

# Sovrapposizione di punti materiali in un moto piano

Marcello Colozzo

**Esercizio 1** (Tratto (e modificato) da [1]). La soluzione è nostra)

Due punti  $P_1$  e  $P_2$  si muovono lungo due rette complanari  $r_1$  e  $r_2$ , con equazioni orarie

$$s_1(t) = \alpha_1 t^2 + \beta_1 t, \quad s_2(t) = \alpha_2 t^2 + \beta_2 t, \quad (1)$$

dove  $s_1, s_2$  sono le ascisse di  $P_1, P_2$  sulle rispettive rette, contate a partire dal punto  $O$  di intersezione. La retta  $r_2$  ruota rispetto alla retta  $r_1$  con velocità angolare assegnata  $\omega$ .

Attraverso l'ausilio di un software del tipo Mathematica, studiare l'eventuale esistenza di istanti di tempo per i quali  $P_1$  si sovrappone a  $P_2$ .

Dati numerici:

$$\alpha_1 = 3.2 \text{ m/s}^2, \quad \alpha_2 = -52 \text{ m/s}^2, \quad \beta_1 = 1.5 \text{ m/s}, \quad \beta_2 = 650 \text{ m/s}.$$

## Soluzione

Applichiamo il teorema di Carnot al triangolo  $OP_1P_2$  (fig. 1):

$$d(t)^2 = s_1(t)^2 + s_2(t)^2 - 2s_1(t)s_2(t)\cos\omega t \quad (2)$$

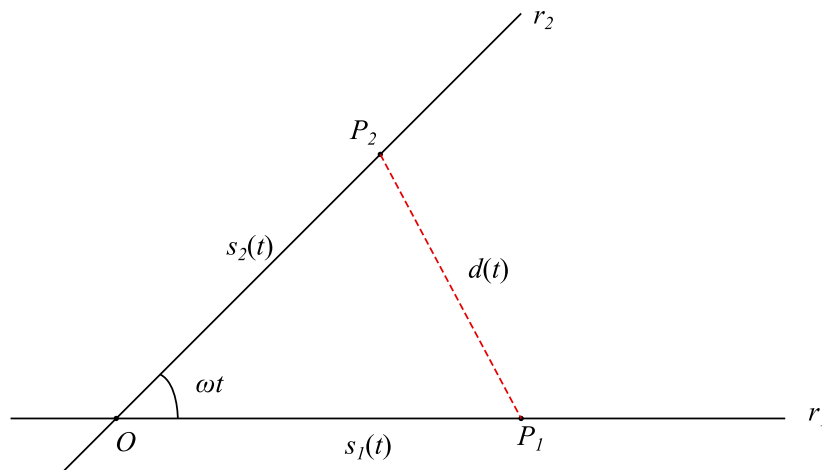


Figura 1: Esercizio 1.

Sviluppando i singoli termini a secondo membro della (2), dopo aver definito la nuova funzione  $f(t) = d(t)^2$ , si ha:

$$f(t) = At^4 + Bt^3 + Ct^2 - 2(Dt^4 + Et^3 + Ft^2)\cos\omega t, \quad (3)$$

avendo introdotto le seguenti costanti (nelle opportune unità di misura):

$$A = 2714.24, \quad B = -67590.40, \quad C = 422502.00, \quad D = -166.40, \quad E = 2002.00, \quad F = 975.00$$

Deve essere  $f(t) \geq 0$ , ovvero

$$p(t) \geq q(t)\cos\omega t, \quad (4)$$

dove il secondo termine è un'oscillazione sinusoidale modulata da un polinomio di quarto grado. Precisamente:

$$q(t) = 2(Dt^4 + Et^3 + Ft^2) = 2(-|D|t^4 + Et^3 + Ft^2) \quad (5)$$

mentre

$$p(t) = At^4 - |B|t^3 + Ct^2 \quad (6)$$

Ed è facile persuadersi del seguente comportamento per  $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = -\infty \quad (7)$$

Segue

$$P_1 \equiv P_2 \iff f(t) = 0$$

Cioè gli istanti di sovrapposizione dei due punti assegnati, sono tutti e soli gli zeri della funzione  $f(t)$ . La determinazione di quest'ultimi è problematica in quanto non conosciamo il valore di  $\omega$ . Anzi, l'esercizio richiede i valori di tale grandezza per i quali i punti si sovrappongono. Tuttavia per valori per così dire "ragionevoli" di  $\omega$ , la distanza non si annulla mai. Più precisamente, a meno di un transitorio iniziale in cui assume un massimo relativo per poi decrescere (oscillando) fino a un minimo assoluto dell'ordine di  $10^6$ , tale funzione diverge positivamente compiendo infinite oscillazioni in un qualunque intorno di  $t = +\infty$ , come illustrato nel grafico di fig. 2.

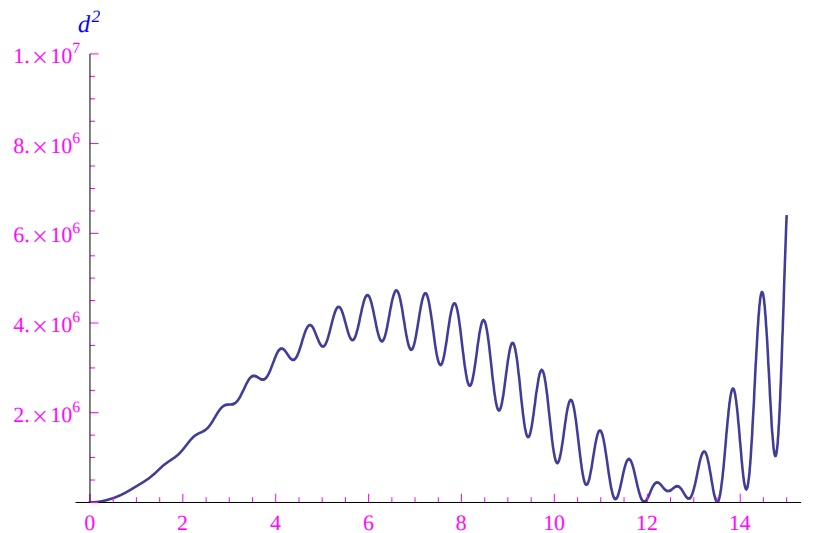


Figura 2: Andamento del quadrato della distanza per  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ .

In fig. 3 plottiamo l'andamento del quadrato della distanza in funzione del tempo, per diversi valori di  $\omega$ .

## Riferimenti bibliografici

- [1] Sette D. Wanderlingh F., *Guida alla soluzione di problemi di fisica : meccanica, onde, termodinamica*. Veschi, 1967.

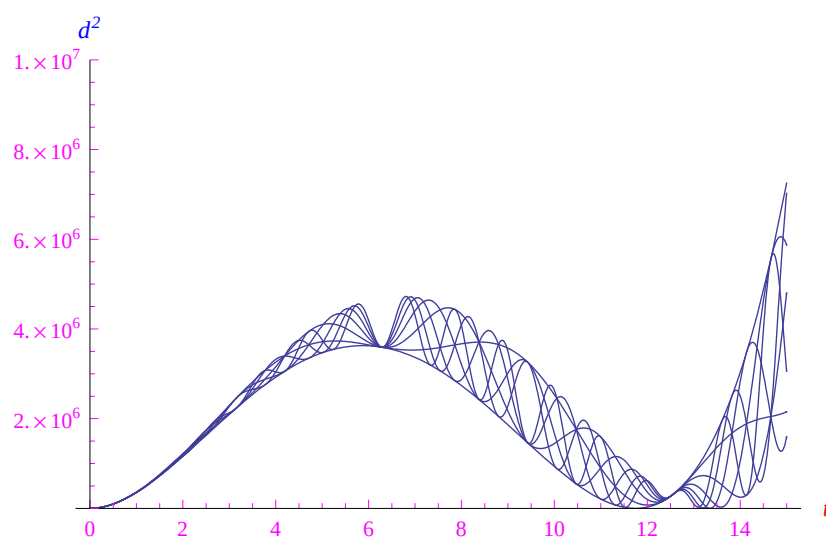


Figura 3: Andamento del quadrato della distanza per  $\omega = 0, 1, \dots, 6 \text{ rad/s}$ .