Matrice scalare

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Determinare una base del sottospazio vettoriale di* $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2,2)$ *i cui elementi commutano con ogni elemento di* $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2,2)$.

Soluzione

Scriviamo

$$W_{\mathbb{R}}(2,2) = \{X \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2,2) \mid AX = XA, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2,2)\}, \tag{1}$$

quindi poniamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \tag{2}$$

Esplicitiamo il prodotto AX:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}z & a_{12}t + a_{11}y \\ a_{21}x + a_{22}z & a_{22}t + a_{21}y \end{pmatrix} \tag{3}$$

E il prodotto XA:

$$XA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{21}y & a_{12}x + a_{22}y \\ a_{21}t + a_{11}z & a_{22}t + a_{12}z \end{pmatrix} \tag{4}$$

La nostra richiesta è

$$AX = XA$$

Cioè

$$\begin{cases} 0 + a_{21}y - a_{12}z + 0 = 0 \\ a_{12}x + (a_{22} - a_{11})\,y + 0 - a_{12}t = 0 \\ a_{21}x + 0 + (a_{22} - a_{11})\,z - a_{21}t = 0 \\ 0 + a_{21}y - a_{12}z + 0 = 0 \end{cases}, \tag{5}$$

le cui soluzioni non nulle sono:

$$(x, y, z, t) = (\lambda, 0, 0, \lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Ne segue

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Cioè, la più generale matrice che commuta con ogni matrice di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2,2)$ è una matrice *scalare*. Tale denominazione è giustificata dal fatto che una tale matrice si riduce alla moltiplicazione dello scalare λ per la matrice identità. A questo punto è immediato determinare una base del sottospazio $W_{\mathbb{R}}(2,2)$, giacché

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

onde

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{8}$$

è una base di $W_{\mathbb{R}}(2,2)$:

$$\dim W_{\mathbb{R}}(2,2) = 1 \tag{9}$$

Si noti che tale risultato si generalizza a ogni n:

$$\dim W_{\mathbb{R}}(n,n) = 1, \tag{10}$$

essendo

$$W_{\mathbb{R}}(n,n) = \{X \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n) \mid AX = XA, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)\} \tag{11}$$