Moto incipiente

Marcello Colozzo http://extrabyte.infohttp://extrabyte.info

Esercizio 1 *Un blocco di massa m che poggia su un piano orizzontale che presenta un coefficiente di attrito statico μ_s. Sul blocco agisce una forza F, come illustrato in fig. 1.*

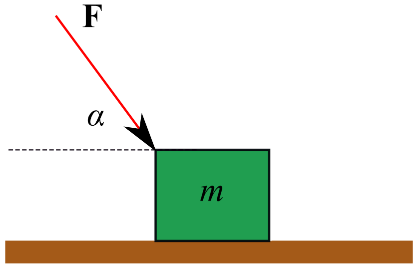

Figura 1: Esercizio 1.

Studiare le condizioni di moto incipiente in funzione dell'angolo α, dimostrando l'esistenza di un angolo limite oltre il quale per qualunque forza applicata, il blocco rimane in quiete.

Soluzione

Per l'analisi delle forze agenti sul blocco, stabiliamo un riferimento cartesiano ortogonale come in fig. 2, essendo $\mathbf{R}_N$ ed $\mathbf{R}_T$ rispettivamente la reazione normale e la reazionte tangenziale del vincolo. In particolare, la reazione tangenziale è dovuta all'attrito.

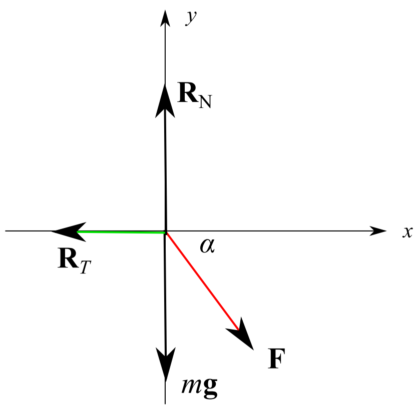

Figura 2: Esercizio 1.

Siccome il blocco è in quiete, interviene il coefficiente di attrito statico:

$$R_T = \mu_s R_N \tag{1}$$

La condizione di equilibrio si scrive:

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{R}_N + \mathbf{R}_T = \mathbf{0} \tag{2}$$

Dal momento che il blocco non si muove verticalmente:

$$\mathbf{R}_N + m\mathbf{g} + F_y\mathbf{j} = \mathbf{0} \tag{3}$$

essendo $\mathbf{j}$ il versore dell'asse y. Proiettando la (3) sul predetto asse

$$R_N - mg - F\sin\alpha = 0 \Longleftrightarrow R_N = mg + F\sin\alpha$$

che sostituita nella (1):

$$R_T = \mu_s mg + \mu_s F \sin\alpha \tag{4}$$

Se $\mathbf{i}$ è il versore dell'asse x:

$$\mathbf{R}_T = -\mathbf{i}\,|\mathbf{R}_T| = -\mathbf{i}\,(\mu_s mg + \mu_s F \sin\alpha) \tag{5}$$

cosicché la (2) si riscrive:

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{R}_N - \mathbf{i}\,(\mu_s mg + \mu_s F \sin\alpha) = \mathbf{0} \tag{6}$$

che proiettata sull'asse x

$$F\cos\alpha = \mu_s mg + \mu_s F \sin\alpha \tag{7}$$

Ne consegue che fino a quanto è verificata la disuguaglianza:

$$F\cos\alpha \leq \mu_s mg + \mu_s F \sin\alpha \tag{8}$$

il blocco è in quiete. In particolare, la (7) esprime la condizione di *moto incipiente*: non appena è

$$F > \mu_s mg + \mu_s F \sin\alpha$$

si verifica il *distacco* del blocco dal piano di appoggio e nel moto conseguente interviene il coefficiente di attrito dinamico $\mu_d < \mu_s$. Dalla (8) si ha

$$F \leq F_{\max}(\alpha)\,,$$

avendo definito

$$F_{\max}(\alpha) = \frac{\mu_s mg}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha}, \tag{9}$$

che è il massimo valore del modulo della forza applicata, oltre il quale si verifica il distacco per un assegnato angolo α. Quest'ultimo appartiene all'intervallo semiaperto a destra $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. L'esercizio richiede lo studio della funzione (9).

Insieme di definizione

L'insieme di definizione è tale che

$$\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha \neq 0$$

Determiniamo allora le radici in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ dell'equazione

$$\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha = 0 \underset{\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Longrightarrow} 1 - \mu_s \tan\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\mu_s}\right) \overset{def}{=} \alpha_l$$

Dal momento che $0 < \mu_s < 1$ si ha $\frac{\pi}{4} < \alpha_l < \frac{\pi}{2}$. Quindi l'insieme di definizione è

$$X = [0, \alpha_l) \cup \left(\alpha_l, \frac{\pi}{2}\right)$$

Intersezioni con gli assi

Asse delle ascisse:

$$F_{\max}(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \mu_s mg = 0 \quad \text{mai!}$$

per cui non ci sono intersezioni con l'asse delle ascisse. Asse delle ordinate:

$$F_{\max}(0) = \mu_s mg > 0$$

che esprime la condizione di moto incipiente quando la forza $\mathbf{F}$ è parallela al piano orizzontale. In termini di studio di funzione, troviamo che il punto di intersezione del diagramma con l'asse delle ordinate è $(0, \mu_s mg)$.

Segno

$$F_{\max}(\alpha) > 0 \Longleftrightarrow 1 - \mu_s \tan\alpha > 0 \underset{\alpha \in X}{\Longleftrightarrow} \alpha \in [0, \alpha_l)$$

Comportamento agli estremi

Il punto $\alpha_l \notin X$ è di accumulazione per X, per cui calcoliamo i limiti:

$$\lim_{\alpha \to \alpha_l^-} F_{\max}(\alpha) = +\infty, \quad \lim_{\alpha \to \alpha_l^+} F_{\max}(\alpha) = -\infty$$

Lo studio della derivata prima e della derivata seconda è superfluo. Il grafico è in fig. 3.

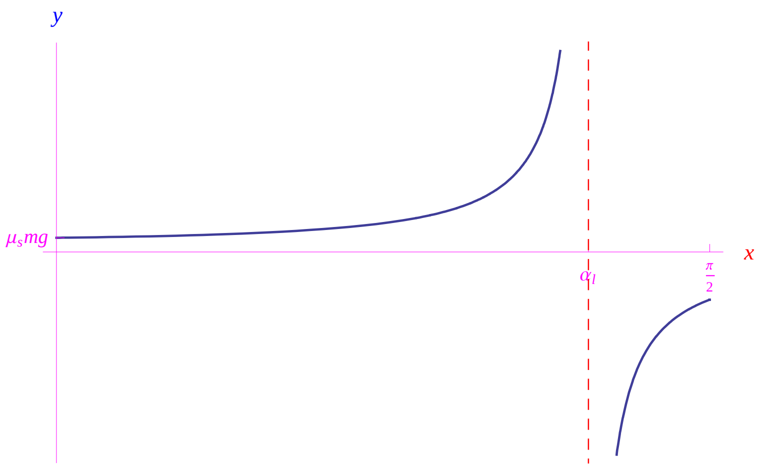

Figura 3: Esercizio 1.

Interpretazione fisica

Se $\alpha = \alpha_l$ comunque prendiamo il modulo della forza $\mathbf{F}$, il blocco rimane in quiete, giacché la componente orizzontale della forza applicata è minore del modulo della forza d'attrito. Ciò può essere visto da qui

$$F \cos\alpha = \mu_s mg + \mu_s F \sin\alpha \tag{10}$$

Siccome α_l "relativamente grande"

$$\cos\alpha_l \to 0,$$

per cui

$$F \cos\alpha_l \ll F$$

Invece il termine a secondo membro

$$F \sin\alpha \sim F$$

Ne consegue che la condizione (10) non può essere verificata, e il blocco rimane in quiete per qualunque valore di F.