

Moto circolare uniforme. Velocità angolare

Marcello Colozzo <http://www.extrabyte.info>

Un caso particolare di moto piano è il **moto circolare uniforme**, in cui la traiettoria γ è una circonferenza, e la velocità scalare è costante. Adottando un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy) con l'origine nel centro della circonferenza, si ha la configurazione cinematica illustrata in fig. 1.

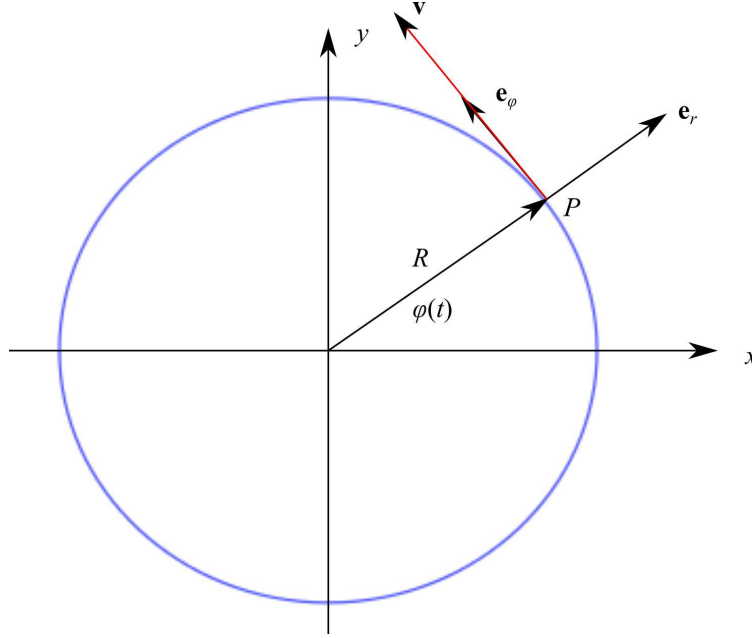


Figura 1: Nel moto circolare uniforme la velocità vettoriale è puramente trasversale.

Qui R è il raggio della circonferenza che coincide con il raggio di curvatura:

$$R = \frac{v^3}{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}|}$$

dove a è l'accelerazione, che è puramente normale giacché l'accelerazione tangenziale è nulla:

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Quindi

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n}$$

In questo caso è immediata la determinazione del versore normale. Dalla predetta figura:

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \Big|_{|\mathbf{r}|=R} = -\frac{1}{R}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

Segue

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \implies \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{R}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

È preferibile studiare il moto in coordinate polari. Introducendo i versori e_r ed e_φ , vediamo che la velocità vettoriale è puramente trasversale:

$$v_r = \dot{r} = 0 \implies \mathbf{v} = v_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \text{ con } v_\varphi = r\dot{\varphi}$$

Quindi

$$v = r\dot{\varphi} = \text{costante} \iff \varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

Dove ω è una costante. Senza perdita di generalità, assumiamo $\omega > 0$, mentre φ_0 è l'anomalia nell'istante iniziale $t = 0$. Ponendo $\varphi_0 = 0$ e osservando che $r(t) = R$, si ha

$$v = \omega R \quad (2)$$

Definizione 1 *La grandezza*

$$\omega = \frac{v}{R} \quad (3)$$

*si chiama **velocità angolare**, e si misura in rad/s. La grandezza*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4)$$

*è il **periodo** del moto circolare uniforme con velocità angolare ω , e rappresenta il tempo impiegato dal punto materiale per percorrere l'intera circonferenza.*

Con l'introduzione della velocità angolare, l'accelerazione scalare si riscrive:

$$a = \omega^2 R \quad (5)$$

È consuetudine assegnare un carattere vettoriale alla velocità angolare, definendo un vettore $\boldsymbol{\omega}$ avente modulo $\omega = \frac{v}{R}$, direzione ortogonale al piano del moto e verso tale che guardando dove punta il vettore, il moto appaia antiorario. Con tale convenzione, vengono contemplati anche i valori negativi della velocità angolare, esclusi in precedenza. Più precisamente, riesce sempre $\omega > 0$, ma il verso positivo (antiorario) o negativo determina orientazioni opposte del vettore $\boldsymbol{\omega}$. Un'ultima osservazione riguarda il carattere intrinseco della grandezza ω . Infatti, mentre per un qualunque moto piano la derivata di $\varphi(t)$ è legata al riferimento polare scelto, la velocità angolare ω dipende esclusivamente dalla traiettoria (in particolare dal raggio) e dal modulo della velocità.

Riferimenti bibliografici

- [1] Halliday D. Resnick R., Krane K.S. *Fisica 1*. Ambrosiana, 2011.
- [2] Demidovic B.P., *Esercizi e problemi di analisi matematica*, 2010.
- [3] Sette D. Wanderlingh F. *Guida alla soluzione di problemi di fisica : meccanica, onde, termodinamica*, 1967