Trasposta del prodotto di matrici

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Proposizione 1 *Se A, B sono due matrici quadrate di ordine n su un campo $\mathbb{K}$, si ha:*

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{1}$$

Dimostrazione. Poniamo

$$A = (a_{ik}), \quad B = (b_{ik}), \qquad i, k = 1, 2, ..., n \tag{2}$$

Quindi

$$C \stackrel{def}{=} AB \Longrightarrow C^T = (AB)^T \tag{3}$$

Denotando con c_{ik} gli elementi di matrice di C, si ha per definizione di prodotto righe per colonne:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \tag{4}$$

Passiamo alla trasposta di C:

$$C^T = (\tilde{c}_{ik}),$$

essendo

$$\tilde{c}_{ik} = c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji} \tag{5}$$

Poniamo ora

$$D = B^T A^T, \tag{6}$$

per cui denotando con d_{ik} gli elementi di matrice di D:

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_{ij} \tilde{a}_{jk}, \tag{7}$$

dove

$$\left(\tilde{b}_{ik}\right) = B^T, \quad (\tilde{a}_{ik}) = A^T \tag{8}$$

Per definizione di matrice trasposta:

$$\tilde{b}_{ik} = b_{ki}, \quad \tilde{a}_{ik} = a_{ki} \tag{9}$$

Ne consegue che la (7) può scriversi:

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} a_{kj}, \tag{10}$$

che confrontata con la (5) porge:

$$\tilde{c}_{ik} = d_{ik}, \quad i, k = 1, 2, ..., n$$

Cioè

$$C^T = D,$$

onde l'asserto. ■