



Simulazione in ambiente *Mathematica* degli effetti del **Mind Training**

Marcello Colozzo

Istituto Scientia – <http://www.istitutoscientia.it> – via Ortola 65, 54100 Massa, Italy

Sommario

La modellizzazione dell'attività cerebrale attraverso la comparsa di segnali elettrici variabili nel tempo, la cui densità spettrale è nel dominio delle basse frequenze, permette l'utilizzo dell'Analisi di Fourier (precisamente, la DFT/FFT) quale strumento di calcolo per l'analisi in frequenza dei predetti segnali. In tale paradigma, lo *stress* può essere simulato da un *white noise*, e le tecniche di rilassamento di Mind Training finalizzate alla rimozione dello stress, favorirebbero la comparsa di un segnale elettrico migliorando il rapporto *segnale/rumore* e spostando la frequenza dominante al valore $f_0 \simeq 8$ Hz.

Keywords: mind training; trasformata discreta di Fourier; white noise;

Indice

1	Introduzione	2
2	Analisi di Fourier	2
3	La DFT/FFT	2
4	Il pensiero è una variabile aleatoria?	2
4.1	Introduzione	2
4.2	Processi ergodici	3
5	La funzione di autocorrelazione	3
5.1	Il Teorema di Wiener – Khintchine	4
5.2	White Noise	7
6	Simulazione del mantra in Mathematica	8
	Bibliografia	9

1 Introduzione

Le tecniche di rilassamento del tipo *Mind Training* sono fondamentalmente basate sulla ripetizione di un *mantra*. Tale termine deriva dal sanscrito e consiste di una sillaba, priva di significato in quanto la sua valenza è soltanto fonetica, nel senso che risiede esclusivamente nel *suono* della parola medesima. Incidentalmente, il termine mantra esibisce un'assonanza fonetica con il termine *mind training*, che è la traduzione inglese di “allenamento della mente” [1].

Gli effetti positivi del Mind Training sono riportati in [2]–[3].

2 Analisi di Fourier

L'attività elettrica del cervello di un organismo vivente o di un sistema di Intelligenza artificiale è dovuta all'interazione di un numero $N \gg 1$ di *unità di calcolo* (cellule nervose nel caso di materia organica). La predetta attività elettrica è empiricamente dimostrabile attraverso la comparsa di segnali elettrici variabili nel tempo. Sottoponiamo ad Analisi di Fourier un tale segnale $V(t)$:

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{V}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1)$$

ove $\omega = 2\pi f$ è la frequenza angolare, e $\hat{V}(\omega)$ è la trasformata di Fourier di $V(t)$ ed è data dall'inversione della formula integrale precedente:

$$\hat{V}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2)$$

La grandezza $|\hat{V}(\omega)|$ è la *densità spettrale* del segnale $V(t)$, nel senso che il suo andamento in funzione di ω , ci fornisce un'informazione sulle frequenze dominanti. Ad esempio, una $|\hat{V}(\omega)|$ estremamente piccata intorno a un valore $\omega_0 = 2\pi f_0$, ci dice che il segnale $V(t)$ può essere approssimativamente considerato periodico con frequenza f_0 .

3 La DFT/FFT

Dal momento che non è possibile disporre dell'espressione analitica del segnale elettrico $V(t)$ si procede per via numerica attraverso un campionamento del segnale medesimo, per poi sottoporlo alla **DFT/FFT**. Tale analisi ha dimostrato l'esistenza di segnali elettrici la cui frequenza dominante è dell'ordine di 10 Hz.

4 Il pensiero è una variabile aleatoria?

4.1 Introduzione

Nelle sezioni precedenti abbiamo modellizzato l'attività cerebrale attraverso la comparsa di segnali elettrici variabili nel tempo, quale risultato dell'interazione di un numero straordinariamente grande di unità di calcolo. Accanto a tali **segnali deterministici** dobbiamo considerare la comparsa dei cosiddetti *segnali aleatori*.

4.2 Processi ergodici

Fondamentalmente, una grandezza aleatoria non obbedisce al principio di causalità, nel senso che il valore assunto in un generico istante t non è causalmente connesso al valore assunto a un istante $t' < t$. Parliamo dunque di *processo aleatorio* e la corrispondente grandezza $y(t)$ si dice *variabile aleatoria*. Per eseguire una decomposizione spettrale di una tale grandezza, definiamo la *media d'insieme*:

$$\langle y(t) \rangle_t = \int_Y y P(y, t) dy, \quad (3)$$

dove Y è l'insieme dei valori assunti da $y(t)$ e $P(y, t)$ è la densità di probabilità: $P(y_0, t) dy$ è la probabilità infinitesima che una misura di y all'istante t fornisca un valore appartenente all'intervallo infinitesimo $[y_0, y_0 + dy]$. In questo lavoro siamo interessati ai processi aleatori *stazionari*, i.e. processi in cui la densità di probabilità non dipende esplicitamente dal tempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) \equiv 0 \implies P(y, t) \equiv P(y) \quad (4)$$

Per un processo aleatorio stazionario la (3) diventa:

$$\langle y(t) \rangle = \int_Y y P(y) dy \quad (5)$$

La stazionarietà di un processo aleatorio è una condizione necessaria (ma non sufficiente) per l'*ergodicità*. Più precisamente, un processo aleatorio è **ergodico** se le medie di insieme coincidono con le medie temporali:

$$\langle y(t) \rangle = \overline{y(t)}, \quad \forall y(t) \text{ ergodico} \quad (6)$$

dove

$$\overline{y(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} y(t) dt \quad (7)$$

I processi aleatori che ci interessano sono ergodici, perciò per il calcolo dei valori medi ci riferiamo alla (5). Una grandezza statisticamente significativa è la *varianza*:

$$\langle [y(t) - \langle y(t) \rangle]^2 \rangle = \langle y(t)^2 \rangle - \langle y(t) \rangle^2, \quad (8)$$

che nel caso di media nulla si riduce a $\langle y(t)^2 \rangle$. Risulta

$$\overline{W} = \langle y(t)^2 \rangle, \quad (9)$$

dove $\overline{W}$ è la potenza totale della grandezza $y(t)$.

5 La funzione di autocorrelazione

Il valore di una grandezza deterministica y_{det} in un istante t' è univocamente determinato dal valore assunto in un generico istante $t < t'$. In simboli:

$$y_{\text{det}}(t) \xrightarrow{\text{evoluzione deterministica}} y_{\text{det}}(t'), \quad \forall t' > t \quad (10)$$

Per una grandezza aleatoria y_{al} il valore assunto in t' non è univocamente determinato dai valori assunti a tempi $t < t'$. Però può accadere:

$$y_{\text{al}}(t) \xrightarrow{\text{evoluzione deterministica}} P(y_{\text{al}}(t')), \quad \forall t' > t, \quad (11)$$

essendo $P(y_{al}(t'))$ la densità di probabilità di misurare il valore $y_{al}(t')$. Secondo la (11) la probabilità che in un istante $t' > t$ la grandezza y_{al} assuma un assegnato valore, è univocamente determinata dal valore assunto da y_{al} al tempo t . Ciò si esprime dicendo che $y_{al}(t')$ è *correlato* a $y_{al}(t)$. Nel caso contrario, diremo che i suddetti valori sono *scorrelati*. Poniamo

$$y_1 = y(t), \quad y_2 = y(t'), \quad \forall t, t'$$

dove abbiamo ommesso il pedice “al”. Se $P(y_1, y_2)$ è la densità di probabilità congiunta, si ha:

$$\langle y_1 y_2 \rangle = \iint_{Y^2} y_1 y_2 P(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \quad (12)$$

È chiaro che

$$y_1 \text{ e } y_2 \text{ sono valori correlati [scorrelati]} \iff P(y_1, y_2) \neq 0 [P(y_1, y_2) = 0] \quad (13)$$

Ripristinando la notazione precedente:

$$\langle y(t) y(t') \rangle = \begin{cases} \neq 0, & \text{se } y(t) \text{ e } y(t') \text{ sono correlati} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (14)$$

Ciò suggerisce di definire la seguente grandezza

$$\varphi(t' - t) = \langle y(t) y(t') \rangle \quad (15)$$

che si chiama **funzione di autocorrelazione** della variabile aleatoria $y(t)$. Eseguendo il cambio di variabile:

$$\tau = t' - t,$$

si ha:

$$\varphi(\tau) = \langle y(t) y(t + \tau) \rangle, \quad (16)$$

che esprime φ in funzione di τ , per un assegnato istante t che a volte viene posto pari a zero:

$$\varphi(\tau) = \langle y(0) y(\tau) \rangle, \quad (17)$$

o ciò che è lo stesso:

$$\varphi(t) = \langle y(0) y(t) \rangle \quad (18)$$

Per $\tau \rightarrow +\infty$ la correlazione sparisce, cosicché la funzione $\varphi(\tau)$ è infinitesima all'infinito:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow +\infty} \varphi(\tau) = 0 \quad (19)$$

Dalla (15) segue la parità (+1) della funzione di autocorrelazione:

$$\varphi(\tau) \equiv \varphi(-\tau) \quad (20)$$

5.1 Il Teorema di Wiener – Khintchine

Sia dato un processo ergodico a media nulla rappresentato dalla variabile aleatoria $y(t)$. Se $\overline{W}$ è la potenza totale:

$$\overline{W} = \langle y(t)^2 \rangle, \quad (21)$$

che è esprimibile come

$$\overline{W} = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\omega) d\omega \implies \langle y(t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\omega) d\omega, \quad (22)$$

dove $w(\omega)$ è lo spettro di potenza di $y(t)$. Ciò premesso, sussiste il seguente teorema, per la cui dimostrazione rimandiamo alla seguente **risorsa**.

Teorema 1 (Teorema di Wiener – Khintchine)

La funzione di autocorrelazione di una variabile aleatoria $y(t)$ è la trasformata di Fourier dello spettro di potenza della $y(t)$:

$$\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \quad (23)$$

E quindi:

$$w(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \quad (24)$$

Dimostrazione. Sviluppiamo $y(t)$ in integrale di Fourier:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (25)$$

dove

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \quad (26)$$

Sostituendo la (25) nella

$$\varphi(t' - t) = \langle y(t) y(t') \rangle, \quad (27)$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \varphi(t' - t) &= \frac{1}{2\pi} \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega') e^{j\omega' t'} d\omega' \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}(\omega') \rangle e^{j(\omega t + \omega' t')} d\omega d\omega' \end{aligned} \quad (28)$$

Affinchè sia verificata la (28), il risultato della doppia integrazione deve dipendere dalle variabili t, t' attraverso la loro differenza $t' - t$. Ciò implica

$$\langle \hat{y}(\omega) \hat{y}(\omega') \rangle = C \langle \hat{y}(\omega)^2 \rangle \delta(\omega + \omega'), \quad (29)$$

dove C è una costante arbitraria. Infatti:

$$\begin{aligned} \varphi(t' - t) &= \frac{C}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \langle \hat{y}(\omega)^2 \rangle \delta(\omega + \omega') e^{j(\omega t + \omega' t')} d\omega d\omega' \\ &= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \langle \hat{y}(\omega)^2 \rangle \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \delta(\omega + \omega') e^{j(\omega t + \omega' t')}}_{=e^{-j\omega(t' - t)}} \end{aligned} \quad (30)$$

Cioè

$$\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \hat{y}(\omega)^2 \rangle e^{-j\omega\tau} d\omega, \quad (31)$$

avendo posto $C = 2\pi$. Dimostriamo che $\langle \hat{y}(\omega)^2 \rangle \in \mathbb{R}$ pur essendo $\hat{y}(\omega)^2 \in \mathbb{C}$. A tale scopo osserviamo che se nella (29) permutiamo le variabili ω e ω' , otteniamo:

$$\langle \hat{y}(\omega') \hat{y}(\omega) \rangle = 2\pi \langle \hat{y}(\omega')^2 \rangle \delta(\omega' + \omega), \quad (32)$$

Segue

$$\langle \hat{y}(\omega) \hat{y}(\omega') \rangle = \langle \hat{y}(\omega') \hat{y}(\omega) \rangle \implies \langle \hat{y}(\omega)^2 \rangle = \langle \hat{y}(\omega')^2 \rangle, \quad \forall \omega, \omega' \in \mathbb{R} \quad (33)$$

Per $\omega' = -\omega$:

$$\langle \hat{y}(\omega)^2 \rangle = \langle \hat{y}(-\omega)^2 \rangle, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (34)$$

Dalla seconda delle (25):

$$\hat{y}(\omega)^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)^* e^{j\omega t} dt, \quad (35)$$

dove $*$ denota l'operazione di coniugazione complessa. Ma $y(t)$ è una grandezza reale:

$$y(t)^* \equiv y(t) \quad (36)$$

Dal confronto della (35) con la seconda delle (25) si ha:

$$\hat{y}(\omega)^* = \hat{y}(-\omega) \quad (37)$$

da cui la realtà di $\langle \hat{y}(\omega)^2 \rangle$. La (31) può essere scritta come:

$$\langle y(t) y(t+\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \hat{y}(\omega)^2 \rangle e^{-j\omega\tau} d\omega, \quad (38)$$

che per $\tau = 0$ porge:

$$\langle y(t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \hat{y}(\omega)^2 \rangle d\omega \quad (39)$$

Tenendo conto della (22):

$$w(\omega) = \langle \hat{y}(\omega)^2 \rangle, \quad (40)$$

onde l'asserto. ■

Ricapitolando:

$$\text{segnale deterministico} \implies \overline{W} = \int_{-\infty}^{+\infty} y_{\text{det}}(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\text{det}}(\omega) d\omega \quad \text{con } w_{\text{det}}(\omega) = |\hat{y}_{\text{det}}(\omega)|^2 \quad (41)$$

$$\text{segnale aleatorio} \implies \overline{W} = \langle y_{\text{al}}(t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\text{al}}(\omega) d\omega \quad \text{con } w_{\text{al}}(\omega) = \langle \hat{y}_{\text{al}}(\omega)^2 \rangle$$

Nella (24) sviluppiamo l'esponenziale con la formula di Eulero:

$$\begin{aligned} w(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) (\cos \omega\tau + j \sin \omega\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \cos \omega\tau d\tau + j \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \sin \omega\tau d\tau \right] \end{aligned} \quad (42)$$

$\varphi(\tau)$ è funzione pari, per cui $\varphi(\tau) \sin \omega\tau$ è dispari. Quindi il secondo integrale è nullo. La funzione integranda del primo è invece pari, per cui:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \cos \omega\tau d\tau = 2 \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (43)$$

Perciò

$$w(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau, \quad (44)$$

dove siamo passati dalla frequenza angolare $\omega = 2\pi f$ alla frequenza f . Seguendo un procedimento analogo per $\varphi(\tau)$ si perviene in definitiva alla coppia di equazioni che utilizzeremo in seguito:

$$\begin{cases} w(f) = 4 \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \\ \varphi(\tau) = \int_0^{+\infty} w(f) \cos(2\pi f\tau) df \end{cases} \quad (45)$$

Consideriamo ora un segnale aleatorio campionato:

$$y_0, y_1, \dots, y_N \quad (46)$$

La funzione di autocorrelazione si scrive:

$$\varphi_k = \langle y_0 y_k \rangle, \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}, \quad (47)$$

ed è la DFT dello spettro di potenza $w_k = \langle |\hat{y}_k|^2 \rangle$ della (46):

$$\begin{cases} \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{h=0}^{N-1} w_h e^{-j \frac{2\pi}{N} h k} \\ w_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{h=0}^{N-1} \varphi_h e^{j \frac{2\pi}{N} h k} \end{cases} \quad (48)$$

Le (48) esprimono la generalizzazione del teorema di Wiener – Khintchine ai segnali campionati.

Passando dalla frequenza angolare $\omega = 2\pi f$ alla frequenza f , per poi tener conto della simmetria (parità) delle varie funzioni che compaiono sotto il segno di integrale, si giunge alla seguente formulazione del teorema di Wiener – Khintchine:

$$\begin{cases} w(f) = 4 \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \\ \varphi(\tau) = \int_0^{+\infty} w(f) \cos(2\pi f\tau) df \end{cases} \quad (49)$$

Per quanto precede, lo studio di una variabile aleatoria $y(t)$ necessita della conoscenza della densità di probabilità $P(y)$ o dello spettro di potenza. Collegandosi a [questa risorsa](#) è possibile prelevare un esempio numerico di calcolo della funzione di autocorrelazione relativa a una variabile gaussiana.

5.2 White Noise

Definizione 2 Un *white noise* è una variabile aleatoria il cui spettro di potenza è piatto. Cioè:

$$w(f) = w_0, \quad f \in B \subset (0, +\infty), \quad (50)$$

Da questa definizione segue che le componenti spettrali di un white noise hanno tutte la stessa potenza, ed è facile convincersi che la funzione di autocorrelazione di un white noise è una delta di Dirac centrata in $\tau = 0$. Questo significa che i valori assunti da un white noise in funzione del tempo sono scorrelati al 100%.

L'ambiente di calcolo *Mathematica* permette la generazione di un white noise. Un esempio è riportato in fig. 1. Il codice può essere prelevato da [questa risorsa](#).

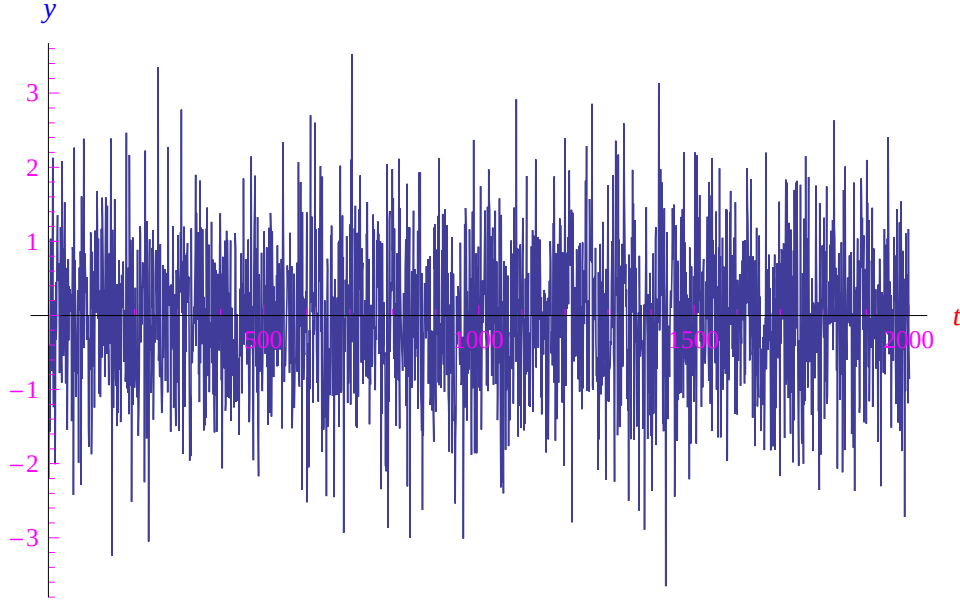


Figura 1: *Esempio di rumore bianco generato con Mathematica, di potenza media unitaria.*

6 Simulazione del mantra in Mathematica

La ripetizione del mantra potrebbe dare origine a un segnale elettrico

$$\psi(t) = V(t) + y_{WN}(t), \quad (51)$$

dove $V(t)$ è una grandezza periodica, mentre $y_{WN}(t)$ è un white noise che rappresenta lo stress. Sottoponendo il segnale (51) a DFT, si perviene ad uno spettro del tipo riportato in fig. 2

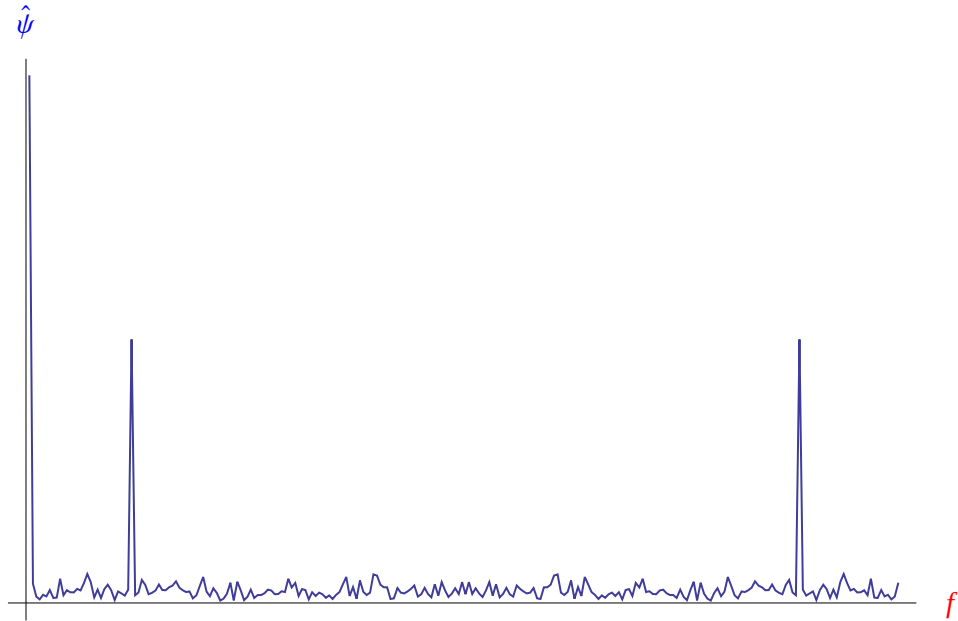


Figura 2: Possibile spettro di potenza di un segnale $\psi(t)$ (eq. (51)) che mostra la comparsa di un picco a f_0 , mentre il secondo picco è dovuto all'aliasing.

Riferimenti bibliografici

- [1] Coppola F., 2009. *La rivoluzione prossima ventura. Come le tecniche di meditazione possono cambiare la nostra vita*. Edizioni L'Età dell'Acquario.
- [2] Coppola F., 2009. "Effects of natural stress relief meditation on trait anxiety: a pilot study". NCBI Journal <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/17958117>
- [3] Coppola F., D. Spector, 2009. "Natural stress relief meditation as a tool for reducing anxiety and increasing self-actualization".
<https://www.sbp-journal.com/index.php/sbp/article/view/1825>