Macchine ricorsive

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Se f è una funzione definita dall'utente (o built-in), è possibile applicare n volte f a se stessa in un punto x, applicando la funzione built-in `Nest[f,x,n]`. Esempio:

In[1]:=
```
Nest[f, x, 4]
```

Out[1]=
```
f[f[f[f[x]]]]
```

È preferibile indentare il codice:

In[2]:=
```
Nest[
 (*funzione da iterare*)
 f,
 (*punto iniziale*)
 x0,
 (*numero di iterazioni*)
 4
]
```

Out[2]=
```
f[f[f[f[x0]]]]
```

Supponiamo ad esempio di voler iterare la seguente funzione assumendo come punto iniziale $x_0 = 2$ e un numero di iterazioni pari a 4:

In[3]:=
```
f[x_] := Sin[x^2]
```

In[4]:=
```
Nest[
 (*funzione da iterare*)
 f,
 (*punto iniziale dell'iterazione*)
 2,
 (*numero di iterazioni*)
 4
]
```

Out[4]= $\mathrm{Sin}\left[\mathrm{Sin}\left[\mathrm{Sin}\left[\mathrm{Sin}[4]^2\right]^2\right]^2\right]$

In[5]:=
```
Clear[f]
```

`NestList[f,x,n]` genera invece la lista di applicazioni.

In[6]:=
```
NestList[
 (*funzione da iterare*)
 f,
 (*punto iniziale*)
 x0,
 (*numero di iterazioni*)
 4
]
```

Out[6]=
```
{x0, f[x0], f[f[x0]], f[f[f[x0]]], f[f[f[f[x0]]]]}
```

Ad esempio:

In[7]:= $f[x\_] := \dfrac{1}{1+\mathrm{Sin}[x]}$

In[8]:=
```
Nest[
 f,
 x,
 5
]
```

Out[8]=

$$\frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}[x]}\right]}\right]}\right]}\right]}$$

In[9]:=
```
NestList[
 f,
 x,
 5
]
```

Out[9]=

$$\left\{x,\ \frac{1}{1+\mathrm{Sin}[x]},\ \frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}[x]}\right]},\ \frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}[x]}\right]}\right]},\ \frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}[x]}\right]}\right]}\right]},\ \frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{1+\mathrm{Sin}[x]}\right]}\right]}\right]}\right]}\right\}$$

In[10]:=
```
Clear[f]
```

I comandi `Nest` e `NestList` hanno una notevole applicazione nella ricerca delle soluzioni di un'equazione del tipo $f(x) = x$ che come è noto, si risolve per ricorsione. Più precisamente, si sceglie un punto iniziale x_0 per poi iterare f su x_0 studiando la convergenza della successione ottenuta.

In[11]:=
```
f[x_] := Cos[x]
```

In[12]:=
```
x0 = 1.5;
```

In[13]:=
```
iterazione[n_] := NestList[
  f,
  x0,
  n
 ]
```

Per $n = 30$:

In[14]:=
```
iterazione[30]
```

Out[14]=
```
{1.5, 0.0707372, 0.997499, 0.542405, 0.85647, 0.655109, 0.792982,
 0.701724, 0.76373, 0.722261, 0.750313, 0.731476, 0.74419,
 0.735637, 0.741403, 0.737522, 0.740137, 0.738376, 0.739563,
 0.738763, 0.739302, 0.738939, 0.739183, 0.739019, 0.73913,
 0.739055, 0.739105, 0.739071, 0.739094, 0.739079, 0.739089}
```

da cui vediamo che le iterazioni convergono a 0.739089. Inoltre, esistenza ed unicità della radice dell'equazione $f(x) = x$ è espressa dal noto Teorema di Brouwer (o del punto fisso) che afferma: "Se f è una funzione derivabile in $[a, b]$ tale che $|f'(x)| < \mu$, allora esiste ed è unica la radice dell'equazione $f(x) = x$. Osserviamo che *Mathematica* ha l'istruzione `FixedPoint` per la ricerca del punto fisso:

In[15]:=
```
FixedPoint[Cos, 0.1]
```

Out[15]=
```
0.739085
```