(t_1 \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_m \left(\Delta t \right) \tag{6}$$

Definizione 2 *Il vettore* $\mathbf{v} \left(t_1 \right)$ *si dice* **velocità vettoriale** *nell'istante* t_1

È chiaro che tale vettore altro non è che il valore assunto in t_1 dalla seguente funzione vettoriale

$$\mathbf{v} \left(t \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r} \left(t + \Delta t \right) - \mathbf{r} \left(t \right)}{\Delta t} \tag{7}$$

ovvero dal derivato del vettore posizione:

$$\mathbf{v} \left(t \right) = \frac{d}{dt} \mathbf{r} \left(t \right) \tag{8}$$

che nella usuale notazione puntata si riscrive:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \tag{9}$$

Definizione 3 *La funzione vettoriale (8) si dice* **velocità vettoriale istantanea** *o semplicemente* **velocità vettoriale** .

L'operazione di passaggio al limite (6) è illustrata in fig. 2, da cui vediamo che la velocità vettoriale $\mathbf{v} \left(t_1 \right)$ è tangente alla traiettoria γ nel punto P_1 che definisce la posizione del punto materiale all'istante t_1.

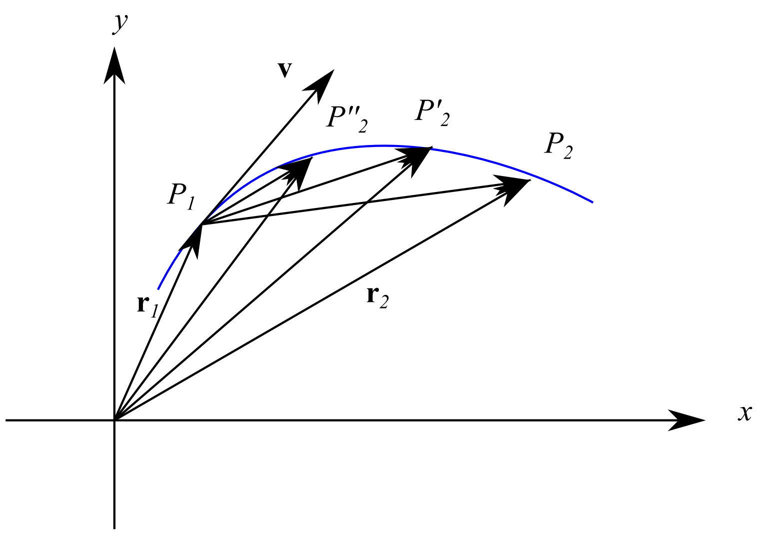

Figura 2: Riducendo progressivamente l'intervallo di tempo (incremento della variabile indipendente) Δt, il punto P_2 si sposta lungo la curva e nel limite per $\Delta t \to 0$, tende al punto P_1.

Per dimostrare rigorosamente tale asserzione, fissiamo un sistema di ascisse curvilinee sulla traiettoria, per cui abbiamo l'equazione oraria:

$$s = s \left(t \right), \tag{10}$$

la cui derivata $\dot{s}$ è la velocità scalare. Quindi

$$s(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Dalla fig. 3 vediamo che P_1 ha ascissa curvilinea $s_1 = s(t_1)$, mentre l'ascissa curvilinea di P_2 è $s_2 = s(t_2)$. L'incremento $\Delta s = s(t_1 + \Delta t) - s(t_1) = s_2 - s_1$ della funzione $s(t)$ è ovviamente l'arco di estremi P_1 e P_2. Esplicitiamo i corrispondenti vettori posizione

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1) = x(t_1)\,\mathbf{i} + y(t_1)\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2) = x(t_2)\,\mathbf{i} + y(t_2)\,\mathbf{j}$$

Segue

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{i}\Delta x + \mathbf{j}\Delta y,$$

essendo

$$\Delta x = x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)$$
$$\Delta y = y(t_1 + \Delta t) - y(t_1)$$

Una coppia di numeri direttori della retta secante a γ per P_1, P_2 è

$$(\Delta x, \Delta y)$$

Per $\Delta t \neq 0$ un'altra coppia di numeri direttori della medesima retta è

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$$

Ed eseguendo il limite per $\Delta t \to 0$, otteniamo una coppia di numeri direttori della *retta tangente* a γ nel punto P_1, giacché nel predetto limite, la secante ruota attorno a P_1 fino a sovrapporsi alla tangente. Quindi scriviamo

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right), \tag{11}$$

dove abbiamo utilizzato

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{12}$$

Mostriamo che tali numeri direttori sono in realtà i coseni direttori della retta tangente, ossia le componenti del versore di tale retta orientata nella direzione del moto. A tale scopo riferiamoci alla fig. 4.

Intuitivamente, vediamo che il triangolino individuato dall'elemento d'arco ds e dalle linee coordinate passante per i suoi punti è rettangolo, per cui

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Ne consegue

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

da cui vediamo che gli elementi della coppia ordinata (11) sono i coseni direttori della retta tangente. Come è noto dalla Geometria, questi ultimi sono le componenti cartesiane del corrispondente versore che denotiamo con $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \tag{13}$$

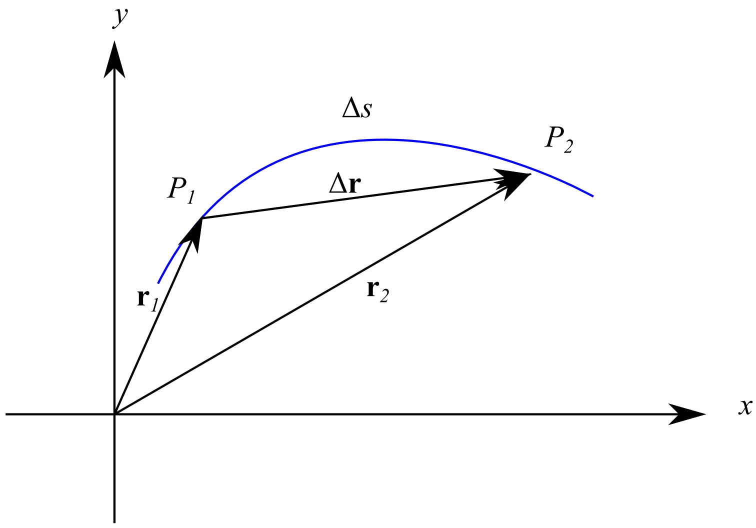

Figura 3: Abbiamo introdotto sulla traiettoria un sistema di ascisse curvilinee.

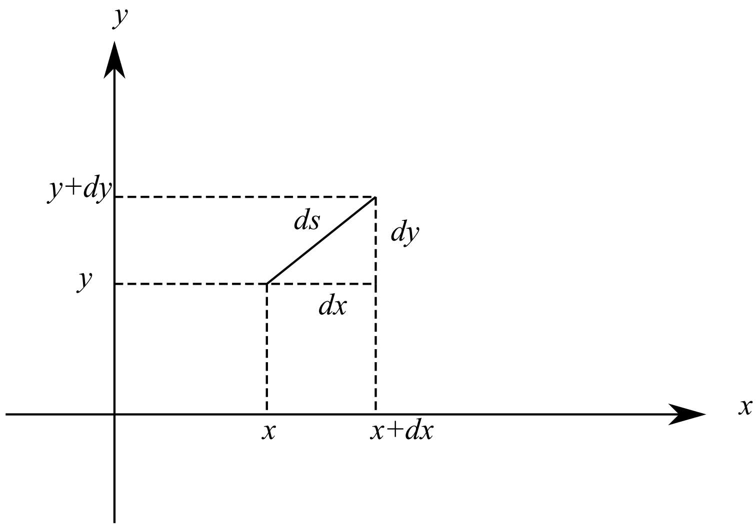

Figura 4: L'elemento d'arco su γ è espresso dal differenziale ds della funzione $s\,(t)$.

che può essere ottenuto per derivazione del vettore posizione in funzione dell'ascissa curvilinea:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}\mathbf{j} = \frac{1}{\dot{s}}\mathbf{v}, \tag{14}$$

da cui

$$\mathbf{v} = \dot{s}\boldsymbol{\tau} \tag{15}$$

Cioè proprio quello che volevamo dimostrare. Il modulo della velocità vettoriale è

$$|\mathbf{v}| = |\dot{s}| \tag{16}$$

Ne consegue che mentre la velocità scalare è $\dot{s}$ (quindi può essere < 0), il modulo della velocità vettoriale è il valore assoluto della velocità scalare. Tale risultato è consistente, giacché il modulo di un vettore è una grandezza non negativa.