# Dinamica unidimensionale

**Marcello Colozzo** - http://www.extrabyte.info

Consideriamo un punto materiale di massa $m$ vincolato a muoversi sull'asse $x$. Per ipotesi il punto materiale è soggetto a una forza

$$\mathbf{F}(t,x,\dot{x}) = F(t,x,\dot{x})\,\mathbf{i} \tag{1}$$

dove $\mathbf{i}$ è il versore del predetto asse. Per il secondo principio della dinamica:

$$m\ddot{x} = F(t,x,\dot{x}) \tag{2}$$

Inoltre, per assegnate condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \tag{3}$$

viene istituito il seguente problema di Cauchy

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m}F(t,x,\dot{x}) \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases} \tag{4}$$

Se la funzione $F(t,x,\dot{x})$ è sufficientemente regolare, il predetto problema è compatibile e determinato i.e. ammette una ed una sola soluzione $x(t)$. In altri termini, le condizioni iniziali (3) determinano univocamente la soluzione.

Il problema proposto si risolve facilmente in due casi particolari:

1. Forze posizionali $F(x)$.
2. Forze dipendenti unicamente dalla velocità: $F(\dot{x})$.

Nel caso 1 la forza è conservativa. Più precisamente, se $F(x)$ è continua nel proprio insieme di definizione, è definito il potenziale

$$U(x) = \int F(x)\,dx$$

e quindi, l'energia potenziale $V(x) = -U(x)$, definita a meno di una inessenziale costante additiva. Per il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \text{costante} \tag{5}$$

Più precisamente, se $x(t)$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m}F(x) \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases} \tag{6}$$

si ha

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + V[x(t)] = \text{costante}, \quad \forall t \geq t_0 \tag{7}$$

Ne segue che l'energia meccanica è univocamente determinata dalle condizioni iniziali (3):

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0),$$

o ciò che è lo stesso

$$\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + V[x(t)] = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0), \quad \forall t \geq t_0 \tag{8}$$

Dalla (5):

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} \tag{9}$$

ovvero la velocità in funzione dell'ascissa $x$

$$v(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]},$$

Determiniamo l'insieme di definizione di tale funzione reale della variabile reale $x$:

$$v(x) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow E - V(x)$$

Cioè

$$\Lambda(E) = \{x \in \mathbb{R} \mid E - V(x) > 0\} \tag{10}$$

**Definizione 1** *L'insieme di definizione della funzione $v(x)$ si chiama* **regione classicamente accessibile**.

**Osservazione 2** *Il termine "classicamente" si riferisce al comportamento di un punto materiale/particella che obbedisce la meccanica classica. Diversamente, in meccanica quantistica una particella può attraversare una regione tale che $E - V(x) < 0$.*

D'altra parte, la (9) può essere integrata per separazione di variabili:

$$dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} \tag{11}$$

Passiamo al caso 2. Qui il problema di Cauchy si scrive:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m}F(\dot{x}) \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases} \tag{12}$$

Ad esempio, la forza esercitata da un mezzo (fluido) viscoso dipende unicamente dalla velocità. In regime lineare si ha

$$F(\dot{x}) = -b\dot{x}, \quad (b > 0)$$

Nel caso contrario, $F(\dot{x})$ non è lineare ma è comunque una funzione sufficientemente regolare. Anche in questo caso si procede per separazione di variabili:

$$\frac{d\dot{x}}{F(\dot{x})} = \frac{dt}{m} \tag{13}$$

Scrivendo $\dot{x} = v$

$$mG(v) = t + C, \quad \forall C \in \mathbb{R} \tag{14}$$

essendo $G(v)$ una primitiva di $\frac{1}{F(v)}$, i.e.

$$G(v) = \int \frac{dv}{F(v)}$$

La (14) è l'integrale generale della (14) in forma implicita. Se è possibile esplicitare tale funzione, integrando nuovamente otteniamo la legge oraria $x(t)$.

**Osservazione 3** *Le conclusioni a cui siamo giunti relativamente ai casi particolari 1 e 2, si generalizzano immediatamente ai moti unidimensionali su traiettoria qualsiasi in cui è istituito un sistema di ascisse curvilinee. L'equazione oraria avrà pertanto la forma* $s(t)$, *essendo* $s$ *la predetta ascissa curvilinea.*

Abbiamo così dimostrato il teorema:

**Teorema 4** *Per un punto materiale che compie un moto unidimensionale in una regione sede di forze posizionali o dipendenti unicamente dalla velocità, l'equazione differenziale del moto si integra per separazione di variabili.*