Esercizio svolto di Fisica 1

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *(Tratto da [1]. La soluzione è nostra)*

Nello stesso istante e dal medesimo punto due corpi puntiformi di massa $m = 10\,\mathrm{kg}$ *vengono lanciati l'uno su di un piano inclinato liscio (angolo alla base* $\theta = 60°$*, lunghezza* $d = 1.15\,\mathrm{m}$*), l'altro su di un piano orizzontale scabro, immediatamente sottostante (coefficiente di attrito dinamico* $\mu_d = 0.20$*). I due moti si svolgono nello stesso piano verticale. Si determini quale velocità iniziale* v_1 *deve avere il corpo lanciato sul piano orizzontale perché esso incontri l'altro corpo, lanciato sul piano inclinato con velocità iniziale* $v_0 = 6.3\,\mathrm{m/s}$*, quando esso sopraggiunge sul piano orizzontale.*

Soluzione

Denotiamo con A il corpo lanciato sul piano inclinato e con B quello lanciato sul piano orizzontale. Dopo aver istituito un sistema di assi cartesiani come in fig. 1, fissiamo un ulteriore asse s orientato lungo il piano inclinato. Dal momento che qui non c'è attrito, si ottiene immediatamente l'equazione oraria di A:

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \sin\theta, \tag{1}$$

quindi la velocità scalare

$$v_A(t) = v_0 - g t \sin\theta \tag{2}$$

Il corpo A raggiunge la sommità del piano inclinato nell'istante soluzione dell'equazione

$$s(t) = d \Longleftrightarrow (g\sin\theta)\, t^2 - 2v_0 t + 2d = 0,$$

da cui

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \mp v_0\sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} d\sin\theta}}{g\sin\theta} = \frac{v_0^2}{g\sin\theta}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} d\sin\theta}\right)$$

La soluzione che ci interessa è quella con il segno superiore:

$$t_1 = \frac{v_0^2}{g\sin\theta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} d\sin\theta}\right) = 0.21\,\mathrm{s} \tag{3}$$

La posizione occupata da A nell'istante t_1 rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}(Oxy)$ di fig. 1 è

$$x_1 = d\cos\theta = 0.57\,\mathrm{m}, \quad y_1 = d\sin\theta = 1.00\,\mathrm{m} \tag{4}$$

Per $t \geq t_1$ il corpo A lascia il piano inclinato con velocità scalare

$$v_{A,1} = v_A(t_1) = v_0 - g t_1 \sin\theta = 4.49\,\mathrm{m/s} \tag{5}$$

Vettorialmente

$$\mathbf{v}_{A,1} = (v_{A,1}\cos\theta)\,\mathbf{i} + (v_{A,1}\sin\theta)\,\mathbf{j} \tag{6}$$

essendo $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, i versori degli assi coordinati. Inoltre, nel predetto intervallo di tempo il corpo A è soggetto alla sola forza peso. È preferibile passare a un riferimento cartesiano i cui assi coordinati ξ, η sono disposti come in fig. 1.

Assumendo come istante iniziale il tempo t_1, possiamo scrivere le equazioni orarie

$$\xi = v_{A,1} t\cos\theta, \quad \eta = v_{A,1} t\sin\theta - \frac{1}{2} g t^2,$$

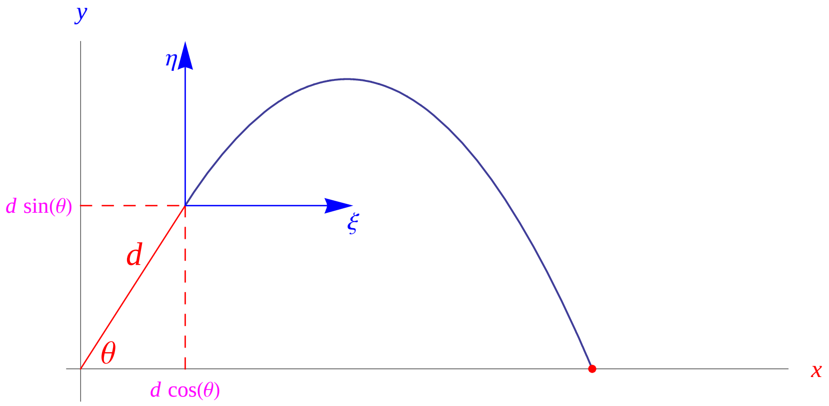

Figura 1: Esercizio 1.

ovvero le equazioni parametriche della traiettoria (parabola). Dobbiamo determinare l'istante in cui il corpo A raggiunge l'asse x del vecchio sistema di riferimento. Deve essere

$$\eta\left(t\right)=-d\sin\theta$$

cioè

$$gt^2-2v_{A,1}t\sin\theta-2d\sin\theta=0$$

Risolvendo

$$t=\frac{v_{A,1}\sin\theta\pm\sqrt{v_{A,1}^2\sin^2\theta+2gd\sin\theta}}{g}$$

Dobbiamo prendere il segno superiore:

$$t_2\equiv\frac{v_{A,1}\sin\theta+\sqrt{v_{A,1}^2\sin^2\theta+2gd\sin\theta}}{g}=1.0\,\mathrm{s} \tag{7}$$

Segue

$$\xi_2=v_{A,1}t_2\cos\theta$$

Passando alle vecchie coordinate tramite le equazioni di trasformazione

$$x=\xi+d\cos\theta,\;\;y=\eta+d\cos\theta,$$

si ottiene

$$x_2=v_{A,1}t_2\cos\theta+d\cos\theta=2.83\,\mathrm{m},\;\;y_2=0$$

In definitiva, il corpo B dovrà percorrere la distanza x_2 in un tempo $t_2'=t_1+t_2=1.21\,\mathrm{s}$, tenendo conto dell'attrito. Più precisamente, l'equazione oraria di B è

$$x_B\left(t\right)=v_1t-\frac{1}{2}\mu_d gt^2,$$

dove v_1 è la velocità iniziale che stiamo cercando. Imponiamo

$$x_B\left(t_2'\right)=x_2,$$

da cui

$$v_1=\frac{x_2}{t_2'}+\frac{1}{2}\mu_d gt_2'=3.52\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s} \tag{8}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Campos Venuti G., Grilli M., Salvadori P., *Problemi di meccanica e termologia con soluzione.* Franco Angeli Editore