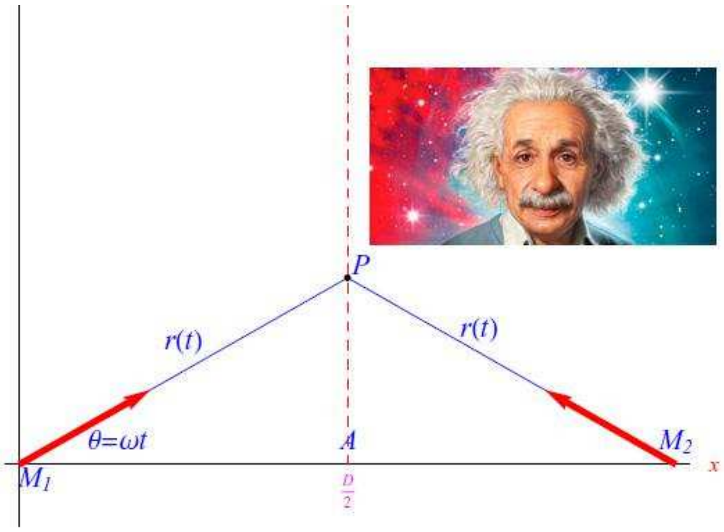
Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info
Quaderni di Fisica – 2019

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(X dx + Y dy + Z dz\right)$$

La mitragliatrice di Einstein

Marcello Colozzo



Due mitragliatrici – considerate puntiformi – sono posizionate sull'asse x di un sistema di riferimento inerziale, come illustrato in fig. 1. Entrambe sparano con continuità proiettili, compiendo una rotazione con velocità angolare costante ω.

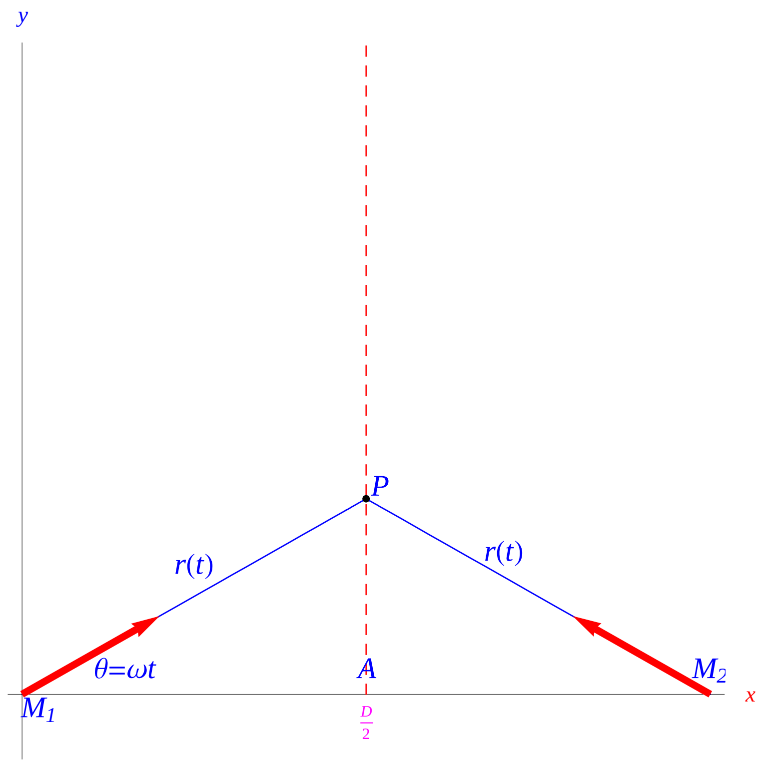


Figura 1: Impostazione cinematica del problema.

Si determini l'equazione oraria del moto del punto P di collisione dei proiettili, nei seguenti casi:

1. proiettili di massa m che si muovono di moto rettilineo ed uniforme, con velocità $u < c$, essendo c la velocità della luce nel vuoto;

2. proiettili di massa nulla (fotoni – raggio laser), per cui $u = c$;

3. proiettili superluminali: $u > c$.

Soluzione

Caso 1

Possiamo tentare un approccio geometrico, determinaindo le coordinate cartesiane del punto P di intersezione delle semirette ruotanti in un generico istante t. Le equazioni delle corrispondenti rette si scrivono:

$$y = x \tan \omega t, \quad y = -x \tan \omega t + D \tan \omega t,$$

da cui le coordinate del punto di intersezione ovvero le equazioni orarie del suo moto[1]:

$$x = \frac{D}{2}, \quad y = \frac{D}{2} \tan \omega t \tag{1}$$

[1]Si noti che la seconda equazione si ricava facilmente per via trigonometrica, considerando il triangolo rettangolo M_1PA.

Quindi la velocità vettoriale di P

$$\mathbf{v}\left(t\right)=\frac{\omega D}{2\cos^{2}\omega t}\mathbf{j} \tag{2}$$

Conseguentemente la velocità scalare

$$v\left(t\right)=\frac{\omega D}{2\cos^{2}\omega t} \tag{3}$$

Riesce:

$$\lim_{t\to\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^{-}}v\left(t\right)=+\infty, \tag{4}$$

contraddicendo la Relatività Speciale. Tuttavia la (4) è geometricamente ovvia, poiché per $t\to\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^{-}$, il punto P va all'infinito, e tale sarà la sua velocità. In realtà, i proiettili si muovono a velocità finita u, i.e. la conclusione precedente è valida nel limite per $u\to+\infty$. Diversamente, una coppia di proiettili sparati al tempo t, giunge in P all'istante

$$t'=t+\frac{r\left(t\right)}{u}$$

Ma

$$r\left(t\right)=\frac{D}{2\cos\omega t},$$

onde

$$t'=t+\frac{D}{2u\cos\omega t} \tag{5}$$

Le mitragliatrici sparano con continuità, per cui una seconda coppia di proiettili viene sparata nell'istante $t+dt$, e giungerà in P al tempo

$$t''=\left(t+dt\right)+\frac{r\left(t+dt\right)}{u}$$

D'altra parte

$$r\left(t+dt\right)=\frac{D}{2\cos\omega\left(t+dt\right)}=\frac{D}{2\left[\cos\left(\omega t\right)-\omega\sin\left(\omega t\right)dt\right]}$$

Segue

$$t''=t+dt+\frac{D}{2\left[\cos\left(\omega t\right)-\omega\sin\left(\omega t\right)dt\right]} \tag{6}$$

Quindi l'intervallo di tempo tra due collisioni successive è

$$\delta t=t''-t'=\left\{1+\frac{\omega D\sin\left(\omega t\right)}{2u\left[\cos\left(\omega t\right)-\omega\sin\left(\omega t\right)dt\right]}\right\}dt$$

Cioè

$$\delta t\simeq\left[1+\frac{\omega D\sin\left(\omega t\right)}{2u\cos\left(\omega t\right)}\right]dt \tag{7}$$

Si noti che per $u\to+\infty$ è $\delta t\to dt$, come appunto deve essere. Se δy è lo spazio percorso dal punto di collisione nell'intervallo infinitesimo δt, si ha:

$$y=\frac{D}{2}\tan\omega t\Longrightarrow\delta y=\frac{D}{2}\frac{\omega dt}{\cos^{2}\omega t} \tag{8}$$

Eliminando dt tra le (7)–(8):

$$\delta y = \frac{u}{2u\cos^2\omega t + \omega D \sin\omega t}\delta t,$$

e quindi la velocità del punto di collisione:

$$v = \frac{\delta y}{\delta t} = \frac{u\omega D}{2u\cos^2\omega t + \omega D \sin\omega t}, \tag{9}$$

che è limitata superiormente dalla velocità dei proiettili. Inoltre

$$\lim_{t\to\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^-} v(t) = u$$

Cioè nell'istante in cui le mitragliatrici sono parallele, la velocità di P è quella dei proiettili. In fig. è graficata la funzione (9).

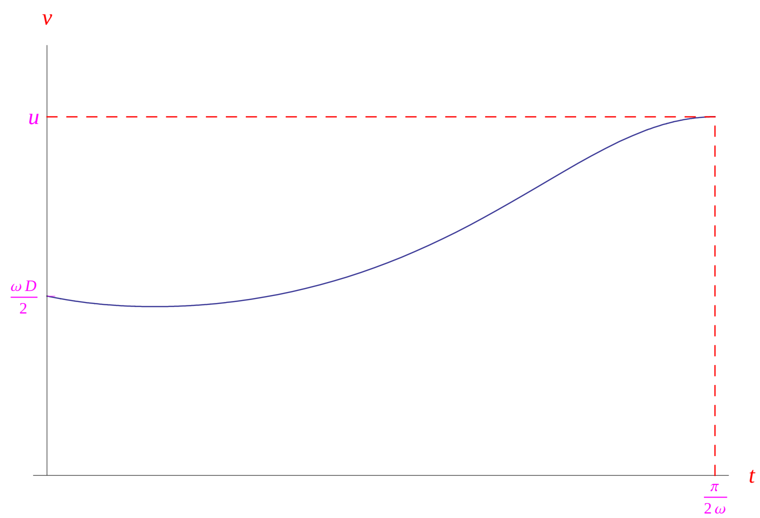


Figura 2: Andamento della velocità del punto di collisione in funzione del tempo.

Caso 2
Si procede in maniera identica, ponendo $u = c$.
Caso 3
Si rimanda a questo articolo (http://www.extrabyte.info/proiettile_extra.pdf).