Simulando il nastro di Möbius

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Studiare l'orientabilità della superficie di rappresentazione parametrica*

$$S : x = a\cos u \sin v,\ \ y = a \sin u \sin v,\ \ z = a\cos v, \quad (u, v) \in B, \tag{1}$$

dove

$$B = [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \tag{2}$$

mentre a è una costante positiva con le dimensioni di una lunghezza.

Soluzione

Scriviamo la matrice jacobiana relativa alla rappresentazione parametrica (1):

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin u \sin v & a\cos u \sin v & -a\sin v \\ a\cos u \cos v & a \sin u \cos v & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

da cui i minori estratti del secondo ordine e presi con segno alterno:

$$L(u, v) = a^2 \sin^2 u \cos v, \quad M(u, v) = -\frac{a^2}{2}\sin 2u \cos vv, \quad N(u, v) = -\frac{a^2}{2}\sin 2v$$

Denotando con $\rho(J)$ il rango di J, si ha

$$\rho(J) = 2 \Longleftrightarrow (L, M, N) = (0, 0, 0)$$

e ciò si verifica per $u \neq 0, \pi, 2\pi$ e $v \neq \frac{\pi}{2}$. Viceversa $\rho(J) = 1$, per cui la rappresentazione non è regolare nei predetti punti del piano uv. Per esaminare il comportamento della superficie nei punti corrispondenti a tali valori dei parametri, è conveniente passare alla rappresentazione cartesiana della superficie. A tale scopo dalle (1) ricaviamo

$$\frac{y}{x} = \tan u$$

Tenendo conto della nota relazione

$$\frac{1}{\cos^2 u} = \tan^2 u + 1$$

si ha

$$z = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ne consegue che la superficie assegnata è il grafico della funzione

$$f(x, y) = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{4}$$

definita nel campo non internamente connesso $A = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Per studiare il comportamento della funzione in un intorno dell'origine, passiamo alle coordinate polari (r, φ) nel piano coordinato xy:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

per cui

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = a\cos\varphi$$

Ne segue

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = a\cos\varphi$$

In tal modo il valore del limite dipenderebbe dalla direzione con cui ci avviciniamo all'origine. Ciò implica la non esistenza del limite. Ne concludiamo che la funzione è non regolare nel punto $(x = 0, y = 0)$, avendo ivi una singolarità. In fig. 1 riportiamo il grafico della funzione, da cui vediamo che la superificie è unilatera i.e. non orientabile.

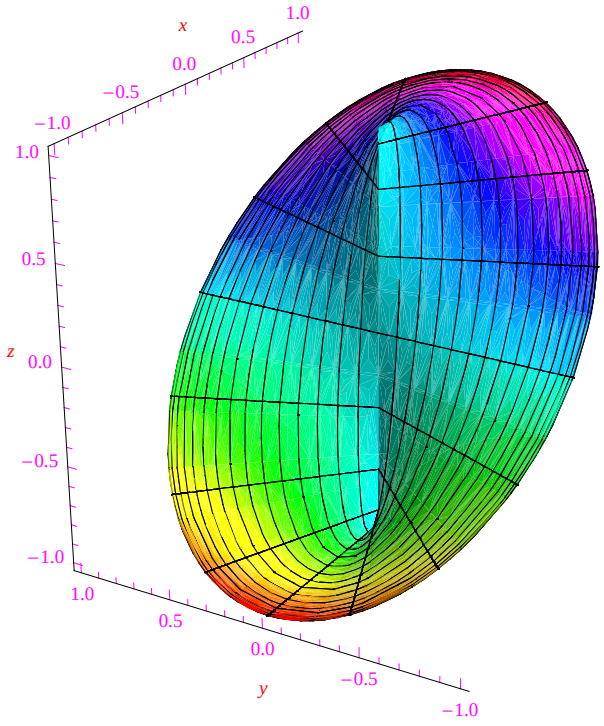

Figura 1: Esercizio 1.