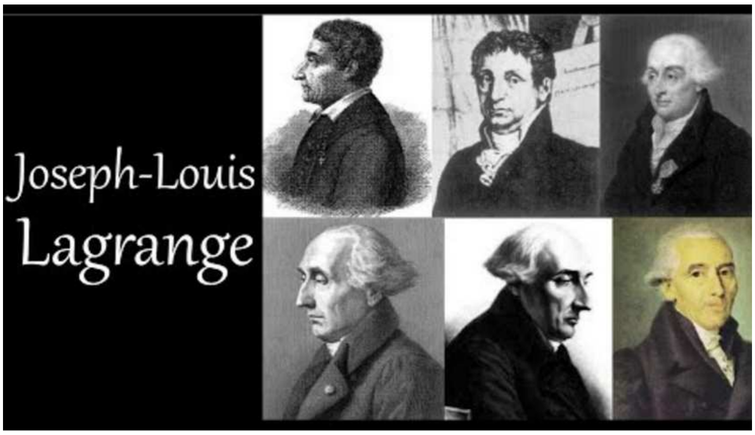
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Marcello Colozzo



Sia f una funzione reale di p variabili reali:

$$\begin{aligned}
& f : A \to \mathbb{R} \\
& f : (x_1, x_2, ..., x_p) \to f\left(x_1, x_2, ..., x_p\right), \quad \forall \left(x_1, x_2, ..., x_p\right) \in A
\end{aligned} \tag{1}$$

essendo A un aperto di $\mathbb{R}^p$. Supponiamo che le p variabili $x_1, x_2, ..., x_p$ non siano indipendenti, ma legate da $n < p$ equazioni

$$\varphi_k\left(x_1, x_2, ..., x_p\right) = 0, \qquad (k = 1, 2, ..., n) \tag{2}$$

dove le φ_k sono n funzioni assegnate e definite in A (i.e. nello stesso campo di esistenza di f). Assumiamo poi $f, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ ivi continue assieme alle derivate parziali prime.

Per maggiore chiarezza scriviamo per esteso il sistema (2):

$$\begin{cases}
\varphi_1\left(x_1, x_2, ..., x_p\right) = 0 \\
\varphi_2\left(x_1, x_2, ..., x_p\right) = 0 \\
... \\
\varphi_n\left(x_1, x_2, ..., x_p\right) = 0
\end{cases} \tag{3}$$

e denotiamo con A' l'insieme dei suoi punti soluzione:

$$A' = \left\{P \in \mathbb{R}^p \mid \varphi_k\left(P\right) = 0, \qquad (k = 1, 2, ..., n)\right\} \tag{4}$$

supponendo $\emptyset \neq A' \subseteq A$. In tali condizioni, possiamo riferirci alla restrizione di f ad A' cioè $f_{A'}$ che per semplicità di notazione, continuiamo a indicare con f.

Ciò premesso, ci proponiamo di determinare gli estremi relativi o assoluti della predetta restrizione. A tale scopo utilizziamo la locuzione «massimi e minimi vincolati». In contrapposizione, se le p variabili $x_1, x_2, ..., x_p$ sono svincolate da relazioni, parleremo di «massimi e minimi liberi». È poi naturale la conservazione delle singole definizioni:

$$\begin{aligned}
\left.\begin{array}{c}\bar{P} \text{ è punto di massimo} \\ \text{relativo vincolato}\end{array}\right) & \overset{def}{\iff} \exists I\left(\bar{P}\right) \subset A \mid P \in A' \cap I\left(\bar{P}\right) \Longrightarrow f\left(P\right) \leq f\left(\bar{P}\right) \\
\left.\begin{array}{c}\bar{P} \text{ è punto di minimo} \\ \text{relativo vincolato}\end{array}\right) & \overset{def}{\iff} \exists I\left(\bar{P}\right) \subset A \mid P \in A' \cap I\left(\bar{P}\right) \Longrightarrow f\left(P\right) \geq f\left(\bar{P}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

essendo $I\left(\bar{P}\right)$ un intorno di $\bar{P}$. La matrice jacobiana delle n funzioni $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$:

$$J\left(x_1, x_2, ..., x_p\right) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\
... & ... & ... & ... \\
\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}
\end{pmatrix} \tag{6}$$

che è una matrice $n \times p$. Ricordiamo che abbiamo assunto $n < p \Longrightarrow rango\left(J\right) \leq n$. Assumiamo ulteriormente

$$rango\left(J\right) = n, \quad \forall P \in A$$

Supponiamo che $\bar{P}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n\right) \in A'$ sia di massimo o minimo relavito vincolato. Per quanto precede, è $rango\left(\bar{P}\right) = n$;/da ciò l'esistenza di almeno un minore di ordine n non nullo. Senza perdita di generalità:

$$\left.\frac{\partial\left(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\right)}{\partial\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}\right|_{\bar{P}} = \begin{vmatrix}
\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right|_{\bar{P}} & \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\uparrow}\right|_{\bar{P}} & ... & \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\right|_{\bar{P}} \\
\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right|_{\bar{P}} & \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_\uparrow}\right|_{\bar{P}} & ... & \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}\right|_{\bar{P}} \\
... & ... & ... & ... \\
\left.\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}\right|_{\bar{P}} & \left.\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_\uparrow}\right|_{\bar{P}} & ... & \left.\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\right|_{\bar{P}}
\end{vmatrix} \neq 0$$

Per il teorema del Dini il sistema (3) che qui riscriviamo in maniera ancora più estesa:

$$\begin{cases} \varphi_1\left(x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_p\right)=0 \\ \varphi_2\left(x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_p\right)=0 \\ ... \\ \varphi_n\left(x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_p\right)=0 \end{cases} \tag{7}$$

è localmente risolvibile rispetto a $x_1,...,x_n$, cioè

$$\exists I_1\left(\bar{P}\right) \mid \begin{cases} x_1=\psi_1\left(x_{n+1},...,x_p\right) \\ x_2=\psi_2\left(x_{n+1},...,x_p\right) \\ ... \\ x_n=\psi_n\left(x_{n+1},...,x_p\right) \end{cases} \tag{8}$$

Ne segue che i valori assunti da f nei punti $P \in A' \cap I_1\left(\bar{P}\right) \cap I\left(\bar{P}\right)$ si esprimono come

$$\begin{gathered} f[\psi_1\left(x_{n+1},...,x_p\right),\psi_2\left(x_{n+1},...,x_p\right),...,\psi_n\left(x_{n+1},...,x_p\right),... \\ ...\psi_n\left(x_{n+1},...,x_p\right),x_{n+1},...,x_p] \stackrel{def}{=} \Phi\left(x_{n+1},...,x_p\right) \end{gathered} \tag{9}$$

Abbiamo perciò una funzione composta delle $p-n$ variabili $x_{n+1},...,x_p$. Quindi

$$\left(\begin{array}{c} \bar{P} \text{ è punto di massimo/minimo} \\ \text{relativo vincolato per } f \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \bar{Q}\left(\bar{x}_{n+1},...,\bar{x}_p\right) \text{ è punto} \\ \text{di massimo/minimo relavito libero per } \Phi. \end{array}\right.$$

Dalle (9):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_l}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_l}+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \psi_n}{\partial x_l}+\frac{\partial f}{\partial x_l}=0, \qquad (l=n+1,...,p) \tag{10}$$

Dalle (2):

$$\begin{gathered} \varphi_k[\psi_1\left(x_{n+1},...,x_p\right),\psi_2\left(x_{n+1},...,x_p\right),...,\psi_n\left(x_{n+1},...,x_p\right),... \\ ...\psi_n\left(x_{n+1},...,x_p\right),x_{n+1},...,x_p]=0 \end{gathered} \tag{11}$$

Derivando primo e secondo membro rispetto a x_l:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_l}+\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_l}+...+\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}\frac{\partial \psi_n}{\partial x_l}+\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}=0, \qquad (k=1,...,n) \tag{12}$$

Moltiplichiamo primo e secondo membro delle singole (12) per $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n \in \mathbb{R}$ rispettivamente:

$$\begin{gathered} \lambda_1\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_l}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_l}+...+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\frac{\partial \psi_n}{\partial x_l}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l}\right)=0 \\ \lambda_2\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_l}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_l}+...+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}\frac{\partial \psi_n}{\partial x_l}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_l}\right)=0 \\ ... \\ \lambda_n\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_l}+\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_l}+...+\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\frac{\partial \psi_n}{\partial x_l}+\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_l}\right)=0 \end{gathered} \tag{13}$$

Sommando membro a membro:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_l}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_l}\right)+...+\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_n}{\partial x_l}\right)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}=0$$

Alcuni termini possono essere tirati fuori dalle sommatorie:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_l}\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_l}\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\right)+...+\frac{\partial\psi_n}{\partial x_l}\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}=0 \tag{14}$$

Ora non dobbiamo fare altro che sommare la (14) alla (10):

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_l}+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_l}+ \qquad (15)\\ &+...+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial\psi_n}{\partial x_l}+\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l}\right)=0,\qquad (l=n+1,...,p)\end{aligned}$$

Imponiamo

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}=0 \qquad (16)\\ &\frac{\partial f}{\partial x_2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2}=0\\ &\qquad ...\\ &\frac{\partial f}{\partial x_n}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l}=0\end{aligned}$$

che è un sistema di n equazionio lineari nelle n incognite $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, la cui matrice dei coefficienti ha per determinante

$$\frac{\partial\left(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\right)}{\partial\left(x_1,x_2,...,x_n\right)}$$

che per ipotesi è non nullo in $\bar{P}$, ed è non nullo in un intorno $I''\left(\bar{P}\right)$. Ciò implica che il sistema (16) è compatibile e determinato. Più specificatamente, si risolve con la regola di Cramer. Con i valori ottenuti (i cosiddetti *moltiplicatori*) le (15) si riducono a

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l}=0,\qquad (l=n+1,...,p) \tag{17}$$

Segue che le coordinate di P e i moltiplicatori devono verificare il sistema di p equazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial x_h}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_h}=0,\qquad (l=1,2...,p) \tag{18}$$

e a queste dobbiamo associare le n equazioni

$$\varphi_k\left(x_1,x_2,...,x_p\right)=0,\qquad (k=1,2,...,n) \tag{19}$$

ottenendo un sistema di $p+n$ equazioni nelle $n+p$ incognite $x_1, x_2, ..., x_p, \lambda_n, ..., \lambda_n$ incognite. L'algoritmo appena ricavato costituisce il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si noti che è facile da ricordare poiché la (18) altro non è che la condizione da applicare per la ricerca degli estremi liberi della funzione $f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ...\lambda_n\varphi_n$, dove i moltiplicatori vanno trattati alla stregua di costanti.

Ad esempio, consideriamo $f(x, y) = x + y$ in cui vogliamo determinare gli estremi vincolati alla condizione $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Quindi abbiamo una sola funzione $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Si tratta di determinare gli estremi liberi di

$$f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x + y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

Otteniamo dunque

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 1 + 2\lambda y = 0 \end{aligned}$$

Dobbiamo perciò risolvere il sistema nelle incognite (λ, x, y)

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0 \\ 1 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Dopo facili passaggi

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2}},\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda &= -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

I valori assunti da f sono

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\sqrt{2} \quad \text{minimo} \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \sqrt{2} \quad \text{massimo} \end{aligned}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Ghizzetti., 1994. *Lezioni di Analisi matematica, vol. II* Veschi.

[2] Demodovic B.C., 1994. *Esercizi e problemi di Analisi Matematica.* Editori Riuniti.

[3] Fasano A., Marmi S. 1996. *Meccanica Analitica.* Boringhieri.