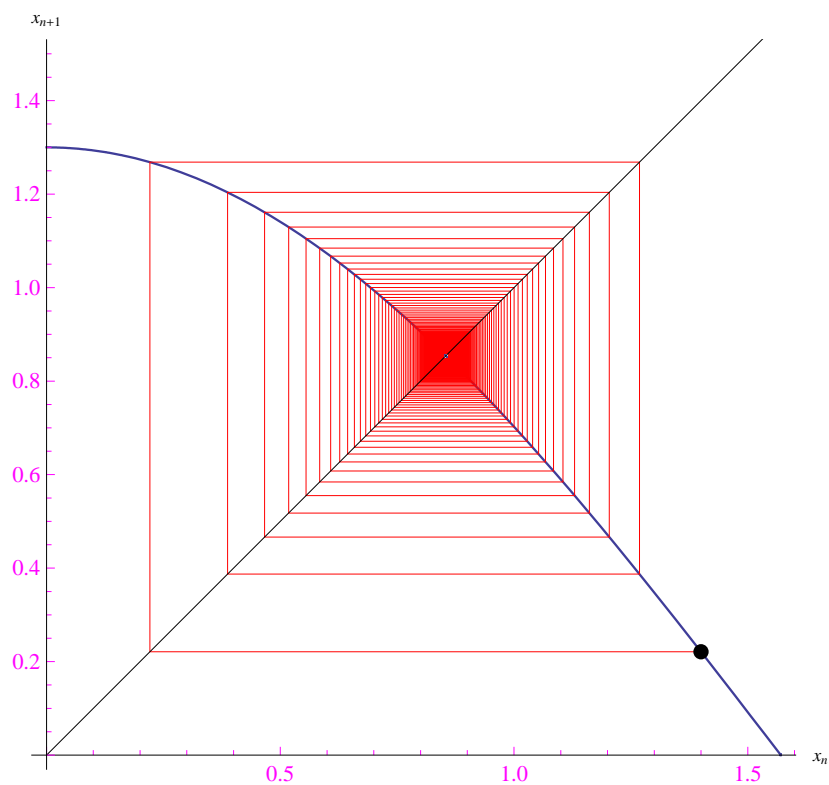


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Macchine Ricorsive

Marcello Colozzo



Indice

1	Un esempio di Macchina ricorsiva: il Sistema di Navigazione Inerziale	4
2	Equazioni differenziali e sistemi dinamici	8
2.1	Sistemi dinamici a tempo continuo	8
2.2	Sistemi autonomi	13
2.3	Sistemi lineari	14
2.4	Lo spazio delle configurazioni	16
2.5	Caso omogeneo ($\beta_0 = 0$)	17
2.6	Caso non omogeneo ($\beta_0 \neq 0$)	20
3	Macchine ricorsive	23
3.1	Il metodo di Eulero	23
3.2	Il metodo di König-Lemaray	27
3.3	Il Teorema del punto fisso di Brouwer	35
3.4	Punti periodici. Oscillatore	53
4	Macchine ricorsive lineari: alcune applicazioni	55
4.1	Transitorio in una serie RC	55
4.2	Transitorio in una serie RL	58
5	Macchine ricorsive non lineari: la mappa logistica	62
5.1	L'equazione di Riccati	62
5.1.1	Problema di Cauchy	62
5.1.2	Analisi delle soluzioni	63
A	Calcolo della rotta iniziale	68
B	Alcuni metodi di integrazione delle equazioni differenziali ordinarie	69
B.1	Integrazione per separazione di variabili	69
	Bibliografia	78

Prefazione

Consideriamo un problema matematico \mathcal{P} . In linea assolutamente generale, esistono due procedimenti di “attacco” per risolvere \mathcal{P} :

1. Procedimento analitico (Π_1).
2. Procedimento algoritmico (Π_2).

Π_1 è il procedimento, per così dire, classico. Si pensi, ad esempio, alla dimostrazione di un teorema (quindi, ciò che abbiamo denotato con \mathcal{P} non è necessariamente un problema nel senso letterale del termine): si parte da una ipotesi per giungere, attraverso una successione ordinata di passaggi logici, alla tesi del teorema¹.

Π_2 è, invece, tipico dei linguaggi di programmazione e più in generale, dei sistemi di computer algebra (C.A.S). Per inciso, anche Π_1 è - in linea di principio - riducibile a un algoritmo². Tuttavia, nel caso 2 ci riferiamo esclusivamente agli algoritmi nel senso dei linguaggi di programmazione, nonché dei sistemi di computer algebra.

Per comprendere appieno la differenza tra Π_1 e Π_2 è utile la metafora delle due interfacce. Più specificatamente, consideriamo una “Interfaccia Umana” ed una “Interfaccia Artificiale”. Con la prima intendiamo la modalità umana di elaborare concetti matematici. L’interfaccia artificiale, invece, è una modalità di tipo algoritmico che caratterizza i linguaggi di programmazione.

Interfaccia Umana	Interfaccia Artificiale
Successione ordinata di passaggi logici	Esecuzione di un algoritmo

In linea di principio, abbiamo le seguenti possibilità:

- \mathcal{P} è risolto da entrambi i procedimenti. In simboli:

$$\forall k \in \{1, 2\}, \Pi_k \text{ risolve } \mathcal{P}$$

- \mathcal{P} è risolto da uno solo dei due procedimenti:

$$\exists! k \in \{1, 2\} \mid \Pi_k \text{ risolve } \mathcal{P}$$

- \mathcal{P} non è risolto da nessuno dei due procedimenti:

$$\nexists k \in \{1, 2\} \mid \Pi_k \text{ risolve } \mathcal{P}$$

¹Ci stiamo riferendo al caso generale, poiché esistono altri metodi di dimostrazione, come ad esempio il procedimento induttivo e la dimostrazione per assurdo.

²Non sempre, si pensi all’indecidibilità gödeliana.

Nel primo caso il procedimento algoritmico Π_2 può produrre degli effetti inaspettati, ossia non presenti se \mathcal{P} viene risolto da una interfaccia umana Π_1 . Ad esempio, ciò si verifica per i problemi di Cauchy relativi ad un'equazione differenziale del tipo Riccati:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} y' = \alpha y - (\alpha + 1) y^2 \\ y(0) = u_0 \end{cases}, \quad (1)$$

con $\alpha > 0$ e $u_0 \neq 0$. Come vedremo, per tale problema la precedente tabella si scrive:

Interfaccia Umana	Interfaccia Artificiale
$y(x) = \frac{y_\infty}{1 + \left(\frac{y_\infty}{u_0} - 1\right) e^{-\alpha x}}, \quad y_\infty \stackrel{def}{=} \frac{\alpha}{\alpha + 1}$	$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} \mid \begin{cases} y_{n+1} = (\alpha + 1) y_n - (\alpha + 1) y_n^2 \\ y_0 = u_0 \end{cases}$

Per inciso, un sistema di computer algebra è perfettamente in grado di ottenere la soluzione in forma chiusa $y(x) = \frac{y_\infty}{1 + \left(\frac{y_\infty}{u_0} - 1\right) e^{-\alpha x}}$, poichè tali sistemi operano su simboli oltre che su numeri. Noi, però, utilizzeremo l'approccio numerico per i suddetti sistemi. Nello specifico, la procedura algoritmica Π_2 è il Metodo di Eulero che nel caso del problema assegnato (1) genera il *caos deterministico*.

Infine, in altri casi, gli andamenti asintotici della soluzione in forma chiusa $y(x)$ (si pensi, ad esempio, a un transitorio in un circuito *RC* o *RL*), si traducono in interessanti proprietà topologiche dell'insieme di punti associati alla successione $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ generata da Π_2

In questo libro si danno per scontate le principali nozioni di Analisi Matematica (reale e complessa) e Algebra lineare. La sua struttura si articola nel modo seguente:

1. Nel Capitolo 1 viene presentato il sistema di computer algebra *Mathematica*. Focalizzeremo la nostra attenzione sui processi ricorsivi, poichè svolgeranno un ruolo fondamentale nella risoluzione di \mathcal{P} attraverso il procedimento Π_2 .
2. Il Capitolo 2 è dedicato alle equazioni differenziali del primo ordine di forma normale. Viene enunciato, ma non dimostrato, il Teorema di esistenza ed unicità che conduce fisiologicamente alla nozione di *sistema dinamico deterministico*.
3. ...

Capitolo 1

Un esempio di Macchina ricorsiva: il Sistema di Navigazione Inerziale

L'*Operazione Paukenschlag*¹ fu un'azione a sorpresa ideata dall'ammiraglio Karl Dönitz della marina militare tedesca durante la seconda guerra mondiale, e comandante della flotta sottomarina. Tale operazione impegnò due distinte squadre di *U-boat* lungo le coste Usa e del Canada.

Nello stesso periodo storico, un ufficiale della marina tedesca, G.M. Boykon, in collaborazione con l'ing. Von Braun, realizzò il primo sistema di navigazione inerziale di guida dei razzi V2. Da alcuni archivi storici è emerso che il sistema inerziale venne utilizzato a bordo dei sommergibili tedeschi.

Lo start up dell'*Operazione Paukenschlag* avvenne il 9 gennaio 1942. Ma diamo il via alla storia... L'*U-boat* 130 partì da un punto A al largo della base francese di La Rochelle:

$$A \equiv \begin{cases} \varphi_A = 46^\circ 14' \text{ N} \\ \lambda_A = 01^\circ 27' \text{ W} \end{cases}, \quad (1.1)$$

diretto verso un punto B al largo di Halifax (Canada):

$$B \equiv \begin{cases} \varphi_B = 44^\circ 16' \text{ N} \\ \lambda_B = 62^\circ 32' \text{ W} \end{cases}, \quad (1.2)$$

Le formule (1.1)-(1.2) forniscono le coordinate geografiche (latitudine φ e longitudine λ) del punto di partenza e del punto di arrivo. Senza scrivere un trattato di Navigazione, è necessaria una precisazione. Assegnate le coordinate di partenza e di arrivo, è possibile determinare la distanza e l'angolo di rotta, a patto di specificare il tipo di traiettoria seguita. Vengono, allora, formulate delle ipotesi circa la forma della superficie che più approssima quella terrestre, e quella più semplice è la superficie di una sfera. E, come è noto, il percorso più breve che unisce due punti sulla sfera è l'arco di circolo massimo (minore di 180°) passante per essi. In Appendice A abbiamo eseguito i calcoli servendoci di formule ricavate dalla trigonometria sferica [1]. Inoltre, uno dei problemi principali in Navigazione è la determinazione del *punto-nave*, ovvero la determinazione delle coordinate geografiche (φ, λ). I sistemi, per così dire, tradizionali, risolvono tale problema eseguendo misure/osservazioni (astronomiche, ricezioni di segnali elettromagnetici, etc.). Tuttavia, tali sistemi dipendono dall'esterno: si pensi a problemi di visibilità o a propagazione anomale delle onde elettromagnetiche. In quest'ultimo caso, c'è da aggiungere la possibilità di intercettazione dei segnali e quindi della posizione di una nave nemica. Diversamente, il sistema di navigazione inerziale è esclusivamente basato sulla misura dell'accelerazione della nave. Più precisamente, approssimando la superficie terrestre a quella di una sfera di raggio R , fissiamo una terna di assi cartesiani ortogonali

¹*Operazione colpo di tamburo.*

$\mathcal{T}(Oxyz)$ con l'origine nel centro della sfera, il piano coordinato xy coincidente con il piano equatoriale terrestre, orientando l'asse x in direzione del meridiano di Greenwich. Chiamiamo $\mathcal{T}(Oxyz)$ **terna terrestre**. A rigore non si tratta di un sistema di riferimento inerziale², a causa della rotazione diurna della Terra e del suo moto di rivoluzione intorno al Sole. Tuttavia, con buona approssimazione $\mathcal{T}(Oxyz)$ può essere considerata una terna inerziale. Le equazioni che legano le coordinate cartesiane (x, y, z) alle coordinate geografiche (φ, λ) sulla sfera terrestre sono:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \lambda \\ y = R \cos \varphi \sin \lambda \\ z = R \sin \varphi \end{cases}, \quad (1.3)$$

dove R è il raggio della sfera terrestre, mentre gli angoli φ e λ sono espressi in radianti. A bordo dell'U-boat 130 è montato un *accelerometro*, ovvero uno strumento in grado di determinare in un generico istante t , l'accelerazione del sommergibile rispetto alla terna terrestre $\mathcal{T}(Oxyz)$, che è il vettore:

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t) \mathbf{i} + a_y(t) \mathbf{j} + a_z(t) \mathbf{k}, \quad (1.4)$$

essendo $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori degli assi coordinati. Ma $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, cioè la derivata rispetto al tempo della velocità, per cui:

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t) dt = \left(\int a_x(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int a_y(t) dt \right) \mathbf{j} + \left(\int a_z(t) dt \right) \mathbf{k}$$

Eseguendo una seconda integrazione, possiamo determinare il vettore posizione $\mathbf{x}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}$ dell'U-boat, giacchè $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$. Note le coordinate cartesiane al tempo t , invertendo le (1.3) si ottengono le coordinate geografiche al tempo t , ovvero il punto-nave. Possiamo quindi tracciare uno schema a blocchi per ciò che riguarda il "funzionamento" di un sistema di navigazione inerziale (cfr. fig. 1.1).

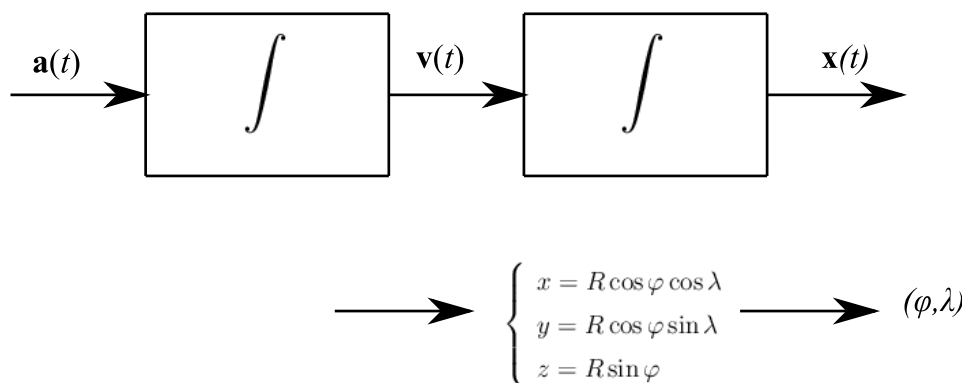


Figura 1.1: Schema a blocchi che illustra il principio di un sistema di navigazione inerziale. Un accelerometro fornisce al tempo t il valore dell'accelerazione \mathbf{a} della nave. Il calcolatore esegue una prima integrazione (rispetto al tempo), fornendo la velocità \mathbf{v} all'istante t . L'output di una seconda integrazione è la posizione \mathbf{x} e, quindi, le coordinate geografiche.

È chiaro che l'affidabilità di un sistema di navigazione inerziale dipende essenzialmente dai due fattori:

²In un sistema di riferimento inerziale è valida la legge di inerzia: una particella non sottoposta a forze (o se la risultante è nulla) o è in quiete o si muove di moto rettilineo ed uniforme.

1. Possibilità di misurare l'accelerazione con una precisione adeguata.
2. Possibilità di eseguire l'integrazione di una funzione vettoriale di una variabile reale.

D'altra parte, per la seconda legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, segue che il problema della navigazione inerziale è riconducibile a ciò che nella teoria delle equazioni differenziali si chiama *problema di Cauchy*. Precisamente:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{F}}{m} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}, \quad (1.5)$$

dove t_0 è un istante iniziale e \mathbf{x}_0 la posizione iniziale, supposta nota. $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{F}}{m}$ è un'equazione differenziale vettoriale (quindi, un sistema di equazioni differenziali) del secondo ordine che, però, può essere ridotto al primo,:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{F}}{m} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \end{cases} \quad (1.6)$$

Infatti, integrando la prima delle (1.6) si perviene alla funzione vettoriale $\mathbf{v}(t)$ che, a sua volta, ci darà la possibilità di determinare la posizione $\mathbf{x}(t)$. Senza perdita di generalità, ci si può riferire (per poi generalizzare) a moti unidimensionali, cosicchè il sistema precedente si scrive:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{F}{m} \\ \dot{x} = v \end{cases} \quad (1.7)$$

Quindi il problema di Cauchy che ci interessa è:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{F}{m} \\ v(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Una volta determinata la velocità $v(t)$, integrando otteniamo la posizione $x(t) = \int v(t) dt$. Tipicamente, la forza F dipende dal tempo, dalla posizione e dalla velocità, per cui è $F(t, x, \dot{x})$. Particolarmente interessante è il caso in cui F dipende (esplicitamente) solo dalla velocità \dot{x} , per cui il problema (1.8) diventa:

$$\begin{cases} \dot{v} = f(v) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}, \quad (1.9)$$

avendo definito $f(v) = \frac{F(v)}{m}$. L'equazione $\dot{v} = f(v)$ appartiene a una particolare classe di equazioni differenziali: i cosiddetti *sistemi autonomi*. Questi ultimi sono l'argomento principale del presente lavoro.

Nell'ipotesi (1.9) l'accelerometro darà "in pasto" al calcolatore di bordo l'espressione della funzione $f(v)$, i.e. la derivata $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$. Il calcolatore dovrà, quindi, integrare tale equazione differenziale. In questa nostra simulazione *virtuale* immaginiamo che il calcolatore disponga di un unico algoritmo per l'integrazione (numerica) della suddetta equazione: il metodo di Eulero. Vedremo che per una classe di funzioni $f(v)$ il calcolatore entrerà in un *loop caotico*, con tanto di *punti periodici*, *punti di biforcazione* e di tutti quegli elementi che caratterizzano il cosiddetto **caos deterministico**. L'aggettivo *deterministico* si riferisce al fatto che i sistemi in istudio obbediscono al determinismo fisico. Nel caso specifico del problema (1.5) o della sua versione "ridotta" (1.9), il determinismo fisico si traduce matematicamente in un teorema secondo cui sotto ragionevoli ipotesi di regolarità della funzione $f(v)$ (cioè se $f(v)$ è *onesta*, come amano dire i fisici teorici), il problema (1.5) ammette una ed una sola soluzione. Detto in altro modo, assegnato lo stato iniziale $v(t_0) = v_0$ e la "legge" $f(v)$, resta univocamente determinato lo stato (cioè la velocità) a tutti i tempi. Tuttavia, esistono sistemi autonomi che pur essendo deterministici (in quanto la funzione $f(v)$ è onesta) risultano imprevedibili, nel senso che non è possibile conoscere $v(t)$ per $t > t_0$. È altresì necessario osservare che tale comportamento si realizza integrando numericamente la $\dot{v} = f(v)$ con il metodo di Eulero.

Questo lavoro è così suddiviso:

- Nel Capitolo 2 dopo una necessaria introduzione sulle equazioni differenziali, daremo la definizione assiomatica di *sistema dinamico a tempo continuo*, prestando particolare attenzione a quelli lineari.
- Nel Capitolo 3 affronteremo lo studio del Metodo di Eulero per l'integrazione di equazioni differenziali del primo ordine, definendo, poi, l'importante nozione di **Macchina ricorsiva**.
- Nella sezione 4 esploreremo alcune interessanti applicazioni delle macchine ricorsive, ovvero il metodo di Eulero applicato all'integrazione di un sistema autonomo lineare. Passeremo in rassegna il fenomeno dei transistori circuitali in una serie *RC* e *RL* rispettivamente, mostrando in seguito, che il comportamento di un diodo a giunzione non può essere simulato da un sistema autonomo. Come ultima applicazione, consideriamo la caduta libera di una palla da tennis in un campo gravitazionale uniforme.
- Nella sezione ?? studieremo, come anticipato, il sistema di navigazione inerziale a bordo di un sommergibile.

Capitolo 2

Equazioni differenziali e sistemi dinamici

2.1 Sistemi dinamici a tempo continuo

Denotiamo con x una grandezza¹ che dipende dal tempo t attraverso una legge $x = x(t)$, dove $x(t)$ è una funzione reale della variabile reale t . In molte situazioni sperimentali non abbiamo accesso all'espressione analitica della funzione $x(t)$, mentre è possibile dedurre il legame funzionale tra la variabile indipendente t , la grandezza x e le prime $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ derivate di x rispetto a t . In simboli:

$$\Phi \left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n} \right) = 0, \quad (2.1)$$

dove $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. In altri termini, Φ è una funzione reale delle $n + 2$ variabili reali $t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}$. Dall'Analisi matematica sappiamo che la (2.1) è una ODE, acronimo che tradotto dall'inglese significa *equazione differenziale ordinaria*. Più precisamente, è un'equazione di ordine n in forma non normale, in quanto non risolta rispetto alla derivata di ordine massimo della funzione $x(t)$. In questo lavoro siamo interessati alle equazioni del primo ordine e di forma normale, cioè²:

$$\dot{x} = F(t, x), \quad (2.2)$$

avendo utilizzato, come è consuetudine, la notazione puntata per indicare l'operazione di derivazione rispetto al tempo, ovvero $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Nella (2.2) è $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Per una questione di comodità matematica e senza perdita di generalità, supponiamo che D sia:

$$\begin{aligned} D &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t_1 \leq t \leq t_2, \quad -\infty < x < +\infty\} \\ &= [t_1, t_2] \times (-\infty, +\infty) \end{aligned} \quad (2.3)$$

L'equazione differenziale (2.2) determina l'evoluzione temporale di un **sistema dinamico**. Quest'ultimo modella un sistema fisico caratterizzato dalla grandezza x . Dalla teoria delle equazioni differenziali sappiamo che l'integrale generale di (2.2) ha la forma $x(t, C)$ che geometricamente rappresenta una famiglia di curve piane ad un parametro. Infatti, C è una arbitraria costante di integrazione. Da un punto di vista fisico siamo interessati a una soluzione che verifica una assegnata condizione iniziale. Matematicamente, ciò si traduce nella ricerca delle soluzioni del *problema di Cauchy*:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

¹Come vedremo in seguito, x potrebbe essere la carica elettrica sulle armature di un condensatore alimentato da una f.e.m. V_{in} . Ma non è detto che sia necessariamente una grandezza fisica. Si pensi, ad esempio, ad una popolazione batterica che evolve nel tempo secondo una legge $x(t)$.

²Le grandezze x e t sono espresse in unità adimensionali.

dove $t_0 \in [t_1, t_2]$ è un istante iniziale assegnato.

Definizione 1 Il problema di Cauchy (2.4) è **compatibile** e **determinato** se esiste ed è unica la soluzione. Il problema è **incompatibile** (o **impossibile**) se è privo di soluzioni. Infine, il problema è compatibile e **indeterminato**, se ammette più soluzioni.

Definizione 2 Il sistema dinamico $\dot{x} = F(t, x)$ si dice **deterministico** se il problema (2.4) è compatibile e determinato, i.e. ammette una ed una sola soluzione.

In altri termini, l'evoluzione dinamica di un sistema deterministico è univocamente determinata dalla condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ e dalla legge $\dot{x} = F(t, x)$. Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 3 La funzione reale di n variabili reali x_1, x_2, \dots, x_n :

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{con } A \subseteq \mathbb{R}^n \tag{2.5}$$

si dice di **classe** r su A (o anche C^r) e si scrive $f \in C^r(A)$, se è ivi continua e dotata di derivate parziali continue in A fino all'ordine r .

La funzione (2.5) è C^∞ su A e si scrive $f \in C^\infty(A)$, se è di classe r per ogni $r \in \mathbb{N}$:

$$f \in C^\infty(A) \stackrel{\text{def}}{\iff} f \in C^r(A), \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

Ciò premesso, enunciamo (senza dimostrare) il seguente teorema:

Teorema 4 (Teorema di esistenza)

Sia dato il problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{2.6}$$

dove $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, essendo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $D = [t_1, t_2] \times (-\infty, +\infty)$.

Hp. $F \in C^0(D)$.

Th. $\forall (t_0, x_0) \in \overset{\circ}{D}, \exists \xi(t) \in C^1(I(t_0)) \mid \begin{cases} \dot{\xi}(t) = F[t, \xi(t)] \\ \xi(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad \forall t \in I(t_0),$

essendo $I(t_0) \subseteq [t_1, t_2]$ un intorno di t_0 .

Osservazione 5 Il teorema 4 garantisce l'esistenza della soluzione localmente, ovvero in un intorno di t_0 contenuto in $[t_1, t_2]$.

Illustriamo quanto detto considerando l'equazione differenziale:

$$\dot{x} = -x^2t \tag{2.7}$$

per cui $F(t, x) = -x^2t \implies F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pertanto è verificata l'ipotesi del Teorema di esistenza. Conseguentemente, comunque prendiamo $(t_0, x_0) \in \overset{\circ}{D} = \mathbb{R}^2$, esiste, in un opportuno intorno I di t_0 , la soluzione del problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = -x^2t \\ x(t_0) = x_0 \neq 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Per verificare tale asserzione, integriamo innanzitutto la (2.7) per separazione di variabili (cfr. Appendice § B.1), ottenendo:

$$x(t, C) = \frac{2}{t^2 + C}$$

Deve essere:

$$x(t_0, C) = x_0,$$

cioè

$$\frac{2}{t^2 + C} = x_0,$$

da cui l'unico valore della costante di integrazione

$$C_0 = \frac{2}{x_0} - t_0^2, \tag{2.9}$$

che individua l'integrale particolare risolvete il problema di Cauchy assegnato. Più precisamente:

$$\xi(t) = x(t, C_0) = \frac{2x_0}{(t^2 - t_0^2)x_0 + 2} \tag{2.10}$$

Se $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ sono tali che $t_0^2 - \frac{2}{x_0^2} > 0$, la funzione (2.10) è definita in $\mathbb{R} - \left\{ \pm \sqrt{t_0^2 - \frac{2}{x_0}} \right\}$. In tal caso riesce:

$$I(t_0) = \begin{cases} \left(\sqrt{t_0^2 - \frac{2}{x_0}}, +\infty \right), & \text{se } t_0^2 - \frac{2}{x_0^2} > 0 \text{ e } x_0 > 0 \\ \left(-\sqrt{t_0^2 - \frac{2}{x_0}}, +\sqrt{t_0^2 - \frac{2}{x_0}} \right), & \text{se } x_0 < 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Un andamento tipico per $t_0^2 - \frac{2}{x_0^2} > 0$ e $x_0 > 0$ è riportato in fig. 2.1.

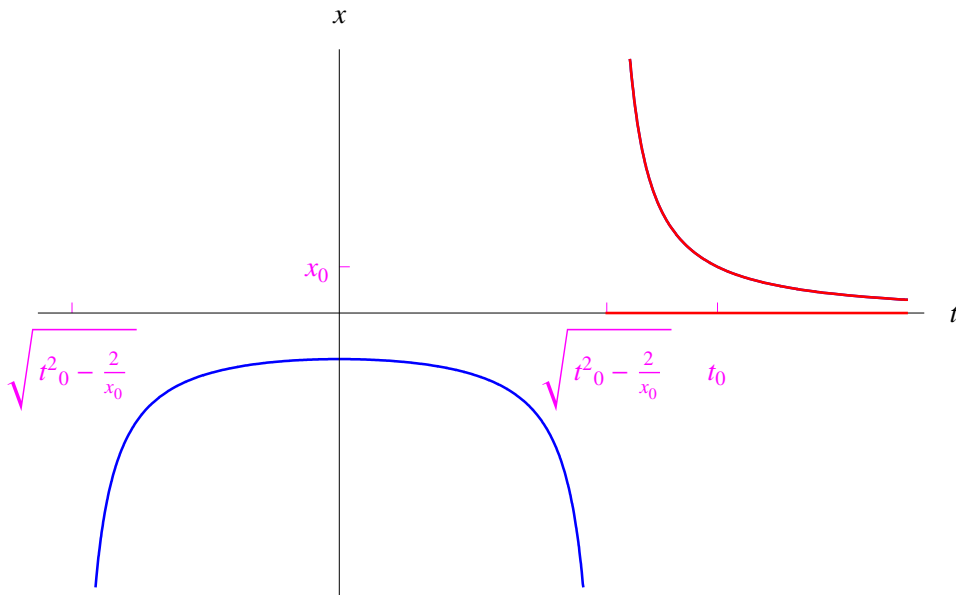


Figura 2.1: La curva in rosso è il grafico della soluzione del problema di Cauchy (2.8) per $t_0 = 2$ e $x_0 = 1$. L'altro ramo (curva in blu) non è accettabile, poichè deve essere $\xi(t) \in C^1(I(t_0))$.

Per $x_0 < 0$ un tipico andamento è illustrato in fig. 2.2.

Notiamo, infine, che la soluzione del problema di Cauchy (2.8) è unica:

$$\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2, \exists! \xi(t) = \frac{2x_0}{(t^2 - t_0^2)x_0 + 2} \mid \begin{cases} \dot{\xi}(t) = -t\xi(t)^2 \\ \xi(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in I(t_0), \tag{2.12}$$

dove $I(t_0)$ è dato dalla (2.11). Tuttavia, il Teorema 4 non garantisce l'unicità della soluzione del problema (2.6). Ciò perchè la continuità della funzione F è condizione necessaria ma non sufficiente

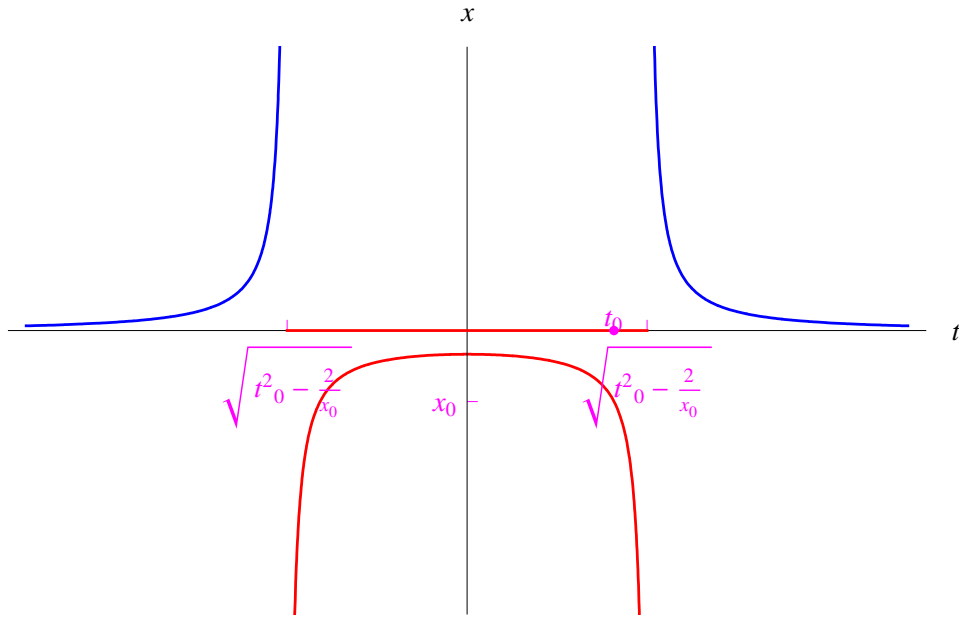


Figura 2.2: La curva in rosso è il grafico della soluzione del problema di Cauchy (2.8) per $t_0 = 2$ e $x_0 = -1$. L'altro ramo (curva in blu) non è accettabile, poichè deve essere $\xi(t) \in C^1(I(t_0))$.

per l'unicità della soluzione. Ad esempio, mostriamo che il seguente problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = 4t\sqrt{x} \\ x(t_0) = x_0 > 0 \end{cases}, \quad (2.13)$$

ha più soluzioni. In (2.13) l'equazione differenziale è del tipo $\dot{x} = F(t, x)$ dove $F(t, x) = 4t\sqrt{x}$. Tale funzione è definita in:

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < t < +\infty, 0 \leq x < +\infty\} \\ = \mathbb{R} \times [0, +\infty),$$

che è il semipiano $x \geq 0$ del piano cartesiano tx , e la funzione è ivi continua. Pertanto è verificata l'ipotesi del Teorema di esistenza. Conseguentemente, comunque prendiamo $(t_0, x_0) \in \mathring{D} = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, esiste, in un opportuno intorno I di t_0 , la soluzione del problema di Cauchy (2.13). Integrando per separazione di variabili otteniamo l'integrale generale:

$$x(t, C) = (t^2 + C)^2$$

Deve essere

$$x(t_0, C) = x_0 \quad (2.14)$$

Cioè:

$$C_{\pm} = -t_0^2 \pm \sqrt{x_0} \quad (2.15)$$

Ne consegue che il problema di Cauchy (2.13) ammette due soluzioni:

$$\xi_{\pm}(t) = \xi(t, C_{\pm}) = (t^2 - t_0^2 \pm \sqrt{x_0})^2 \quad (2.16)$$

Ciò implica:

$$\forall (t_0, x_0) \in \mathring{D}, \exists \xi_{\pm}(t) = (t^2 - t_0^2 \pm \sqrt{x_0})^2 \mid \begin{cases} \dot{\xi}_{\pm}(t) = 4t\sqrt{\xi_{\pm}(t)} \\ \xi_{\pm}(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ad esempio, per $t_0 = 2$, $x_0 = 1$:

$$\xi_+(t) = (t^2 - 3)^2, \quad \xi_-(t) = (t^2 - 5)^2,$$

il cui grafico è riportato in fig. (2.3). Risulta:

$$(2, 1) \in \dot{D} \implies \exists \xi_+(t) = (t^2 - 3)^2, \quad \xi_-(t) = (t^2 - 5)^2 \mid \begin{cases} \dot{\xi}_\pm(t) = 4t\sqrt{\xi_\pm(t)} \\ \xi_\pm(2) = 1 \end{cases}$$

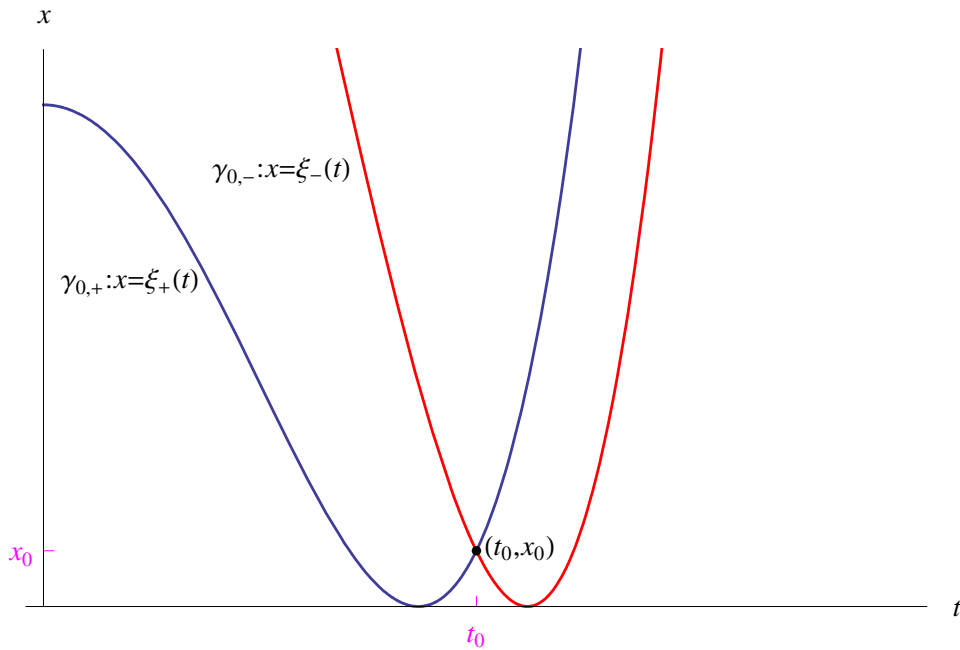


Figura 2.3: Grafico delle due soluzioni del problema di Cauchy (2.13) per $t_0 = 2$ e $x_0 = 1$.

Congettura 6 *La non unicità della soluzione del problema di Cauchy (2.13) è dovuta alla non continuità della derivata $F_x(t, x)$ in D .*

Infatti, $F_x(t, x) = 2tx^{-1/2}$ ha una singolarità in $(t, 0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, i.e. in ogni punto dell'asse t . Pertanto, l'insieme delle singolarità di F_x è:

$$S = \{(t, x) \in \mathbb{R} \mid -\infty < t < +\infty, x = 0\}$$

Risulta $S \subset D$, per cui la funzione F_x è continua in $D - S$ ma non in D . In realtà la condizione di continuità della derivata parziale $F_x(t, x)$ è sovrabbondante. Per enunciare una condizione più debole in grado comunque di garantire l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (2.4) premettiamo la seguente definizione:

Definizione 7 (Condizione di Lipschitz)

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ verifica} \\ \text{la condizione di Lipschitz} \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \alpha > 0 \mid |f(x') - f(x'')| \leq \alpha |x' - x''|, \quad \forall x', x'' \in X \quad (2.17)$$

Il numero reale positivo α si dice **coefficiente di Lipschitz**.

Le funzioni che verificano la condizione (2.17) si dicono *lipschitziane*. Sussiste il seguente teorema per la cui dimostrazione rimandiamo a [2].

Teorema 8

$$f \text{ è lipschitziana in } X \implies f \text{ è uniformemente continua in } X$$

Osservazione 9 La condizione di Lipschitz (2.17) si può scrivere come:

$$\left| \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} \right| \leq \alpha, \quad \forall x', x'' \in X, \quad (x' \neq x'')$$

In altri termini, una funzione lipschitziana f ha i rapporti incrementali limitati.

Teorema 10 (Teorema di esistenza ed unicità o di Cauchy-Lipschitz)

Sia dato il problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{2.18}$$

dove $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, essendo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $D = [t_1, t_2] \times (-\infty, +\infty)$.

Hp. La funzione F è continua in D ed è lipschitziana rispetto alla variabile x . Cioè, per un assegnato $t \in [t_1, t_2]$:

$$\exists \alpha > 0 \mid |F(t, x') - F(t, x'')| \leq \alpha |x' - x''|, \quad \forall x', x'' \in (-\infty, +\infty)$$

Th. $\forall (t_0, x_0) \in \overset{\circ}{D}$, $\exists! \xi(t) \in C^1(I(t_0)) \mid \begin{cases} \dot{\xi}(t) = F[t, \xi(t)] \\ \xi(t_0) = x_0 \end{cases}$, $\forall t \in I(t_0)$,

essendo $I(t_0) \subseteq [t_1, t_2]$ un intorno di t_0 .

In altri termini, una condizione *sufficiente* per l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy (2.4), è che $F(t, x)$ sia lipchitziana rispetto alla variabile x .

2.2 Sistemi autonomi

Definizione 11 Un sistema dinamico si dice **autonomo** se la funzione F non dipende esplicitamente dal tempo. Cioè, se:

$$\dot{x} = F(x) \tag{2.19}$$

Per un sistema autonomo l'insieme di punti (2.3) si riduce all'insieme X di definizione di $F(x)$, per cui il problema di Cauchy (2.4) diventa:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.20}$$

Per tale classe di sistemi dinamici, il teorema 10 si enuncia:

Teorema 12 (Teorema di esistenza ed unicità o di Cauchy-Lipschitz)

Hp. $F(x)$ è lipschitziana

Th. $\forall (t_0, x_0) \in \overset{\circ}{D}$, $\exists! \xi(t) \in C^1(I(t_0)) \mid \begin{cases} \dot{\xi}(t) = F[\xi(t)] \\ \xi(t_0) = x_0 \end{cases}$, $\forall t \in I(t_0)$,

essendo $I(t_0) \subseteq [t_1, t_2]$ un intorno di t_0 .

2.3 Sistemi lineari

Definizione 13 Un sistema dinamico $\dot{x} = F(t, x)$ si dice **lineare** se la funzione F è lineare in x . Cioè, se:

$$\dot{x} = \alpha(t)x + \beta(t), \quad (2.21)$$

dove $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono funzioni definite in $[t_1, t_2]$ se F è definita in $[t_1, t_2] \times X$. In particolare, se il sistema è autonomo:

$$\dot{x} = \alpha_0 x + \beta_0, \quad \alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{con } \alpha_0 \neq 0 \quad (2.22)$$

In altri termini, l'equazione differenziale che determina l'evoluzione temporale di un sistema lineare autonomo è lineare e a coefficienti costanti.

Se $\beta_0 = 0$ il sistema

$$\dot{x} = \alpha_0 x$$

si dice autonomo, lineare ed omogeneo.

Proposizione 14 Un sistema autonomo lineare è deterministico.

Dimostrazione.

$$F(x) = \alpha_0 x + \beta_0, \quad x \in X \implies F \in C^\infty([y_1, y_2]),$$

per cui è sovrabbondantemente verificata l'ipotesi del Teorema di esistenza ed unicità. ■

Nel caso di un sistema lineare ma non autonomo, sussiste la proposizione:

Proposizione 15

$$\alpha(t), \beta(t) \in C^0([t_1, t_2]) \implies \left(\begin{array}{l} \text{il sistema dinamico lineare } \dot{x} = \alpha(t)x + \beta(t) \\ \text{è deterministico} \end{array} \right)$$

Dimostrazione. La continuità di $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ in $[t_1, t_2]$ garantisce la continuità di $F(t, x) = \alpha(t)x + \beta(t)$ in $D = [t_1, t_2] \times X$. Inoltre, riesce continua in D la derivata parziale $F_x(t, x) = \alpha(t)$, per cui F è lipschitziana rispetto alla variabile x . Per il teorema 10 segue che comunque prendiamo $(t_0, u_0) \in \overset{\circ}{D}$, esiste (localmente) una ed una sola soluzione del corrispondente problema di Cauchy associato al sistema dinamico $\dot{x} = \alpha(t)x + \beta(t)$. ■

I sistemi dinamici lineari hanno un *costo computazionale* minimo, nel senso che la loro integrazione è immediata. Infatti, applichiamo il procedimento standard di integrazione di un'equazione differenziale lineare [3].

$$\dot{x} = \alpha(t)x + \beta(t) \quad (2.23)$$

assumendo che $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ siano funzioni continue in $[t_1, t_2]$ si ha che il *fattore integrante* è:

$$I(t) = e^{-\int \alpha(t) dt}$$

Moltiplichiamo primo e secondo membro³ della (2.23) per $I(t)$:

$$xe^{-\int \alpha(t) dt} = \alpha(t)xe^{-\int \alpha(t) dt} + \beta(t)e^{-\int \alpha(t) dt} \iff \frac{d}{dt} \left[xe^{-\int \alpha(t) dt} \right] = \beta(t)e^{-\int \alpha(t) dt}$$

³Operazione lecita, in quanto è $I(t) \neq 0, \forall t \in [t_1, t_2]$.

Integrando primo e secondo membro dell'ultima equazione:

$$x(t, C) e^{-\int \alpha(t) dt} = \int \beta(t) e^{-\int \alpha(t) dt} dt + C,$$

avendo incorporato nella costante C i valori delle costanti generate dall'integrazione indefinita a primo e secondo membro. Quindi:

$$x(t, C) = \left[\int \beta(t) e^{-\int \alpha(t) dt} dt + C \right] e^{\int \alpha(t) dt} \quad (2.24)$$

La (2.24) è l'integrale generale dell'equazione differenziale (2.23). Dall'ipotesi di continuità di $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ in $[t_1, t_2]$, segue dalla proposizione 15 che il sistema dinamico $\dot{x} = \alpha(t)x + \beta(t)$ è deterministico, i.e. il problema di Cauchy

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = \alpha(t)x + \beta(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (2.25)$$

ammette una ed una sola soluzione. Ciò equivale a dire:

$$\exists! C_0 \in \mathbb{R} \mid x(t_0, C_0) = x_0$$

Risolviendo l'equazione $x(t_0, C_0) = u_0$ si ottiene C_0 e quindi l'integrale particolare che risolve il problema di Cauchy:

$$\xi(t) = \left[\int \beta(t) e^{-\int \alpha(t) dt} dt + C_0 \right] e^{\int \alpha(t) dt}$$

Consideriamo il caso particolare di un sistema autonomo lineare, onde (2.25) si scrive:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = \alpha_0 x + \beta_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Senza perdita di generalità, supponiamo che $F(x) = \alpha_0 x + \beta_0$ sia definita in $X = (-\infty, +\infty)$. L'integrale generale si ottiene dalla (2.24):

$$x(t, C) = C e^{\alpha_0 t} - \frac{\beta_0}{\alpha_0}, \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad (2.27)$$

Geometricamente la (2.27) definisce una famiglia di curve esponenziali ad un parametro. A questo punto siamo in grado di risolvere il problema (2.26). Deve essere:

$$x(t_0, C) = x_0 \iff C e^{\alpha_0 t_0} - \frac{\beta_0}{\alpha_0} = x_0,$$

da cui ricaviamo il valore della costante di integrazione:

$$C_0 = \left(x_0 + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right) e^{-\alpha_0 t_0},$$

che è il valore della costante di integrazione che individua l'unica soluzione del problema di Cauchy (2.26). Sostituendo tale valore nella (2.27):

$$\xi(t) = x(t, C_0) = \left(x_0 + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right) e^{\alpha_0(t-t_0)} - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \quad (2.28)$$

Dalla (2.28) segue:

$$\begin{aligned} \forall (t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2, \exists! \xi(t) \in C^\infty(\mathbb{R}), \\ \xi(t) = \left(x_0 + \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right) e^{\alpha_0(t-t_0)} - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \mid \begin{cases} \dot{\xi}(t) = \alpha_0 \xi(t) + \beta_0 \\ \xi(t_0) = u_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Pertanto, nel caso di un sistema autonomo lineare, il teorema di esistenza ed unicità garantisce l'unicità della soluzione globalmente, i.e. su tutto \mathbb{R} . Inoltre, dalla (2.29) vediamo che la soluzione ha un andamento esponenziale, crescente o decrescente a seconda del segno di $\alpha_0 \neq 0$.

2.4 Lo spazio delle configurazioni

L'evoluzione dinamica di un sistema autonomo (non necessariamente lineare) può essere studiata nello **spazio delle configurazioni**. In generale, assegnato un sistema autonomo di ordine n , i.e. un'equazione differenziale di ordine n in⁴ $y(t)$:

$$x^{(n)} = F(x, x', \dots, x^{(n-1)}), \quad (2.30)$$

con $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, essendo $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Il problema di Cauchy si formula nel seguente modo:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^{(n)} = F(x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = u_0, \quad x'(t_0) = u_1, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \end{cases}, \quad (2.31)$$

mentre il teorema di esistenza ed unicità:

Teorema 16 (Teorema di esistenza ed unicità)

Hp. F è lipschitziana rispetto alle variabili $x, x', \dots, x^{(n-1)}$.

Th. $\forall (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \exists! \xi(t) \in C^1(I) \mid \xi(t)$ risolve \mathcal{P} in un intorno I di t_0 .

Lo spazio delle configurazioni del sistema (2.30) è:

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, x', \dots, x^{(n)}) \mid -\infty < x^{(k)} < +\infty, \quad k = 0, 1, \dots, n\}, \quad (2.32)$$

ovvero lo spazio euclideo $n+1$ -dimensionale. Sugli assi coordinati riportiamo le grandezze $x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}$. Nel nostro caso è $n = 1$, onde lo spazio delle fasi è:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, \dot{x}) \mid -\infty < x, \dot{x} < +\infty\},$$

cioè il piano cartesiano sui cui assi coordinati riportiamo le grandezze x e \dot{x} . Inoltre è $\dot{x} = F(x)$ con F definita in $D \stackrel{\text{def}}{=} X \subseteq \mathbb{R}$, per cui è definito il seguente sottoinsieme di \mathbb{R}^2 :

$$\Gamma(F) = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, \quad \dot{x} = F(x)\}, \quad (2.33)$$

cioè la curva piana di equazione $\dot{x} = F(x)$ che è il diagramma cartesiano della funzione reale F della variabile reale x . Sussiste la seguente definizione:

⁴Per ovvi motivi quando $n > 2$, utilizziamo la notazione apicale per le derivate, avendosi:

$$x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$$

Definizione 17 Il luogo geometrico (2.33) è la regione dello spazio delle configurazioni **accessibile** al sistema dinamico $\dot{x} = F(x)$.

Nel caso particolare di un sistema dinamico autonomo deterministico, la regione (2.33) è una curva continua e liscia⁵, Per essere più precisi è una curva *regolare* (nel senso della geometria differenziale).

Nel caso speciale di un sistema autonomo lineare $\Gamma(F)$ è la retta di equazione⁶ $\dot{x} = \alpha_0 x + \beta_0$.

È istruttivo esaminare gli ordini superiori al primo. Ad esempio, per un sistema autonomo del secondo ordine:

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}), \quad (2.34)$$

con $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, dove $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Lo spazio delle configurazioni del sistema (2.34) è:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, \dot{x}, \ddot{x}) \mid -\infty < x, \dot{x}, \ddot{x} < +\infty\},$$

cioè lo spazio ordinario sui cui assi coordinati riportiamo le grandezze x, \dot{x}, \ddot{x} . La regione dello spazio delle fasi accessibile al sistema (2.34) è:

$$\Gamma(F) = \{(x, \dot{x}, \ddot{x}) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, \dot{x}) \in D, \ddot{x} = F(x, \dot{x})\}, \quad (2.35)$$

cioè la superficie di equazione $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$. Se F verifica le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità e D è un dominio internamente connesso, segue che $\Gamma(F)$ è una superficie regolare.

Infine, la regione dello spazio delle configurazioni accessibile a un sistema autonomo di ordine n è:

$$\Gamma(F) = \{(x, x', \dots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x, x', \dots, x^{(n-1)}) \in D, x^{(n)} = f(x, x', \dots, x^{(n-1)})\},$$

cioè l'ipersuperficie di equazione $x^{(n)} = F(x, x', \dots, x^{(n-1)})$. Se F verifica le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità e D è un dominio internamente connesso, segue che $\Gamma(F)$ è una ipersuperficie regolare.

Applichiamo tali nozioni ai sistemi autonomi (del primo ordine) distinguendo i due casi $\beta_0 = 0$ e $\beta_0 \neq 0$.

2.5 Caso omogeneo ($\beta_0 = 0$)

La (2.28) si scrive:

$$\xi(t) = x_0 e^{\pm \frac{t}{\tau_c}} = \begin{cases} x_0 e^{\frac{t}{\tau_c}}, & \text{se } \alpha_0 > 0 \\ x_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}}, & \text{se } \alpha_0 < 0 \end{cases}, \quad (2.36)$$

dove abbiamo assunto $t_0 = 0$ e definito la grandezza $\tau_c = |\alpha_0|^{-1}$ avente le dimensioni di un tempo⁷. Dalla (2.36) (e, più in generale dalla (2.28)) vediamo che τ_c è un tempo caratteristico del sistema, nel senso che fissa la scala dei tempi. Per tale ragione τ_c è la *costante di tempo* del sistema medesimo. Abbiamo, dunque, una *crescita esponenziale* per $\alpha_0 > 0$ e una *decrescita esponenziale* per $\alpha_0 < 0$. Nelle figg. 2.4-2.5 sono riportati i due casi (assumendo $x_0 > 0$).

⁵Cioè priva di interruzioni e di punti angolosi/cuspidali.

⁶Supponendo che $F(x) = \alpha_0 x + \beta_0$ sia definita in \mathbb{R} . Diversamente, cioè se è definita in $X \subset \mathbb{R}$ la regione dello spazio delle fasi accessibile al sistema è l'insieme di punti:

$$\{(y, \dot{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, \dot{y} = \alpha_0 y + \beta_0\},$$

che si identifica con un segmento della retta $\dot{x} = \alpha_0 x + \beta_0$ se X è un intervallo.

⁷Ricordiamo, tuttavia, che abbiamo assunto le grandezze x, t adimensionali.

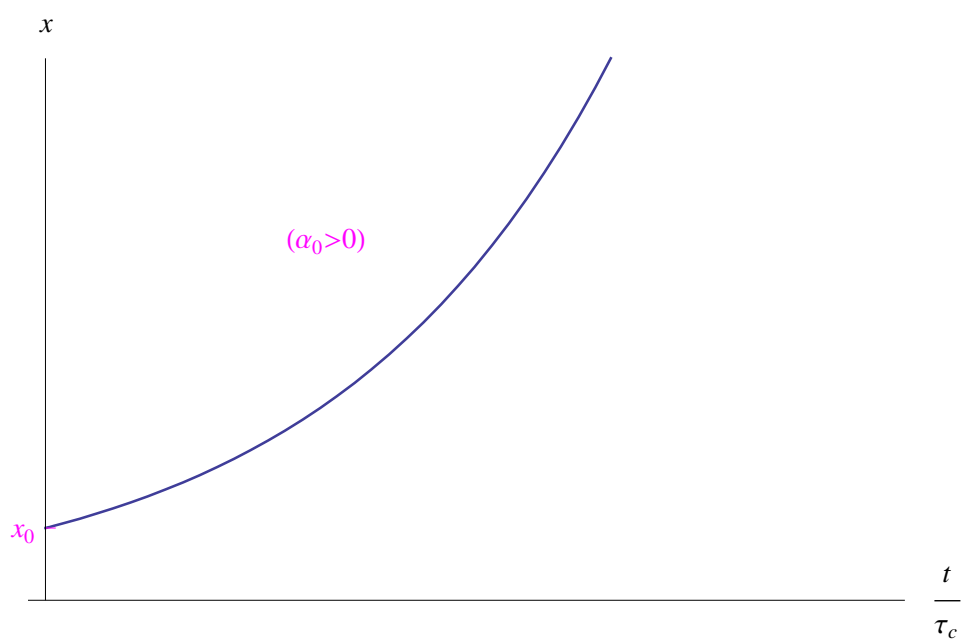


Figura 2.4: Andamento della soluzione (2.36) per $\alpha_0 > 0$ in funzione di $\frac{t}{\tau_c}$.

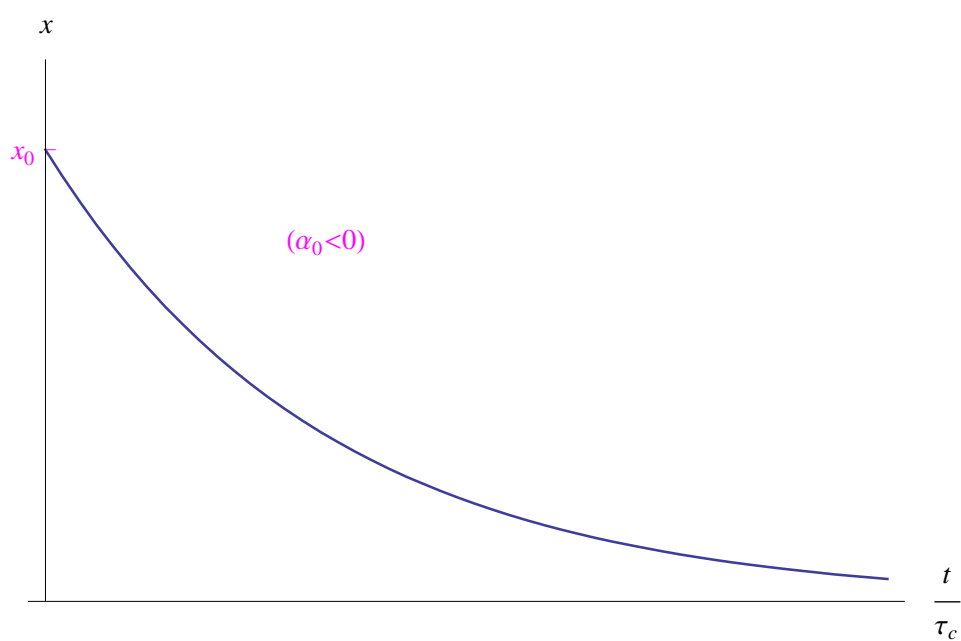


Figura 2.5: Andamento della soluzione (2.36) per $\alpha_0 < 0$ in funzione di $\frac{t}{\tau_c}$.

La regione dello spazio delle configurazioni accessibile per il sistema autonomo lineare ed omogeneo $\dot{x} = \alpha_0 x$ è:

$$\Gamma(F) = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \leq x < +\infty, \dot{x} = \alpha_0 x\},$$

come illustrato nelle figg. 2.6-2.7.

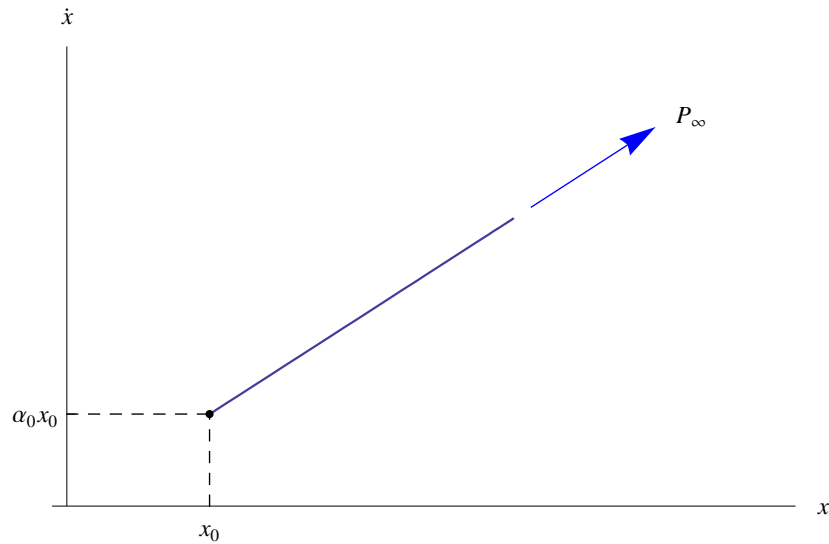


Figura 2.6: Regione dello spazio delle configurazioni accessibile al sistema autonomo lineare ed omogeneo $\dot{x} = \alpha_0 x$ nel caso $\alpha_0 > 0$. Il sistema evolve deterministicamente a partire dallo stato iniziale $(x_0, \alpha_0 x_0)$.

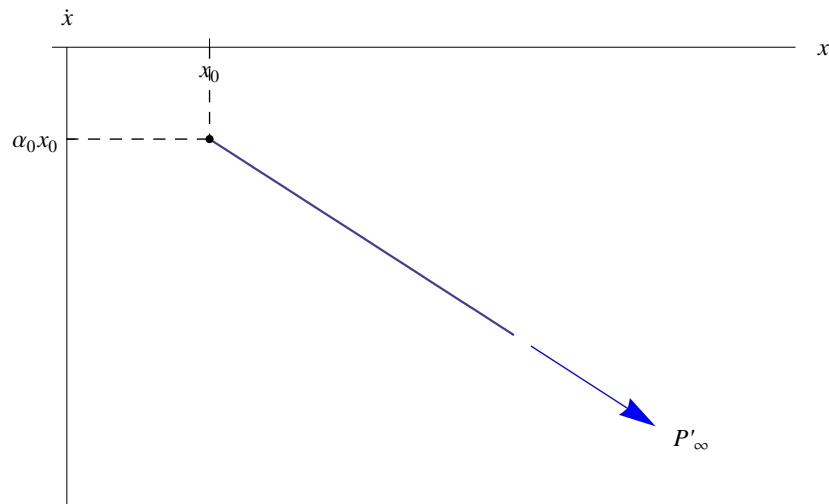


Figura 2.7: Regione dello spazio delle fasi accessibile al sistema autonomo lineare ed omogeneo $\dot{x} = \alpha_0 x$ nel caso $\alpha_0 < 0$. Il sistema evolve deterministicamente a partire dallo stato iniziale $(x_0, \dot{x}_0 = \alpha_0 x_0)$.

In entrambi i casi $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_0 < 0$, il sistema evolve deterministicamente a partire dallo stato iniziale (x_0, \dot{x}_0) , essendo $\dot{x}_0 = \alpha_0 x_0$, i.e. il valore assunto dalla derivata prima di $x(t)$ a $t_0 = 0$. In simboli:

$$(x_0, \dot{x}_0) \xrightarrow{\text{evoluzione deterministica}} \begin{cases} P_\infty, & \text{se } \alpha_0 > 0 \\ P'_\infty, & \text{se } \alpha_0 < 0 \end{cases}, \quad (2.37)$$

dove:

$$P_\infty \stackrel{def}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \dot{x} \rightarrow +\infty}} (x, \dot{x}), \quad P'_\infty \stackrel{def}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \dot{x} \rightarrow -\infty}} (x, \dot{x})$$

2.6 Caso non omogeneo ($\beta_0 \neq 0$)

Come vedremo in seguito, il caso di interesse fisico è $\alpha_0 < 0$, $\beta_0 > 0$, $x_0 = 0$, onde la (2.28) si scrive:

$$\xi(t) = \frac{\beta_0}{|\alpha_0|} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}\right), \quad (2.38)$$

cioè la *salita esponenziale*. Tale denominazione è giustificata dall'andamento del grafico della soluzione (2.38) riportato in fig.2.8.

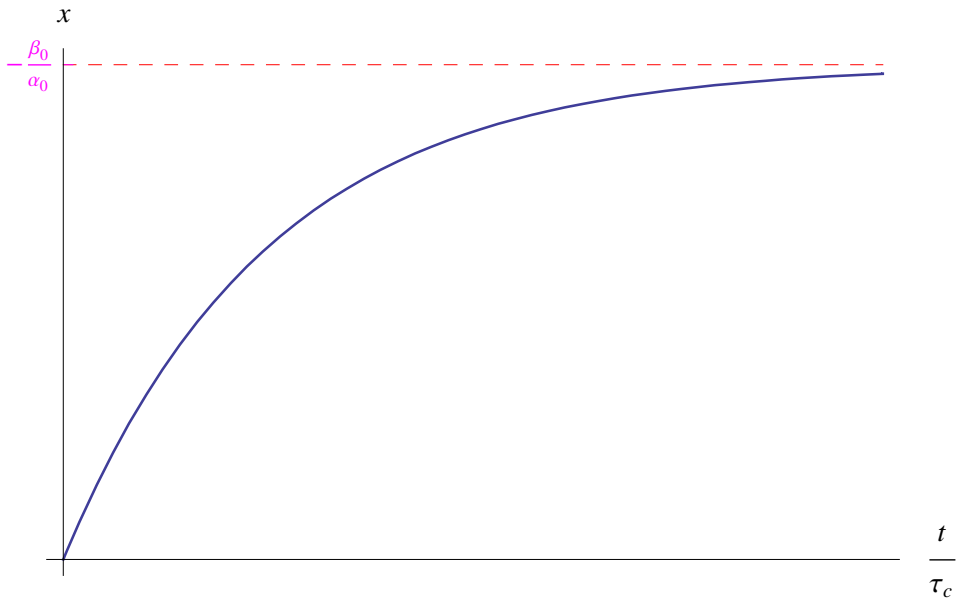


Figura 2.8: Andamento della soluzione $\xi(t) = \frac{\beta_0}{|\alpha_0|} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}\right)$ in funzione di $\frac{t}{\tau_c}$.

Il comportamento di tale sistema dinamico si esplica, dunque, attraverso un *transitorio* seguito da una fase di regime. La scala dei tempi del transitorio è fissata dalla costante di tempo τ_c , poichè:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = \frac{\beta_0}{|\alpha_0|} \stackrel{def}{=} \xi_M$$

Quindi:

$$\xi(t) = x_M \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}\right) \quad (2.39)$$

Conseguentemente:

$$\xi(t \gg \tau_c) \simeq x_M$$

Per discutere il comportamento nel limite opposto ($t \ll \tau_c$) è conveniente normalizzare la funzione (2.39) sul valore x_M , dopo aver eseguito il cambio di variabile $t(x) = \tau_c x$:

$$g(x) = 1 - e^{-x}, \quad (2.40)$$

avendo definito la funzione composta $g(x) \stackrel{def}{=} \frac{\xi[t(x)]}{x_M} = \frac{\xi(\tau_c x)}{x_M}$. La (2.40) è una salita esponenziale universale, ossia indipendente dai valori di α_0 , β_0 . Per $t \in (0, \Delta)$ con $\Delta \ll \tau_c$ è $x \in (0, \delta)$ con

$\delta = \frac{\Delta}{\tau_c} \ll 1$. Ciò ci consente di sviluppare la funzione (2.40) in serie di Taylor troncata al secondo ordine, ottenendo:

$$g(x) \simeq x - \frac{x^2}{2}, \quad x \in (0, \delta) \tag{2.41}$$

Per tempi “brevissimi”, cioè per $t \rightarrow 0$ troviamo il comportamento lineare (serie di Taylor troncata al primo ordine):

$$g(x) \simeq x \tag{2.42}$$

In fig. 2.9 riportiamo i tre casi (2.40)-(2.41)-(2.42). Ne consegue che per tempi brevi, la grandezza x aumenta linearmente in funzione del tempo.

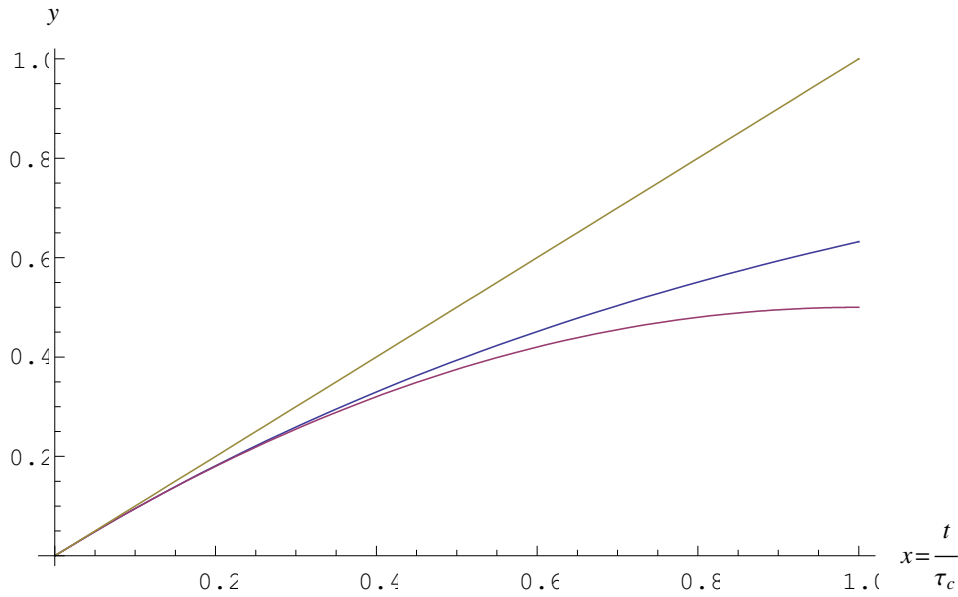


Figura 2.9: Andamento della salita esponenziale universale $g(x) = 1 - e^{-x}$ (curva blu) con le corrispondenti serie di Taylor troncate al secondo (termine quadratico) e al primo ordine rispettivamente (termine lineare).

Ricapitolando, l’unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = -|\alpha_0|x + \beta_0 \\ x(0) = 0 \end{cases},$$

con $\beta_0 > 0$, è la funzione (2.38). Discutiamo ora il comportamento nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^2 = \{(x, \dot{x}) \mid -\infty < x, \dot{x} < +\infty\}$. La regione accessibile al sistema è

$$\Gamma(F) = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < x_M, \dot{x} = -|\alpha_0|x + \beta_0\},$$

cioè il segmento di retta la cui equazione è $\dot{x} = -|\alpha_0|x + \beta_0$, e avente per estremi i punti $(0, \beta_0)$, $(x_M, 0)$, come illustrato in fig. 2.10.

Ne consegue che il sistema evolve a partire dallo stato iniziale $(0, \beta_0)$ convergendo asintoticamente e deterministicamente allo stato finale $(y_M, 0)$. In simboli:

$$(0, \beta_0) \xrightarrow{\text{evoluzione deterministica}} (x_M, 0)$$

Abbiamo una convergenza asintotica giacchè lo stato finale $(x_M, 0)$ è raggiunto nel limite per $t \rightarrow +\infty$. In simboli:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x, \dot{x}) = (x_M, 0) \tag{2.43}$$

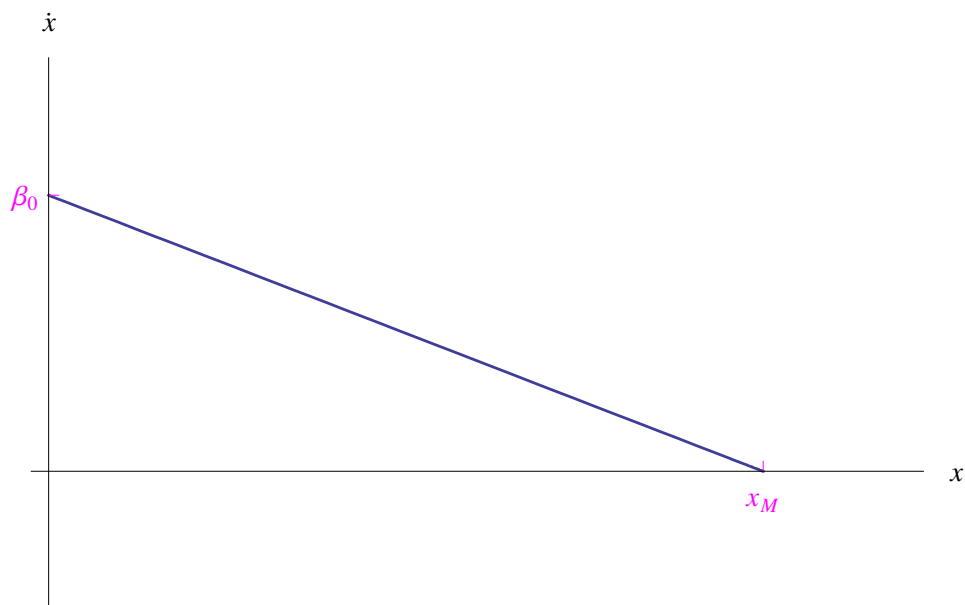


Figura 2.10: Per il sistema autonomo lineare $\dot{x} = -|\alpha_0|x + \beta_0$, la regione dello spazio delle configurazioni accessibile è il segmento di estremi $(0, \beta_0)$, $(x_M, 0)$.

Capitolo 3

Macchine ricorsive

3.1 Il metodo di Eulero

L'analisi svolta nel capitolo precedente mostra l'esistenza di due paradigmi alternativi per lo studio dei sistemi dinamici autonomi.

1. Analisi nel dominio del tempo.

Si tratta dell'approccio tradizionale basato sulle equazioni differenziali. Si integra l'equazione $\dot{x} = f(x)$, studiando la soluzione $x(t)$ quale funzione reale della variabile reale t .

2. Analisi nel dominio delle configurazioni.

L'evoluzione del sistema viene studiata esaminando il "moto" del punto rappresentativo (x, \dot{x}) lungo la curva $\Gamma(F)$.

Per studiare il sistema nel dominio delle configurazioni, dobbiamo esaminare come si sposta il punto (x, \dot{x}) su $\Gamma(F)$. Il punto iniziale è (x_0, \dot{x}_0) e per stabilire le posizioni successive dobbiamo procedere per "passi discreti". Ciò può essere fatto discretizzando la variabile continua t . A tale scopo riprendiamo il problema di Cauchy (2.20)

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Assumendo F definita in $[x_0, +\infty)$ si ha che la regione accessibile al sistema è:

$$\Gamma(F) = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \leq x < +\infty, \dot{x} = F(x)\}, \quad (3.2)$$

come illustrato in fig. 3.1.

Osserviamo che nel diagramma di fig. 3.1 il tempo t non compare. Ciò perchè $\dot{x} = F(x)$ anzichè essere vista come un'equazione differenziale che lega la derivata prima $\frac{d}{dt}x(t)$ alla funzione $x(t)$, è interpretata alla stregua dell'equazione di un luogo geometrico nel piano cartesiano $Ox\dot{x}$. Naturalmente nulla ci impedisce di costruire una successione di stati a partire dallo stato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (x_0, F(x_0))$:

$$\{(x_n, \dot{x}_n)\}_{n \in \mathbb{N}} : (x_0, \dot{x}_0), (x_1, \dot{x}_1), (x_2, \dot{x}_2), \dots, (x_n, \dot{x}_n), \dots \quad (3.3)$$

come rappresentato in fig. 3.2.

Tuttavia la (3.3) non fornisce informazioni su come il punto $(x, \dot{x}) = (x, F(x))$ si sposta lungo la curva (3.2). Ciò che ci occorre è la legge che permette di passare dallo stato (x_n, \dot{x}_n) allo stato

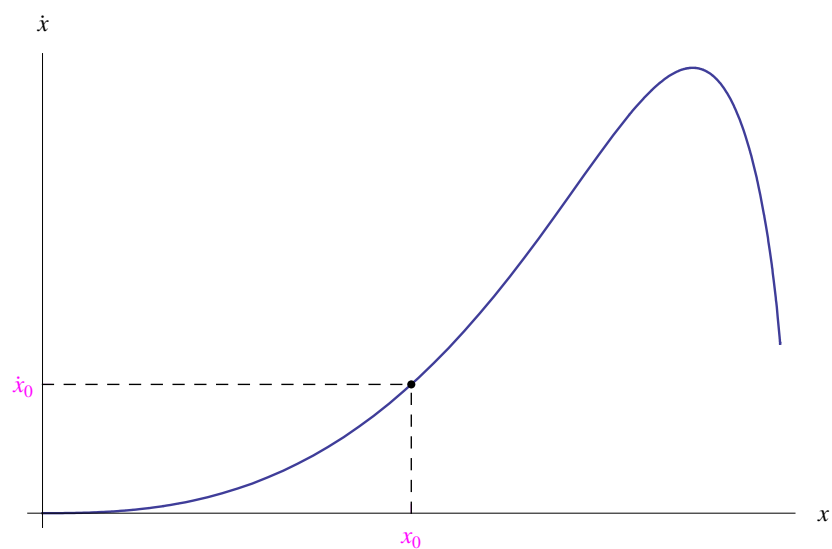


Figura 3.1: Regione dello spazio delle configurazioni accessibile al sistema autonomo $\dot{x} = F(x)$. Il sistema evolve dallo stato iniziale rappresentato dal punto $P_0(x_0, \dot{x}_0 = F(x_0))$.

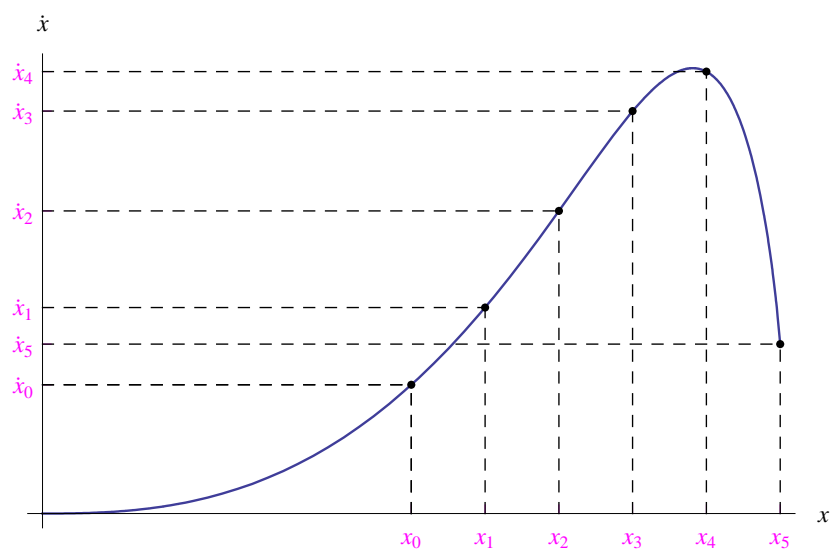


Figura 3.2: Una possibile successione di stati del sistema dinamico autonomo $\dot{x} = F(x)$.

successivo (x_{n+1}, \dot{x}_{n+1}) , $\forall n \in \mathbb{N}$. Per ricavare tale legge, osserviamo innanzitutto che l'equazione $\dot{x} = F(x)$ è in realtà la seguente relazione funzionale:

$$\frac{d}{dt}x(t) = F[x(t)], \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (3.4)$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = F[x(t)], \quad t \in [t_0, +\infty) \quad (3.5)$$

Appare chiaro, allora, che per generare una successione di stati del tipo (3.3) è necessario discretizzare la variabile t . Matematicamente ciò si traduce nell'eseguire una decomposizione dell'intervallo $[t_0, +\infty)$ che denotiamo con $\mathcal{D}(t_0, t_1, \dots, t_N)$. A tale scopo prendiamo arbitrariamente N istanti $t_1, t_2, \dots, t_N \in (t_0, +\infty)$ tali che

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N, \quad N \in \mathbb{N} - \{0\} \quad (3.6)$$

Quindi:

$$[t_0, t_N] = \bigcup_{n=0}^{N-1} [t_n, t_{n+1}]$$

cosicchè:

$$[t_0, +\infty) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \bigcup_{n=0}^{N-1} [t_n, t_{n+1}]$$

Sia Δ la *norma* di $\mathcal{D}(t_0, t_1, \dots, t_N)$, cioè:

$$\Delta = \max_{n \in \mathbb{N}} (t_{n+1} - t_n)$$

Senza perdita di generalità, ci riferiamo alle decomposizioni in cui gli intervalli (t_n, t_{n+1}) hanno la stessa ampiezza, onde:

$$t_{n+1} - t_n = \Delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.7)$$

da cui ricaviamo:

$$t_{n+1} = t_n + \Delta \quad (3.8)$$

Ciò implica:

$$t_n = t_{n-1} + \Delta, \quad (3.9)$$

e quindi:

$$t_{n-1} = t_{n-2} + \Delta,$$

che sostituita nella (3.9) porge:

$$t_n = t_{n-2} + 2\Delta$$

Iterando:

$$t_n = t_0 + n\Delta, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.10)$$

Per Δ "sufficientemente piccolo" possiamo approssimare l'intervallo $[t_0, +\infty)$ con l'insieme numerabile $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$:

$$[t_0, +\infty) \xrightarrow{0 < \Delta \ll 1} \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\},$$

cosicchè:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \simeq \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\Delta}$$

In tale approssimazione, l'equazione differenziale $\dot{x} = F(x)$ diventa:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta} = F(x_n), \quad (3.11)$$

dove $x_n = x(t_n)$. Dalla (3.11) otteniamo:

$$x_{n+1} = f_{\Delta}(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

dove:

$$f_{\Delta}(x) \stackrel{def}{=} x + F(x) \cdot \Delta, \quad (3.13)$$

è una funzione reale della variabile reale x , definita nello stesso insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ di definizione di $F(x)$. La (3.12) rappresenta una soluzione approssimata del problema di Cauchy (3.1). Più precisamente, la (3.12) genera una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di valori approssimati della soluzione di (3.1).

La (3.12) rappresenta la giusta successione di stati attraversati dal sistema durante la sua evoluzione dinamica nel tempo discreto. Dall'Analisi numerica sappiamo che il procedimento appena esposto è il *metodo di Eulero*, un algoritmo utilizzato per l'integrazione numerica di equazioni differenziali del primo ordine.

Esempio 18

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}, \quad (3.14)$$

cioè $F(x) = x$, che è manifestamente lipschitziana, per cui il problema proposto è compatibile e determinato, i.e. ammette una ed una sola soluzione $\xi(t)$. L'integrale generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = x$ è

$$x(t, C) = Ce^t, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

dove C è un'arbitraria costante di integrazione. Deve essere:

$$x(0, C) = 1 \iff C = 1,$$

onde

$$\xi(t) = e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ricerchiamo ora una soluzione approssimata con il metodo di Eulero. Abbiamo:

$$f_{\Delta}(x_n) = x_n(1 + \Delta), \quad (3.15)$$

per cui la (3.12) diventa:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(1 + \Delta), & n = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 = 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

Esplicitiamo alcuni valori:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= x_0(1 + \Delta) = 1 + \Delta \\ x_2 &= x_1(1 + \Delta) = (1 + \Delta)^2 \\ &\dots \\ x_n &= (1 + \Delta)^n, \end{aligned}$$

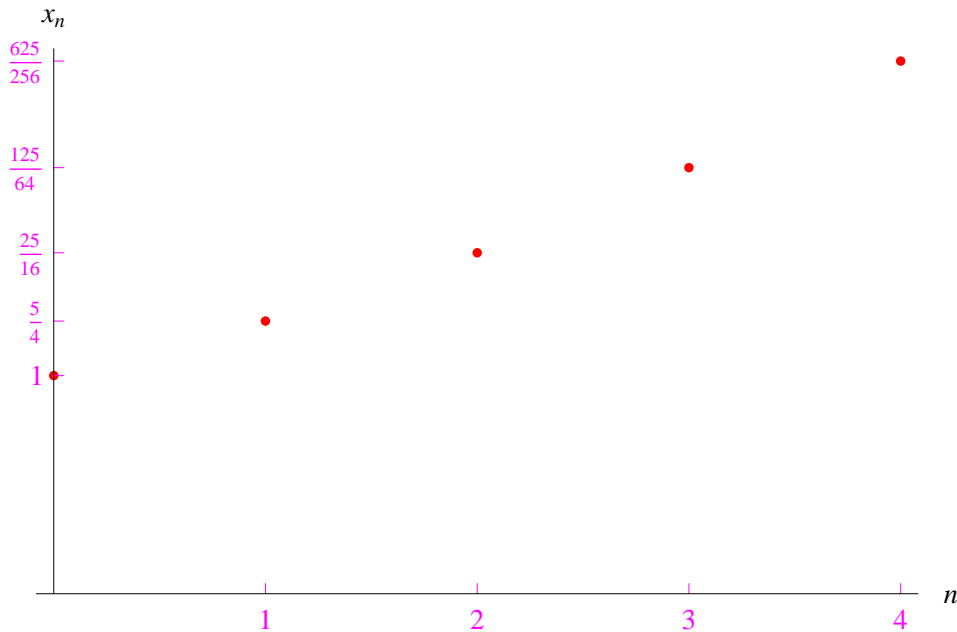


Figura 3.3: In questo grafico riportiamo i valori (3.17) in funzione di n .

cioè la successione $\{x_n\}$ di elementi di \mathbb{R} il cui termine n -esimo è $x_n = (1 + \Delta)^n$. Per $\Delta = \frac{1}{4}$ è $x_n = (\frac{5}{4})^n$. Quindi i primi 4 termini sono:

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{25}{16}, x_3 = \frac{125}{64}, x_4 = \frac{625}{256} \quad (3.17)$$

In fig. 3.3 riportiamo x_n ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) in funzione di n .

Ma a noi interessa x in funzione di $t_n = n\Delta$ e non di n . In fig. (3.4) riportiamo, dunque, x_n in funzione di t_n .

In fig. 3.5 confrontiamo la soluzione esatta $x(t) = e^t$ con quella approssimata.

3.2 Il metodo di König-Lemaray

Riprendiamo l'equazione (3.12)

$$x_{n+1} = f_{\Delta}(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

essendo:

$$f_{\Delta}(x) = x + F(x) \cdot \Delta \quad (3.19)$$

La (3.18) è un'equazione di ricorrenza e definisce l'evoluzione del sistema a tempo discreto che simula il comportamento del sistema a tempo continuo governato dall'equazione differenziale $\dot{x} = F(x)$.

Definizione 19 Chiamiamo **macchina ricorsiva** \mathcal{M}_{Δ} ogni sistema dinamico a tempo discreto associato al sistema dinamico a tempo continuo $\dot{x} = F(x)$. La funzione (3.19) si dice **funzione di trasferimento** di \mathcal{M}_{Δ} e si assume definita in $X \subseteq \mathbb{R}$.

Per quanto precede, per un assegnato sistema a tempo continuo $\dot{x} = F(x)$ esistono infinite macchine ricorsive, ciascuna definita da una norma $\Delta > 0$.

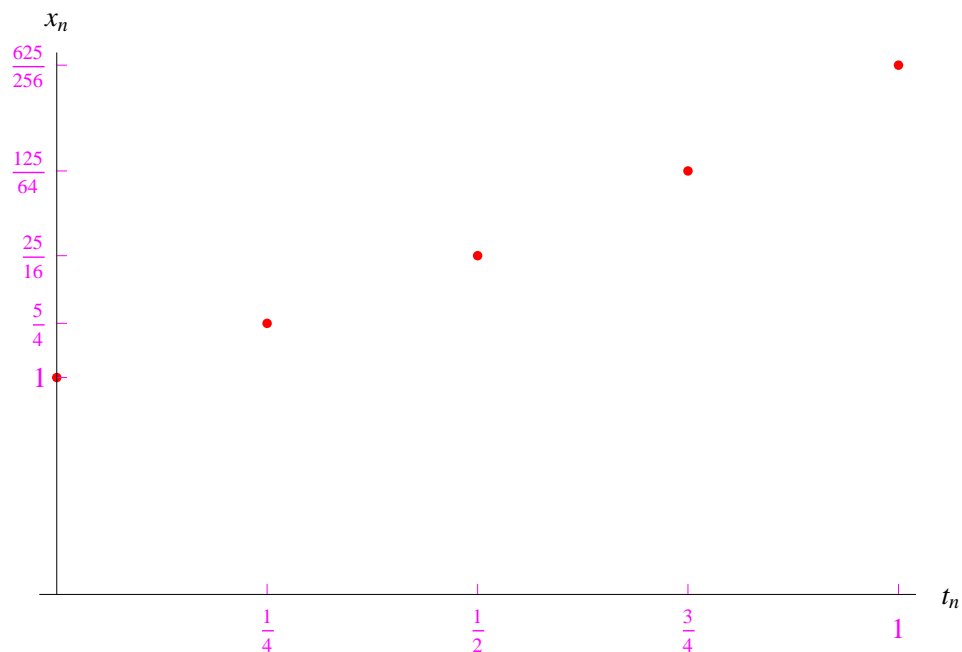


Figura 3.4: In questo grafico riportiamo i valori (3.17) in funzione di $t_n = n\Delta$ per $\Delta = \frac{1}{4}$.

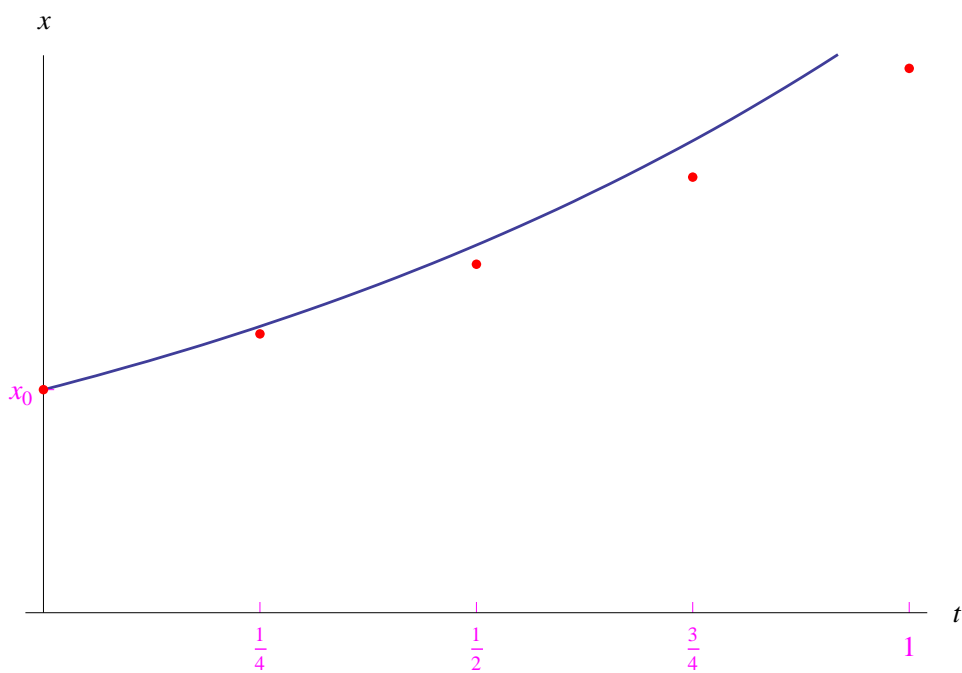


Figura 3.5: Grafico della soluzione approssimata del problema confrontato con la soluzione esatta (3.14)

Assegnato lo stato iniziale $x_0 \in X$, il processo di ricorrenza genera, dunque, una successione $\{x_n\}$ di elementi di \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} x_1 &= f_\Delta(x_0) \\ x_2 &= f_\Delta(x_1) = f_\Delta(f_\Delta(x_0)) \\ &\dots \\ x_n &= f_\Delta^n(x_0) \\ &\dots \end{aligned}$$

Qui f^n indica la composizione n -esima di una funzione f con se stessa. Cioè:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Quindi:

$$f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^3 = f \circ f \circ f, \dots$$

Ne consegue:

$$f^n(x_0) = \underbrace{f(f(\dots f(x_0)))}_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Esplicitando alcuni valori di n :

$$f^1(x_0) = f(x_0), \quad f^2(x_0) = f(f(x_0)), \quad f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \dots$$

In altri termini, lo stato n -esimo del sistema è il risultato dell'applicazione della composizione n -esima di f_Δ sullo stato iniziale x_0 . Riassumendo:

Sistema a tempo continuo	Macchina ricorsiva
$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \in X \end{cases}$	$\begin{cases} x_{n+1} = f_\Delta(x_n) \\ x_0 \in X \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$

Il *metodo di König-Lemmaray* è un procedimento grafico che permette di visualizzare il processo ricorsivo (3.18) ed è illustrato in fig. 3.6, dove abbiamo considerato la funzione dell'esempio 18.

Proviamo ora ad applicare il suddetto metodo al seguente problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{x} \\ x(2) = 1 \end{cases}, \quad (3.20)$$

che ammette le due soluzioni¹:

$$\xi_+(t) = (t-1)^2, \quad \xi_-(t) = (t-3)^2 \quad (3.21)$$

Risolviamo lo stesso problema con il metodo di Eulero. In questo caso la funzione da iterare è:

$$f_\Delta(x) = x + 2\sqrt{x} \cdot \Delta,$$

per cui

$$x_{n+1} = x_n + 2\sqrt{x_n} \cdot \Delta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

¹La funzione $F(x) = 2\sqrt{x}$ non è lipschitziana, per cui non è applicabile il Teorema 10.

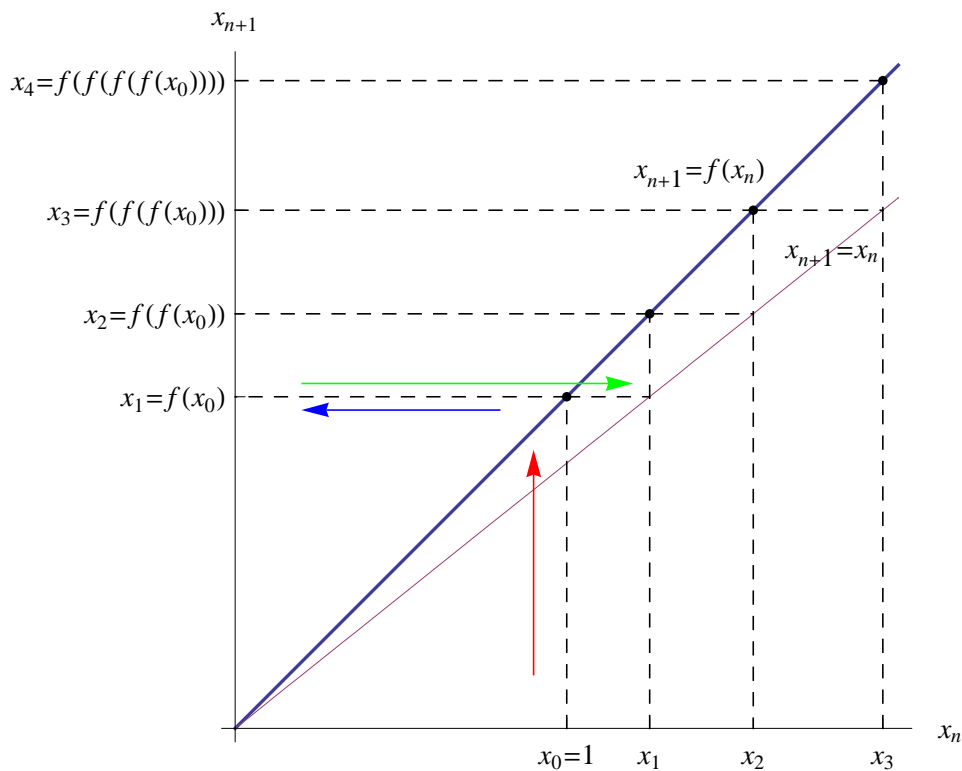


Figura 3.6: Procedimento grafico che visualizza il processo ricorsivo generato dalla funzione (3.15) con $\Delta = 1/4$. In un sistema di assi cartesiani ortogonali riportiamo in ascisse lo stato n -esimo x_n , e in ordinate lo stato $(n+1)$ -esimo x_{n+1} . Quindi tracciamo il grafico della funzione $f_\Delta(x)$ per un assegnato valore di Δ (retta grassetata). Tracciamo poi la retta $x_{n+1} = x_n$, ovvero il grafico della funzione identica $\phi : x \rightarrow x$. Assegnato lo stato iniziale x_0 , resta univocamente definito lo stato $x_1 = f(x_0)$, la cui immagine inversa tramite ϕ è $f(x_0)$. Quest'ultimo è il nuovo stato che individua univocamente lo stato successivo $x_2 = f(f(x_0))$, la cui immagine inversa tramite ϕ è $f(f(x_0))$. Il procedimento viene iterato n volte.

Esplicitiamo alcuni valori:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 1 \\
 x_1 &= x_0 + 2\sqrt{x_0} \cdot \Delta = 1 + 2\Delta, \\
 x_2 &= x_1 + 2\sqrt{x_1} \cdot \Delta = 1 + 2\Delta + 2\sqrt{1 + 2\Delta} \cdot \Delta \\
 x_3 &= x_2 + 2\sqrt{x_2} \cdot \Delta \\
 &= 1 + 2\Delta + 2\sqrt{1 + 2\Delta} \cdot \Delta + 2\sqrt{1 + 2\Delta + 2\sqrt{1 + 2\Delta} \cdot \Delta} \cdot \Delta \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Per $\Delta = 1/4$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0 & (3.22) \\
 x_1 &= \frac{3}{2} = 1.5 \\
 x_2 &= \frac{1}{4} \left(6 + \sqrt{6} \right) \simeq 2.11237 \\
 x_3 &= \frac{1}{4} \left(6 + \sqrt{6} + \sqrt{6 + \sqrt{6}} \right) \simeq 2.83907 \\
 x_4 &= \frac{1}{4} \left(6 + \sqrt{6} + \sqrt{6 + \sqrt{6}} + \sqrt{6 + \sqrt{6} + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} \right) \simeq 3.68155 \\
 x_5 &\simeq 4.64092 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Il diagramma di König-Lemaray relativo a questo sistema è riportato in fig. 3.7.

Anche in questo caso, come nell'esempio 18 a noi interessa conoscere x_n in funzione di t_n e non in funzione di x_{n-1} . A tale scopo osserviamo che

$$t_n = t_0 + n\Delta, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

essendo $t_0 = 2$. Quindi otteniamo il grafico di fig. 3.8, mentre in fig. 3.9 confrontiamo la soluzione esatta con quella approssimata.

Il metodo di König-Lemaray è, dunque, un algoritmo ricorsivo basato sul metodo di Eulero. Come nel caso dei sistemi continui, anche qui abbiamo uno *spazio delle configurazioni*, e la curva regolare di equazione:

$$\gamma_\Delta : x_{n+1} = f_\Delta(x_n), \quad (3.23)$$

definisce la *regione dello spazio delle configurazioni accessibile a \mathcal{M}_Δ* ; l'insieme di punti:

$$\Omega_\Delta = \{P_0, P_1, \dots, P_n, \dots\} \subset \gamma_\Delta,$$

con $P_n(x_n, f_\Delta(x_n)) \in \gamma_\Delta$ è l'*orbita* di \mathcal{M}_Δ .

Come abbiamo visto nella sezione 3, esistono due metodi di studio dell'evoluzione dinamica di un assegnato sistema. Il primo è basato sulle equazioni differenziali e in particolare, ci siamo riferiti a quelle del primo ordine $\dot{x} = F(x)$. Con tale approccio l'evoluzione dinamica viene studiata nel *dominio del tempo*, giacchè integrando l'equazione differenziale si perviene alla funzione $x(t)$. Il secondo metodo è, invece, basato sulla ricorsione di una assegnata funzione ad un parametro $f_\Delta(x) = x + F(x)$, che ci consente di studiare l'evoluzione dinamica nel *dominio delle configurazioni*. Dal

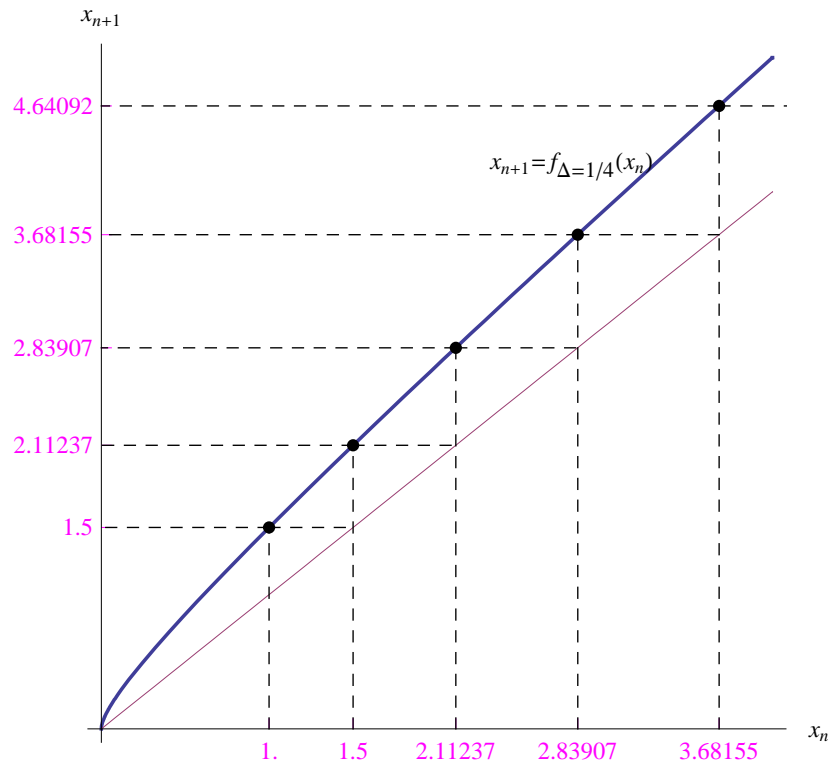


Figura 3.7: Il diagramma di König-Lemray relativo alla macchina ricorsiva con funzione di trasferimento $f_{\Delta}(x) = x + 2\sqrt{x} \cdot \Delta$, avendo assunto $\Delta = \frac{1}{4}$.

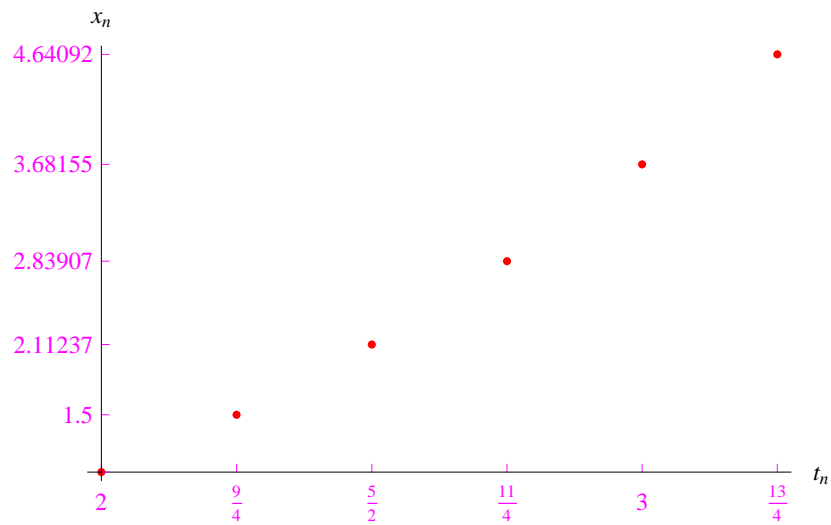


Figura 3.8: In questo grafico riportiamo i valori (3.22) in funzione di $t_n = 2 + n\Delta$ per $\Delta = \frac{1}{4}$.

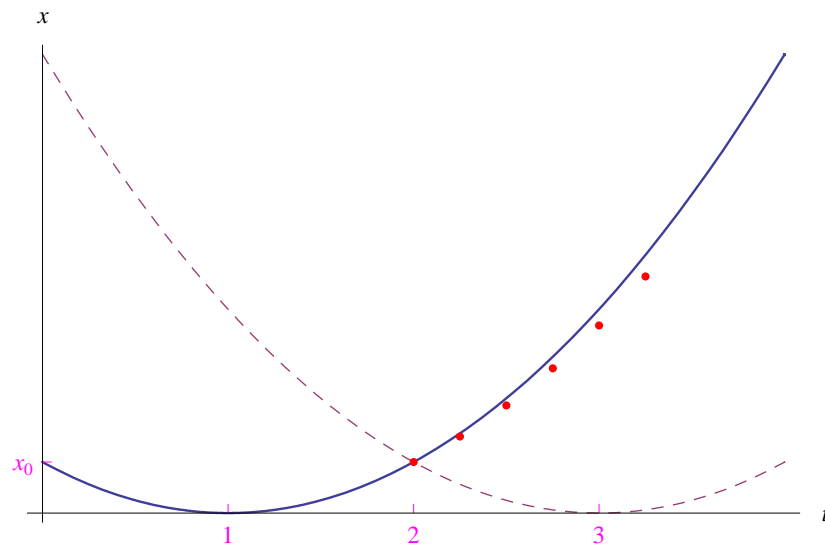


Figura 3.9: Grafico della soluzione approssimata del problema confrontato con la soluzione esatta (3.21). In questo caso vediamo che il metodo di Eulero riesce a riprodurre solo la soluzione $\xi_+(t) = (t - 1)^2$.

punto di vista del calcolo, il processo ricorsivo che genera l'orbita del sistema è piuttosto laborioso, ma in questo ci viene in aiuto l'ambiente di calcolo *Mathematica*. Infatti è possibile ricostruire in software il processo ricorsivo (3.18) attraverso una routine [5] che restituisce il diagramma di König-Lemmaray per un assegnato sistema dinamico. Ad esempio, nel caso del sistema precedente, otteniamo il grafico di fig. 3.10.

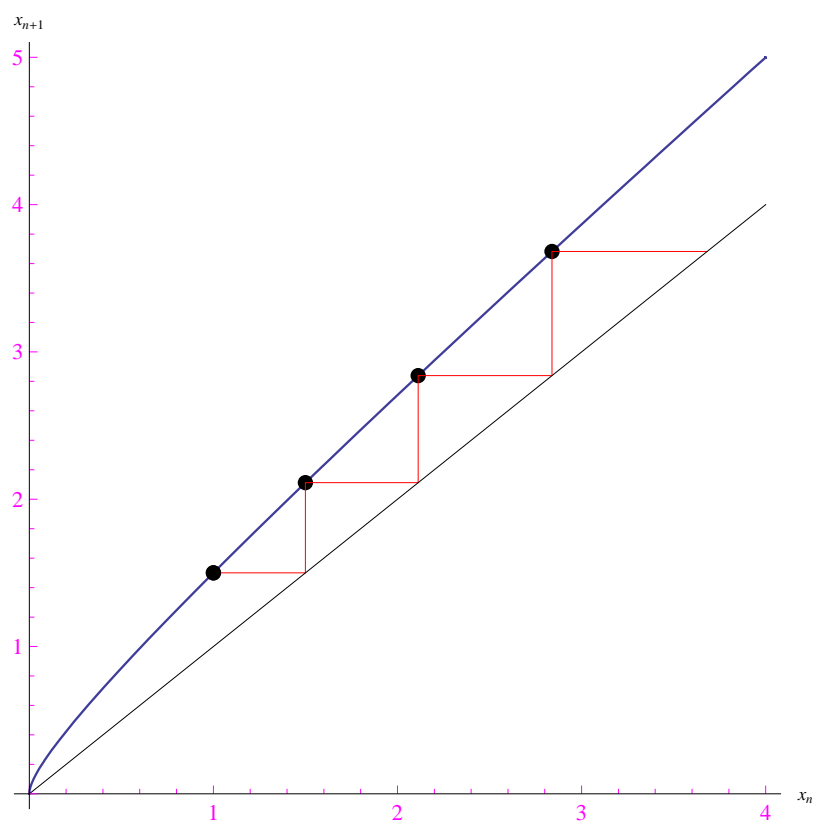


Figura 3.10: Il diagramma di König-Lemray relativo a una macchina ricorsiva con funzione di trasferimento $f_\Delta(x) = x + 2\sqrt{x} \cdot \Delta$, avendo assunto $\Delta = \frac{1}{4}$. Tale diagramma è ottenuto via software con una routine in ambiente *Mathematica*.

3.3 Il Teorema del punto fisso di Brouwer

Riprendiamo il sistema a tempo continuo dell'esempio 18. La funzione di trasferimento della corrispondente macchina ricorsiva \mathcal{M}_Δ è data dalla (3.15) per cui \mathcal{M}_Δ evolve secondo la legge:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n (1 + \Delta), & n = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 = 1 \end{cases} \quad (3.24)$$

E per quanto discusso nella sezione 2.5, un tale sistema evolve deterministicamente dallo stato iniziale (x_0, \dot{x}_0) divergendo verso il punto all'infinito:

$$P_\infty = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \dot{x} \rightarrow +\infty}} (x, \dot{x}) \quad (3.25)$$

L'evoluzione deterministica e divergente all'infinito è ben visibile (grafico 3.11). L'orbita della

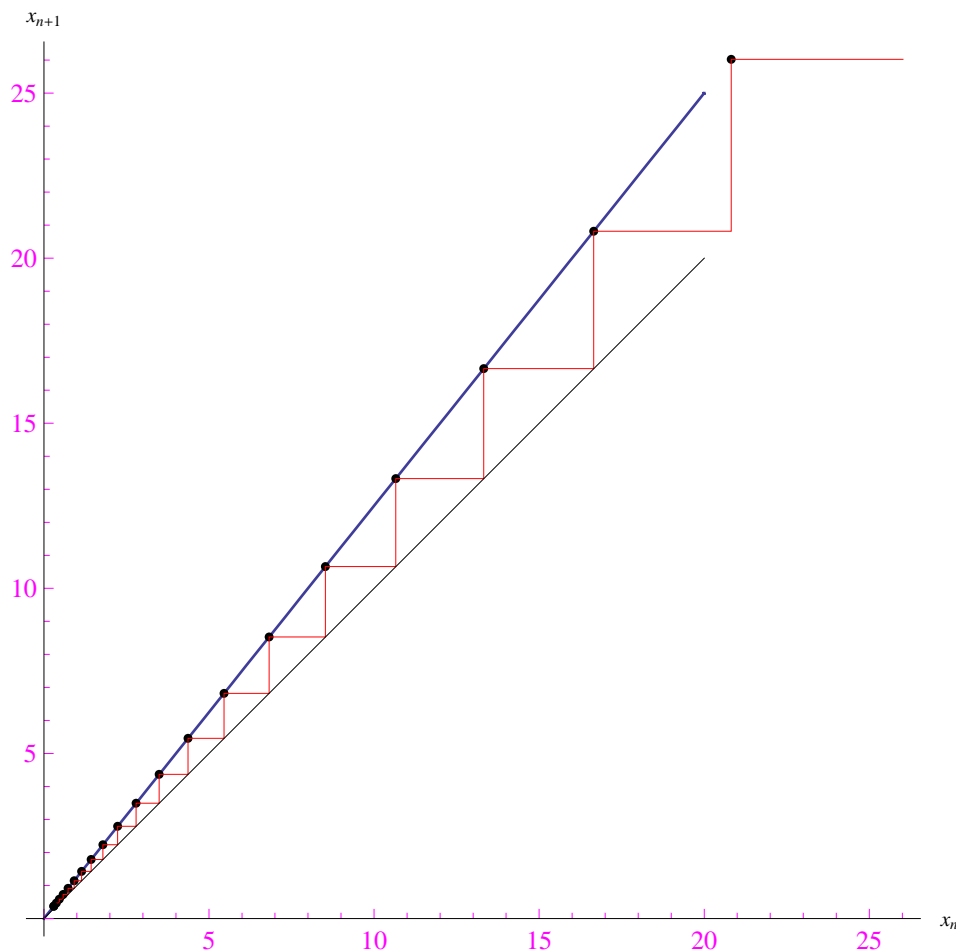


Figura 3.11: Il diagramma di König-Lemary relativo alla macchina ricorsiva (3.24) con $\Delta = \frac{1}{4}$.

macchina è

$$\Omega_\Delta = \{(x_n, (1 + \Delta)x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (3.26)$$

Per ogni $\Delta > 0$ l'insieme (3.26) ha come unico punto di accumulazione il punto all'infinito

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, (1 + \Delta)x_n)$$

Tale punto è un *punto attrattivo* per \mathcal{M}_Δ , giacchè:

$$\forall x_0 \in (0, +\infty), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, (1 + \Delta)x_n) = P_\infty$$

In altri termini, comunque assegniamo lo stato iniziale (x_0, \dot{x}_0) , lo stato di \mathcal{M}_Δ tende a P_∞ . Tale circostanza si generalizza nel caso di qualunque una macchina ricorsiva

$$\mathcal{M}_\Delta : \begin{cases} x_{n+1} = f_\Delta(x_n) \\ x_0 \in X \end{cases} \quad (3.27)$$

Abbiamo così dimostrato la seguente proprietà:

Proprietà 20

$$\left. \begin{array}{l} P_* \text{ è un punto attrattivo} \\ \text{per } \mathcal{M}_\Delta \end{array} \right) \implies (P_* \text{ è di accumulazione per } \Omega_\Delta \text{ ,}$$

Si osservi che tale implicazione non è invertibile. In altri termini, condizione necessaria ma non sufficiente affinché P_* sia un punto attrattivo è che P_* sia di accumulazione per Ω_Δ .

Siamo ora in grado di ricostruire in software l'evoluzione di un sistema autonomo lineare omogeneo

$$\begin{cases} \dot{x} = -|\alpha_0|x \\ x(0) = x_0 \end{cases} ,$$

già studiato nella sezione 2.5, dove abbiamo trovato la soluzione (decrescita esponenziale):

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}} , \quad (3.28)$$

con $\tau_c = |\alpha_0|^{-1}$. La funzione di trasferimento della corrispondente macchina ricorsiva \mathcal{M}_Δ è:

$$f_\Delta(x) = (1 - \Delta)x ,$$

dove abbiamo assunto $|\alpha_0| = 1$. Facendo “partire” la macchina dallo stato iniziale $x_0 = 1$

$$\mathcal{M}_\Delta : \begin{cases} x_{n+1} = (1 - \Delta)x_n \\ x_0 = 1 \end{cases} , \quad (3.29)$$

otteniamo l'evoluzione plottata in fig. 3.12, da cui vediamo che l'origine $O(0, 0)$ del sistema di assi coordinati $Ox_n x_{n+1}$ è di accumulazione per $\Omega_\Delta = \{(x_n, (1 - \Delta)x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, giacchè:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, (1 - \Delta)x_n) = (0, 0), \quad \forall x_0 \in (0, +\infty) \quad (3.30)$$

La (3.30) implica

$$\forall I_\delta(O), \quad \exists P_n(x_n, (1 - \Delta)x_n) \in \Omega_\Delta \cap I_\delta(O) - \{P_n\} ,$$

essendo $I_\delta(O)$ un intorno circolare di raggio δ centrato in $O(0, 0)$. Ne consegue che $O(0, 0)$ è un punto attrattivo per la macchina ricorsiva (3.29). Tale conclusione è in perfetto accordo con l'analisi nel dominio del tempo. Infatti, la soluzione (3.28) è infinitesima all'infinito:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

Ciò si traduce in una proprietà topologica notevole per la macchina ricorsiva (3.29), nel senso che l'insieme degli stati ha un punto di accumulazione al finito. Utilizzando un linguaggio suggestivo

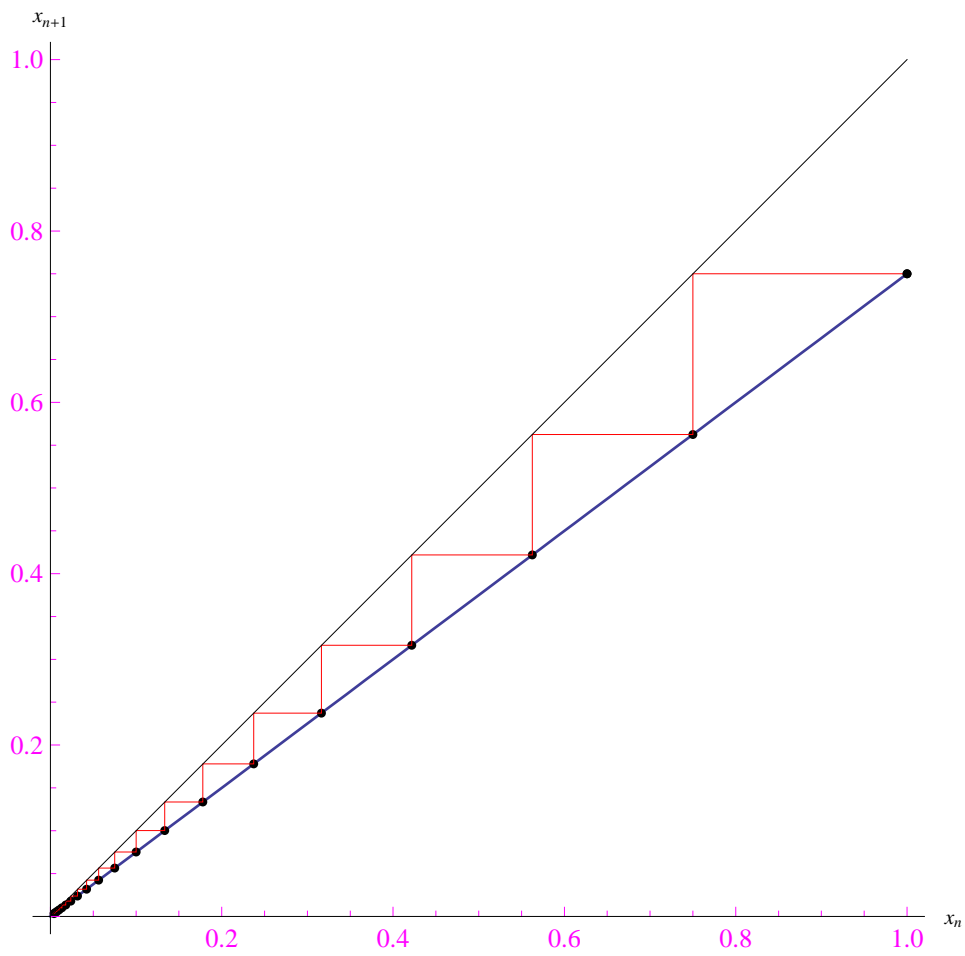


Figura 3.12: Evoluzione dinamica della macchina ricorsiva $\mathcal{M}_{\Delta=1/4}$ con funzione di trasferimento $f_\Delta(x) = (1 - \Delta)x$. Assegnato lo stato iniziale $(x_0 = 1, x_1 = 1 - \Delta)$, \mathcal{M}_Δ tende asintoticamente allo stato $(0, 0)$.

ma efficace, la macchina \mathcal{M}_Δ – attraverso il diagramma 3.12 – permette di visualizzare un processo infinito in modo finito.

Consideriamo, ora, il caso della salita esponenziale. Come visto, il sistema dinamico è:

$$\dot{x} = -|\alpha_0|x + \beta_0, \quad \text{con } \alpha_0 \neq 0, \beta_0 > 0$$

da cui il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x \\ x(0) = 0 \end{cases}, \quad (3.31)$$

dove abbiamo assunto $|\alpha_0| = 1, \beta_0 = 1$. La soluzione di (3.31) è:

$$x(t) = 1 - e^{-t},$$

mentre la funzione di trasferimento della corrispondente macchina ricorsiva \mathcal{M}_Δ è:

$$f_\Delta(x) = (1 - \Delta)x + \Delta$$

Facendo “partire” la macchina dallo stato iniziale $x_0 = 0$

$$\mathcal{M}_\Delta : \begin{cases} x_{n+1} = (1 - \Delta)x_n + \Delta \\ x_0 = 0 \end{cases}, \quad (3.32)$$

plottata in fig. 3.13, da cui vediamo che \mathcal{M}_Δ evolve deterministicamente dallo stato iniziale $(0, \Delta)$ per convergere asintoticamente allo stato $(1, 1)$, onde tale punto è attrattivo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, (1 - \Delta)x_n + \Delta) = (1, 1)$$

I risultati trovati non sono altro che una conseguenza del Teorema 26. Più precisamente e nel caso generale, si ricercano i cosiddetti *punti fissi*, ovvero gli (eventuali) zeri al finito della funzione $F(x)$:

$$f_\Delta(x) = x \iff F(x) = 0,$$

Supponiamo che $F(x)$ sia dotata di uno zero al finito x_* , cosicché:

$$\exists x_* \in X \mid F(x_*) = 0 \implies \exists t_* \in \bar{\mathbb{R}} \mid x(t_*) = x_*,$$

essendo $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ l’insieme ampliato dei numeri reali. E tenendo conto della (3.4), riesce:

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \frac{d}{dt} x(t) = \lim_{x \rightarrow x_*} F(x) = 0$$

Abbiamo i seguenti casi:

1. $|t_*| < +\infty \implies t_*$ è punto estremale per la funzione $x(t)$;
2. $|t_*| = +\infty \implies$ Nello spazio delle configurazioni $x\dot{x}$, la retta orizzontale $x = x_*$ è asintoto orizzontale² per il grafico della funzione $x(t)$. Cioè:

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} x(t) = x_*$$

²A destra se $t_* = +\infty$, a sinistra se $t_* = -\infty$.

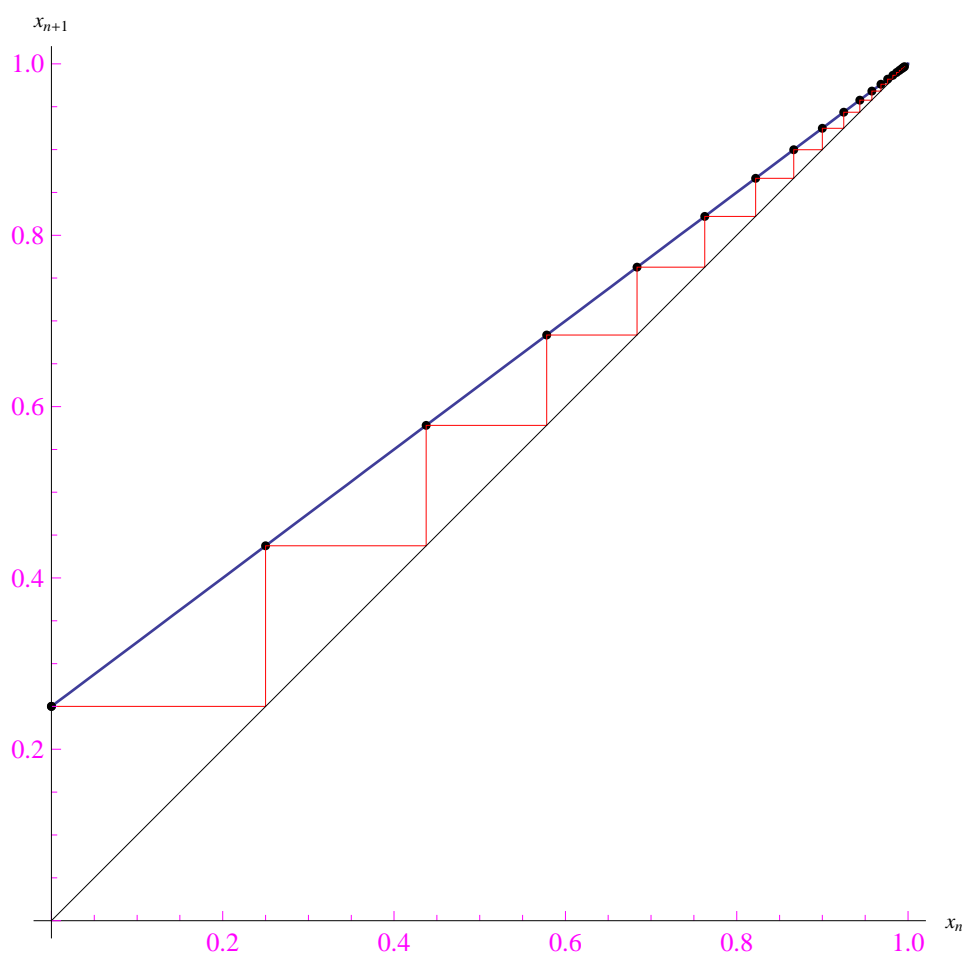


Figura 3.13: Evoluzione dinamica della macchina ricorsiva $\mathcal{M}_{\Delta=1/4}$ (3.32). Assegnato lo stato iniziale $(x_0 = 0, x_1 = \Delta)$, \mathcal{M}_{Δ} tende asintoticamente allo stato $(1, 1)$.

Ad esempio, nel caso della salita esponenziale è

$$F(x) = 1 - x,$$

per cui l'unico zero al finito di $F(x)$ è $x_* = 1$. Lo stato del sistema “parte” dal punto iniziale $P_0(0, 1) \in \Gamma(F)$, dove $\Gamma(F)$ è il grafico $F(x)$, cioè la retta di equazione $\dot{x} = 1 - x$, per tendere asintoticamente al punto finale $P_*(1, 0) \in \Gamma(F)$. L'orbita del sistema è:

$$\Omega = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq x_*, \dot{x} = 1 - x\} \subset \Gamma(F),$$

ovvero il segmento di estremi P_0 e P_* (cfr. fig. 3.14).

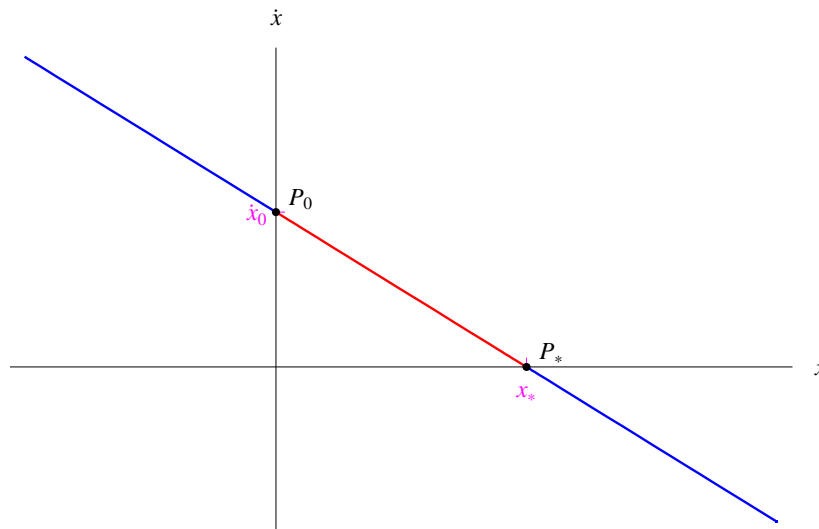


Figura 3.14: Orbita del sistema a tempo continuo regolato dall'equazione differenziale $\dot{x} = 1 - x$. Lo stato iniziale è $(x_0 = 0, \dot{x}_0 = 1)$. Il sistema evolve asintoticamente verso lo stato $(x_*, 0)$.

Abbiamo considerato macchine ricorsive *lineari*, cioè corrispondenti a sistemi a tempo continui governati da un'equazione differenziale lineare. Consideriamo ora un sistema non lineare, ad esempio:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (3.33)$$

con

$$F(x) = \cos x - x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (3.34)$$

che è lipschitziana con coefficiente $\alpha = 2$. Grafichiamo tale funzione in fig. 3.15, da cui vediamo la presenza di uno zero x_* , radice dell'equazione

$$\cos x = x,$$

che può essere risolta per via numerica, ottenendo

$$x_* \simeq 0.739085$$

Lo stato del sistema “parte” dal punto iniziale $P_0(x_0, F(x_0)) \in \Gamma(F)$ per tendere asintoticamente al punto finale $P_*(x_*, 0) \in \Gamma(F)$. L'orbita del sistema è:

$$\Omega = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \leq x \leq x_*, \dot{x} = F(x)\} \subset \Gamma(F),$$

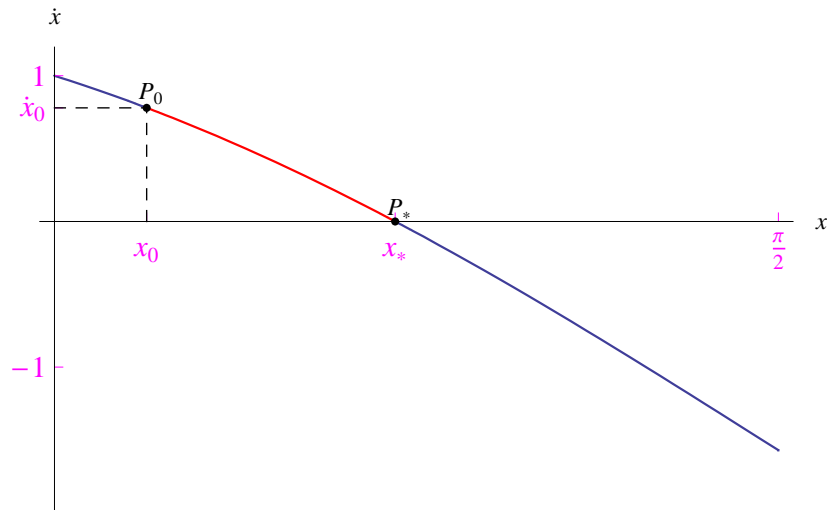


Figura 3.15: Orbita del sistema a tempo continuo regolato dall'equazione differenziale $\dot{x} = \cos x - x$. Lo stato iniziale è $x_0 = 0.2$.

ovvero l'arco di curva $\Gamma(F)$ di estremi P_0 e P_* (cfr. fig. 3.15). Si noti che abbiamo supposto $x_0 \in (0, x_*)$.

La suddetta analisi è confermata da un'integrazione numerica dell'equazione differenziale $\dot{x} = \cos x - x$ con la condizione iniziale $x(0) = x_0$, ottenendo (per $x_0 = 0.2$) la soluzione graficata in 3.16, da cui vediamo:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_*, \quad (3.35)$$

Tale comportamento asintotico è indipendente da x_0 , come risulta dai grafici di fig. 3.17

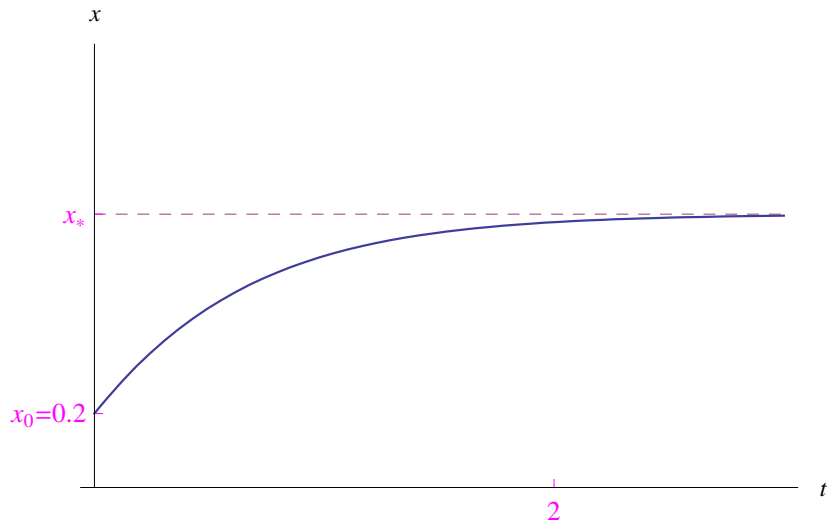


Figura 3.16: Grafico della soluzione del problema di Cauchy (3.33).

Nel linguaggio delle orbite, tali conclusioni si traducono nel grafico di fig. 3.18.

Conclusione 21 *Comunque assegniamo lo stato iniziale $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ del sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos x - x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

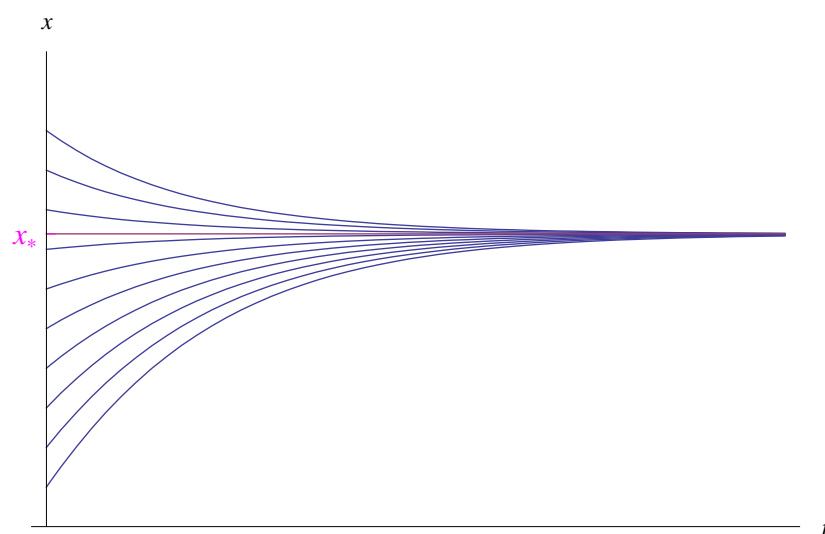


Figura 3.17: Grafico della soluzione del problema di Cauchy (3.33) per diversi valori dello stato iniziale x_0 .

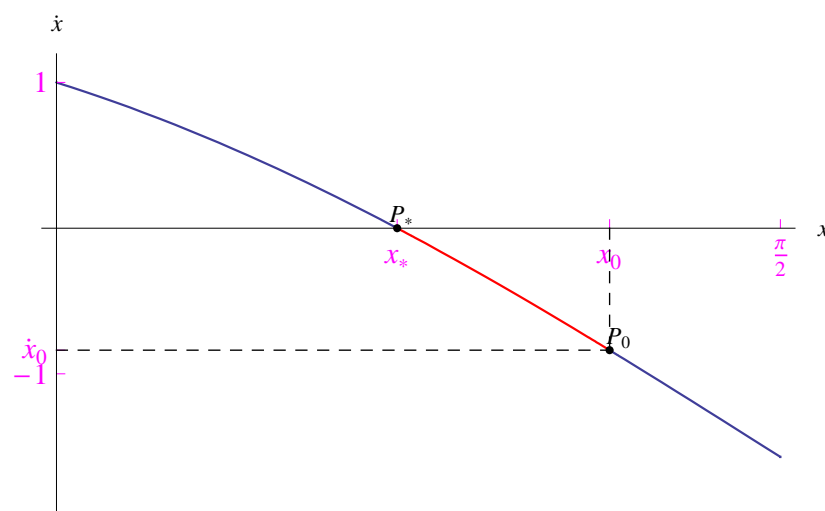


Figura 3.18: Orbita del sistema a tempo continuo regolato dall'equazione differenziale $\dot{x} = \cos x - x$. Lo stato iniziale è $x_0 = 1.2$.

lo stato (x, \dot{x}) converge a $P_*(x_*, 0)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), \dot{x}(t)) = (x_0, 0), \quad \forall x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Al sistema (3.36) corrisponde la macchina ricorsiva \mathcal{M}_Δ con funzione di trasferimento:

$$f_\Delta(x) = x(1 - \Delta) + \Delta \cos x, \quad (3.37)$$

e per quanto precede:

$$f_\Delta(x) = x \iff x = x_* \simeq 0.739085$$

L'evoluzione dinamica è retta dall'equazione di ricorrenza:

$$x_{n+1} = x_n(1 - \Delta) + \Delta \cos x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

E il diagramma di König-Lemaray è mostrato in fig. 3.19, da cui vediamo che lo stato del sistema tende asintoticamente a x_* .

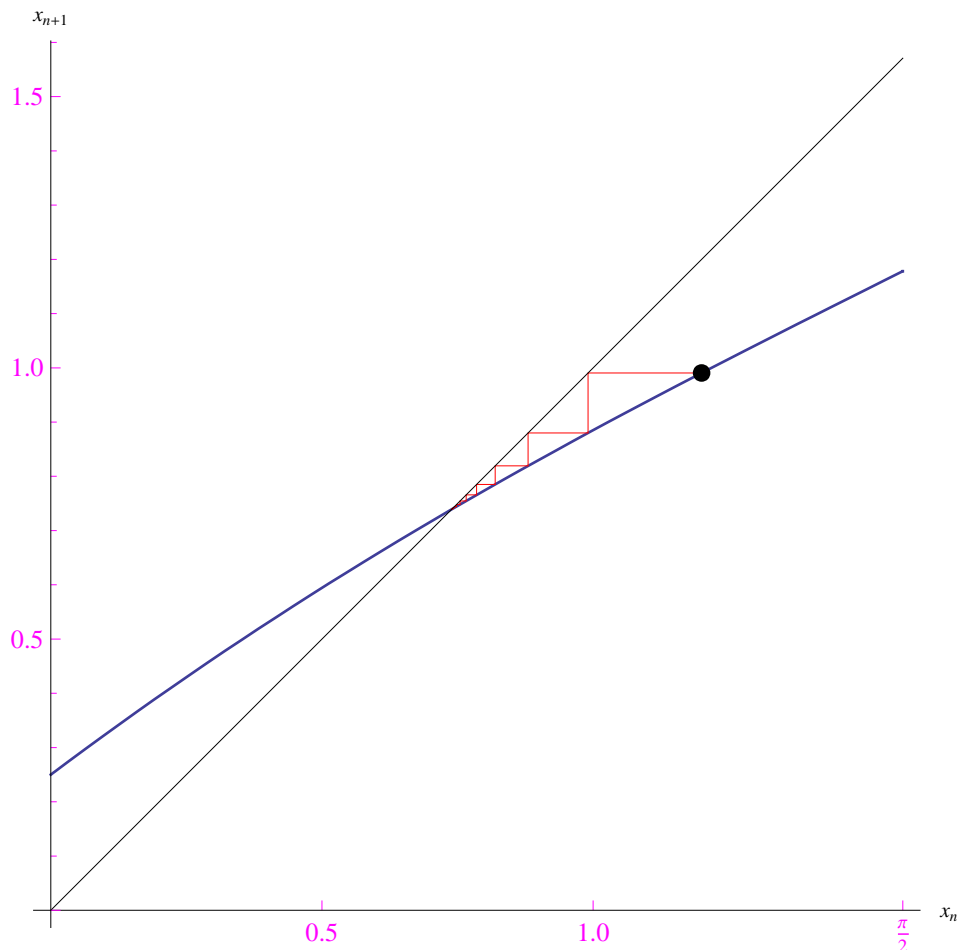


Figura 3.19: Il diagramma di König-Lemaray relativo al sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $f_{1/4}(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \cos x$.

Se invece poniamo $\Delta = 1$, la funzione di trasferimento si scrive:

$$f_1(x) = \cos x,$$

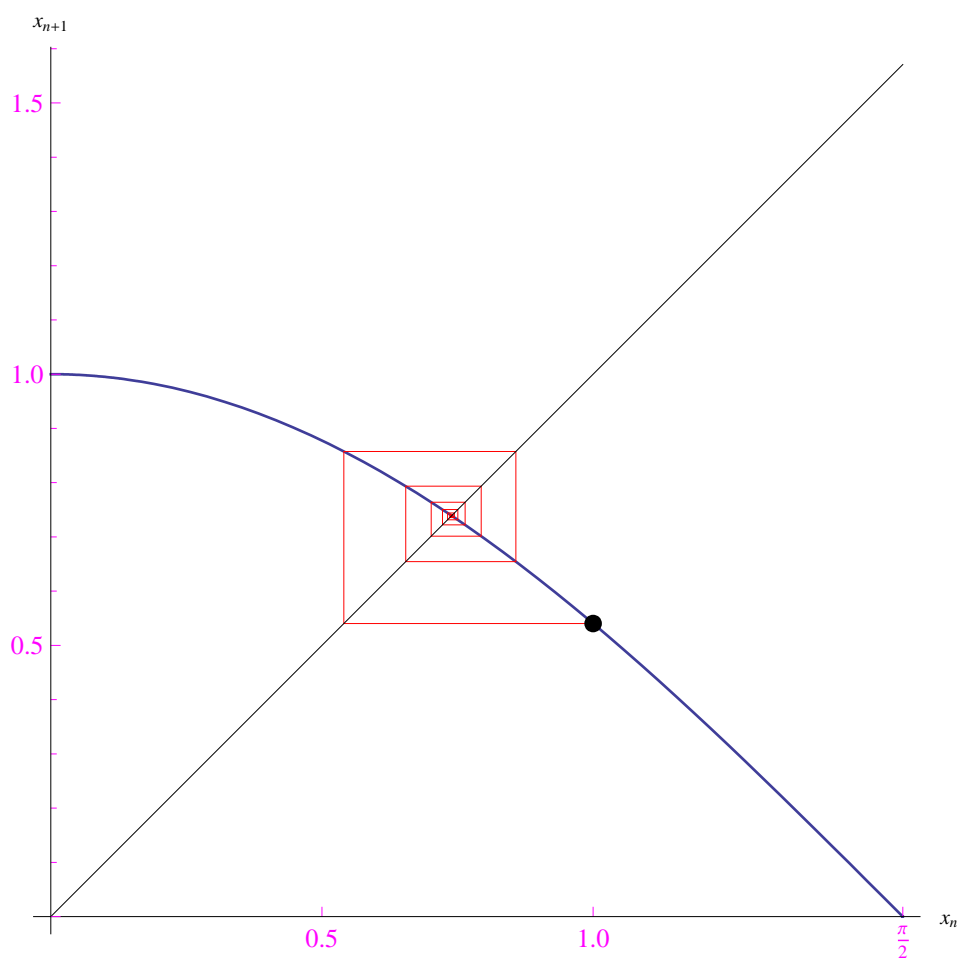


Figura 3.20: Il diagramma di König-Lemary relativo al sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $f_1(x) = \cos x$.

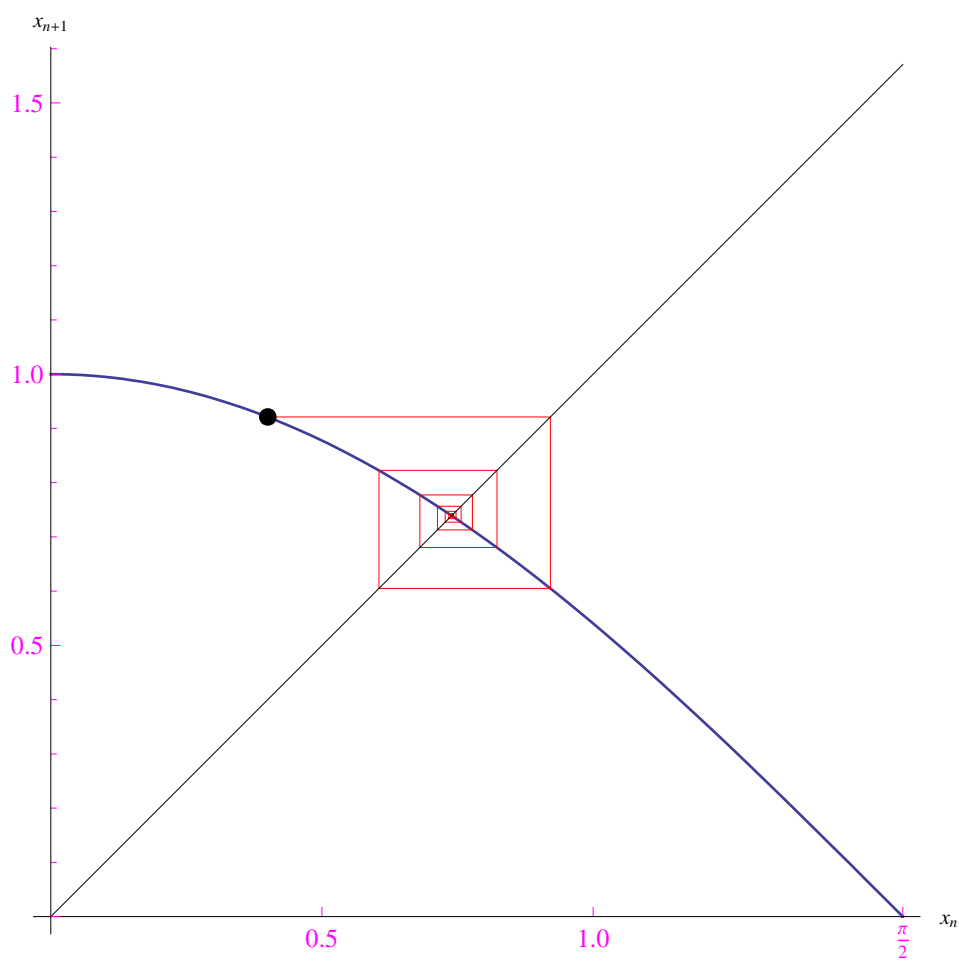


Figura 3.21: Il diagramma di König-Lemary relativo al sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $f_1(x) = \cos x$, avendo assunto come stato iniziale $x_0 = 0.4$.

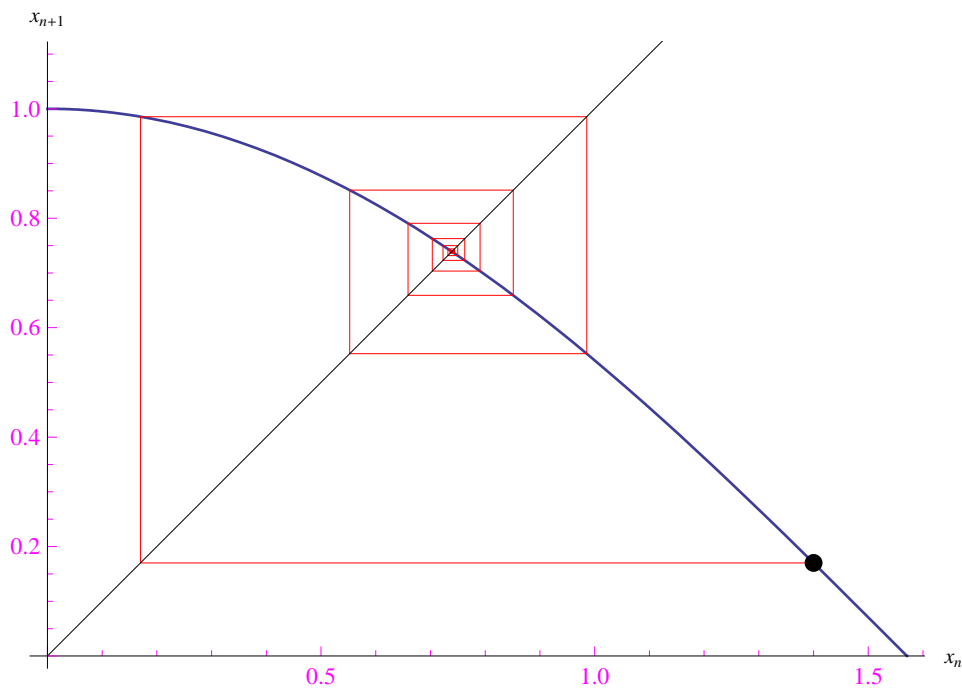


Figura 3.22: Il diagramma di König-Lemaray relativo al sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $f_1(x) = \cos x$, avendo assunto come stato iniziale $x_0 = 1.4$

e otteniamo il diagramma di fig. 3.20.

Rimane poi confermata l'indipendenza dallo stato iniziale, come mostrato nei grafici riportati nelle figg. 3.21-3.22. Abbiamo, quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_*, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

ovvero la successione $\{x_n\}$ converge a x_* . Cioè:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = P_*(x_*, x_*),$$

Ne consegue che $P_*(x_*, x_*)$ è punto di accumulazione per l'orbita Ω_Δ e per la proprietà 20 è un punto attrattivo.

D'ora in avanti, assumiamo definitivamente $\Delta = 1$, lasciando cadere l'indice Δ nelle rispettive notazioni. Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 22 Una **contrazione** di $[a, b] \subset \mathbb{R}$ è una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\exists \mu \in (0, 1) \mid |f'(x)| \leq \mu, \quad \forall x \in [a, b]$$

Proposizione 23

$$f \text{ è una contrazione di } [a, b] \implies f([a, b]) \subset [a, b],$$

essendo $f([a, b])$ il codominio di f , i.e. l'immagine di $[a, b]$ attraverso f .

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange:

$$x', x'' \in [a, b] \implies \exists \xi \in (x', x'') \mid \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = f'(\xi)$$

Cioè:

$$\forall x', x'' \in [a, b], \quad |f(x'') - f(x')| = |f'(\xi)| \cdot |x'' - x'| \leq \mu |x'' - x'| \underset{\mu \in (0,1)}{<} |x'' - x'| \quad (3.38)$$

Quindi:

$$|f(b) - f(a)| < |b - a| = b - a,$$

da cui l'asserto. ■

Osservazione 24 La proposizione appena dimostrata giustifica la definizione 22, giacchè una contrazione di $[a, b]$ riduce le distanze ($|f(x'') - f(x')| < |x'' - x'|$).

Osservazione 25 Le asserzioni seguenti sono equivalenti:

- f è una contrazione di $[a, b]$
- f è lipschitziana di coefficiente $\mu \leq 1$

Teorema 26 Teorema del punto fisso di Brouwer

$$f \text{ è una contrazione di } [a, b] \implies \exists! x_* \in [a, b] \mid f(x_*) = x_* \quad (3.39)$$

In altri termini, se f è una contrazione di $[a, b]$, l'equazione $f(x) = x$ è compatibile e determinata in $[a, b]$. Inoltre, la successione ricorsiva $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definita da

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \text{con } x_0 \in [a, b] \quad (3.40)$$

converge alla radice x_* :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_* \quad (3.41)$$

Dimostrazione. Poniamo $g(x) = x - f(x)$, onde:

$$g'(x) = 1 - f'(x) \geq 1 - \mu > 0, \quad (3.42)$$

giacchè è per ipotesi $-\mu \leq f'(x) \leq \mu$ con $0 < \mu < 1$. Per la proposizione 23 è $f([a, b]) \subset [a, b]$. Senza perdita di generalità, se $f(a) < f(b) \implies [f(a), f(b)] \subset [a, b]$, quindi:

$$g(a) = a - f(a) < 0, \quad g(b) = b - f(b) > 0$$

Dunque, g è continua in $[a, b]$ ed assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[a, b]$. Per il teorema di esistenza degli zeri, esiste almeno un punto $x_* \in [a, b]$ tale che $g(x_*) = 0$. Ma tale punto è unico, in forza della monotonia della funzione $g(x)$ (eq. 3.42). Perciò:

$$\exists! x_* \in [a, b] \mid g(x_*) = 0 \implies \exists! x_* \in [a, b] \mid f(x_*) = x_*$$

Dimostriamo la seconda parte del teorema. Assegnando ad arbitrio un punto iniziale $x_0 \in [a, b]$, iteriamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ &\dots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \\ &\dots \end{aligned}$$

Abbiamo così costruito la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. I casi possibili sono:

1.

$$\begin{aligned} \exists \nu \in \mathbb{N} \mid x_{\nu+1} &= f(x_\nu) = x_\nu \\ \implies \left(\forall n > \nu, x_n = x_\nu \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_\nu = x_* \right. \end{aligned}$$

2. $\nexists \nu \in \mathbb{N} \mid x_{\nu+1} = f(x_\nu) = x_\nu$

Per il teorema di Lagrange:

$$\begin{aligned} \forall k > 1, \exists \xi_k \in (x_{k-1}, x_*) \mid |x_k - x_*| &= |f(x_{k-1}) - f(x_*)| = f'(\xi_k) |x_{k-1} - x_*| \\ &\leq \mu |x_{k-1} - x_*| < |x_{k-1} - x_*| \end{aligned}$$

Cioè:

$$|x_k - x_*| < |x_{k-1} - x_*|, \quad \forall k > 1,$$

da cui segue che la successione $\{|x_n - x_*|\}$ è strettamente decrescente. Inoltre:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_*| &\leq \mu |x_0 - x_*| \\ |x_2 - x_*| &\leq \mu |x_1 - x_*| \leq \mu^2 |x_0 - x_*| \\ &\dots \\ |x_n - x_*| &\leq \mu^n |x_0 - x_*| \leq \mu^n (b - a) \end{aligned}$$

Risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^n = 0,$$

giacchè è $0 < \mu < 1$. Quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^n (b - a) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - x_*| = 0$$

■ Osserviamo che il punto $x_* \in [a, b]$ è invariante rispetto all'azione della contrazione f . Per tale ragione, x_* si chiama **punto fisso** di f (*fixed point*). Tale definizione si generalizza a una qualunque funzione f che non sia necessariamente una contrazione.

Definizione 27 *Un punto fisso di una macchina ricorsiva \mathcal{M} con funzione di trasferimento f , è una radice dell'equazione $f(x) = x$.*

La proposizione (23) e il teorema (26) hanno una semplice interpretazione geometrica. Precisamente, il grafico di una contrazione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ha una pendenza < 1 . Ad esempio, se consideriamo la trasformazione identica di $[a, b]$:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \rightarrow x, \quad \forall x \in [a, b],$$

vediamo che f non è una contrazione, poichè $|f'(x)| = 1, \forall x \in [a, b]$. E infatti, risulta: $f([a, b]) = [a, b]$. Il caso opposto a quello della trasformazione identica è dato dalla *contrazione degenera*, ovvero dalla trasformazione costante:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \rightarrow c, \quad \forall x \in [a, b],$$

dove c è una costante reale. Risulta $f'(x) = 0$, per cui f è una contrazione di $[a, b]$. È degenera, poichè $f([a, b]) = \{c\}$, cioè contrae l'intervallo $[a, b]$ nell'insieme $\{c\}$.

Conclusione 28 *Dal teorema (26) segue che condizione sufficiente affinché l'equazione $f(x) = x$ sia compatibile e determinata, è che f sia una contrazione. Incidentalmente, se f è la trasformazione identica, l'equazione $f(x) = x$ risulta compatibile e indeterminata, giacchè $\forall x \in [a, b]$ è soluzione. Se invece f è un contrazione degenera di $[a, b]$, l'unica soluzione di $f(x) = x$ è la costante c .*

Utilizzando un linguaggio intuitivo ma efficace, possiamo dire che le contrazioni sono una “via di mezzo” tra la trasformazione identica e la contrazione degenera³.

Definizione 29 *Una funzione f è una **contrazione locale** di $[a, b]$ se esiste un intervallo $[\xi_<, \xi_>] \subset [a, b]$ tale che f è una contrazione di $[\xi_<, \xi_>]$.*

In generale, dobbiamo distinguere i due casi:

1. $f'(x) > 0$, cosicchè la funzione risulta crescente in $[a, b]$. Se assumiamo come punto iniziale $x_0 < x_*$, si ha che la successione $\{x_n\}$ è crescente. Viceversa, se si parte da $x_0 > x_*$, la successione $\{x_n\}$ è decrescente.
2. $f'(x) < 0$, cosicchè la funzione risulta decrescente in $[a, b]$.

Ritornando all'esempio visto in inizio paragrafo, vediamo che $f(x) = \cos x$ è una contrazione di $[0, \frac{\pi}{2})$, poichè $|f'(x)| = |\sin x| < 1, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Per quanto precede, l'equazione $\cos x = x$ è compatibile e determinata in $[0, \frac{\pi}{2})$.

Segue, inoltre, il seguente corollario al teorema del punto fisso:

Corollario 30 *Assegnata una qualunque contrazione f di $[a, b] \subset \mathbb{R}$, la successione di funzioni $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge alla funzione costante $g(x) \equiv f(x_*)$, essendo x_* il punto fisso di f . Cioè:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = f(x_*), \quad \forall x \in [a, b] \tag{3.43}$$

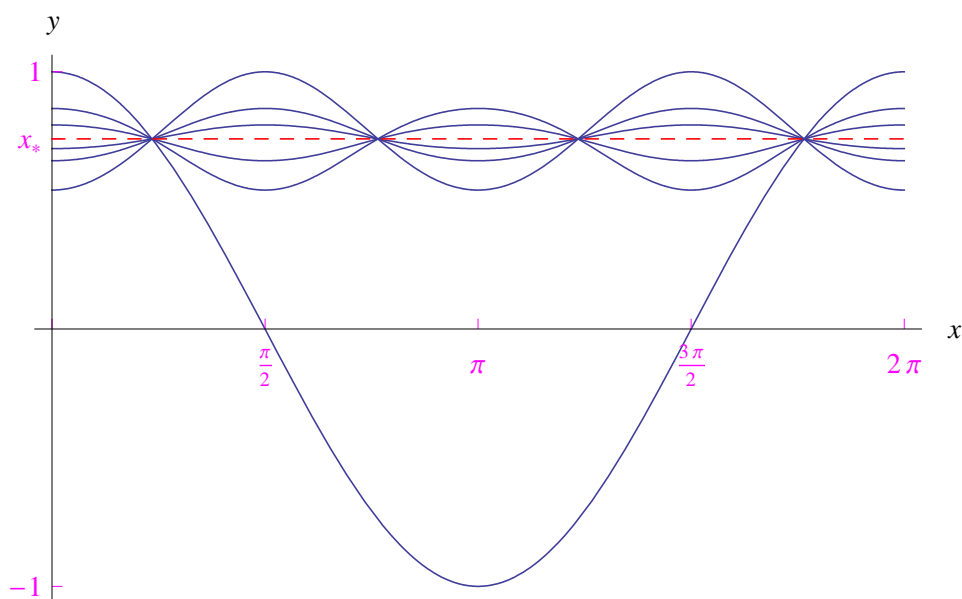


Figura 3.23: Grafico delle funzioni $f^n(x)$ per $n = 0, 1, 2, \dots, 6$, dove $f(x) = \cos x$. La linea in tratteggio è il grafico della funzione costante $g(x) = x_*$.

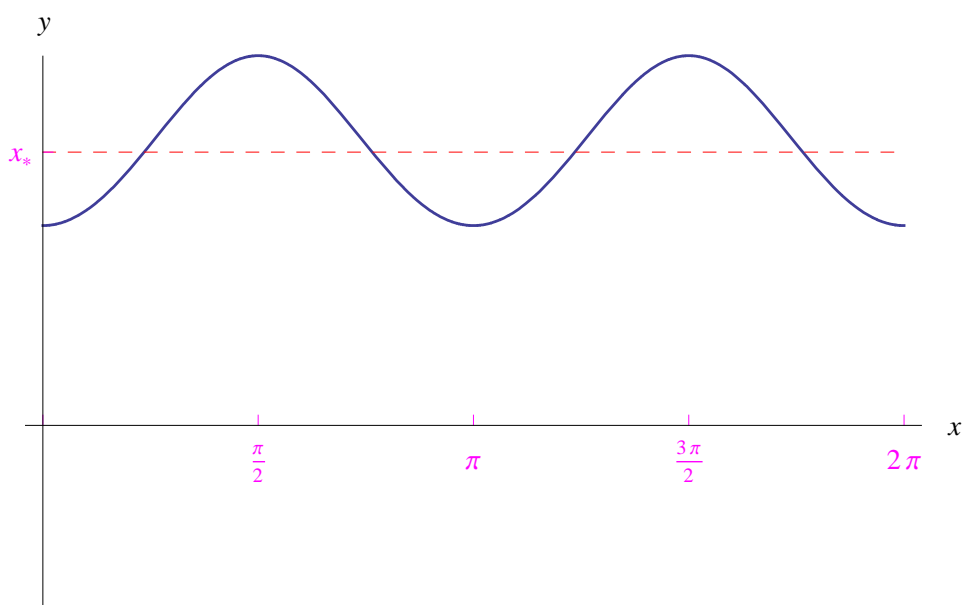


Figura 3.24: Grafico della funzione $f^{n=2}(x)$ dove $f(x) = \cos x$. La linea in tratteggio è il grafico della funzione costante $g(x) = x_*$.

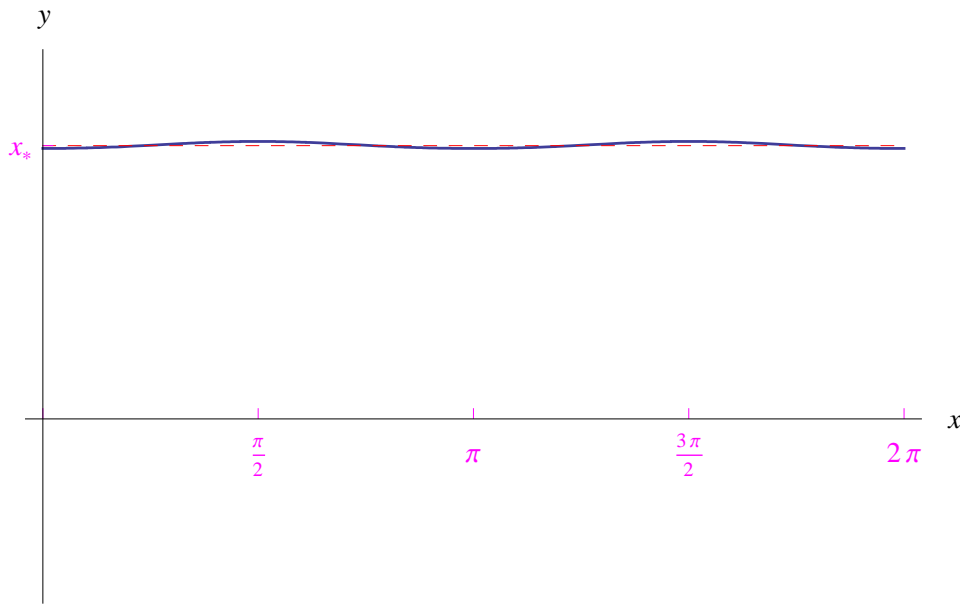


Figura 3.25: Grafico della funzione $f^{n=10}(x)$, dove $f(x) = \cos x$. La linea in tratteggio è il grafico della funzione costante $g(x) = x_*$. Al crescere indefinito di n le oscillazioni di $f^n(x)$ si attenuano per smorzarsi nel limite per $n \rightarrow +\infty$.

Le figg. 3.23–3.24–3.25 illustrano rispettivamente le prime 2 e 10 iterazioni nel caso $f(x) = \cos x$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Esempio 31 Consideriamo il sistema dinamico a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con

$$F(x) = x^2 - x, \quad \forall x \in [0, 1]$$

per cui i punti fissi della corrispondente macchina ricorsiva \mathcal{M} sono:

$$x_* = 0, \quad x'_* = 1$$

L'equazione differenziale $\dot{x} = x^2 - x$ si integra per separazione di variabili (§ B.1) ottenendo la soluzione:

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.44)$$

da cui vediamo che per $x_0 \neq x_*, x'_*$ la $x(t)$ non è una costante. Inoltre, comunque prendiamo $x_0 \in (0, 1)$, la soluzione $x(t)$ converge asintoticamente a zero, come mostrato nel grafico di fig. 3.26. Cioè

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \quad \forall x_0 \in (0, 1)$$

La funzione di trasferimento di \mathcal{M} è:

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in [0, 1] \quad (3.45)$$

Il punto fisso $x'_* = 1$ è repulsivo nel senso che per ogni punto iniziale $x_0 \in (x'_* - \delta, x'_*)$, la successione $\{x_n\}$ non converge a x'_* . Anzi, si allontana definitivamente da esso. Ad esempio, per $x_0 = 0.999$ otteniamo il diagramma delle orbite di fig. 3.27.

³Si osservi che mentre la trasformazione identica è unica, di contrazioni degenerate ne esistono infinite (per un assegnato intervallo $[a, b]$).

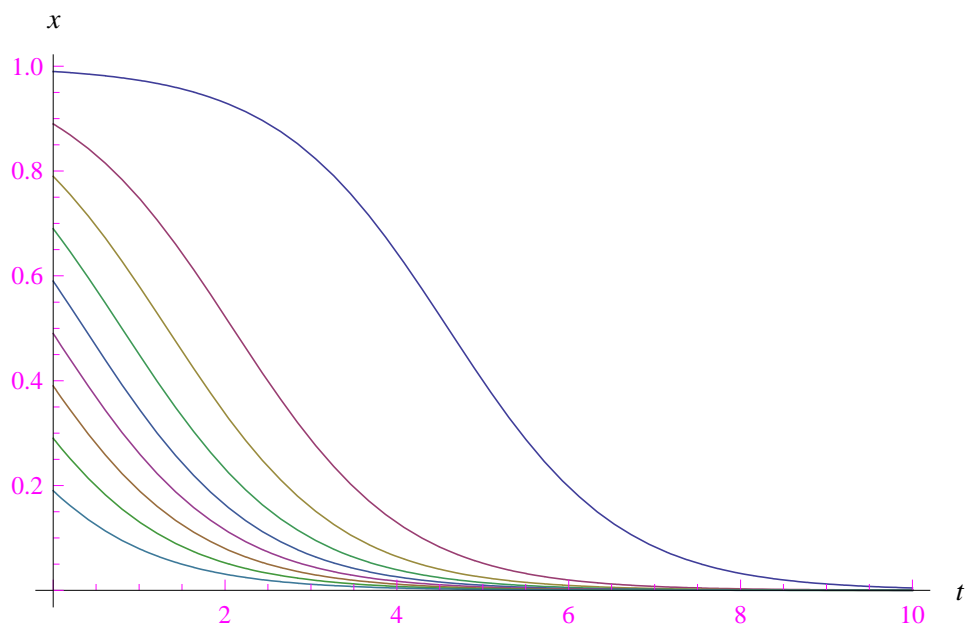


Figura 3.26: Andamento della soluzione (3.44) per diversi valori dello stato iniziale $x_0 \in (0, 1)$.

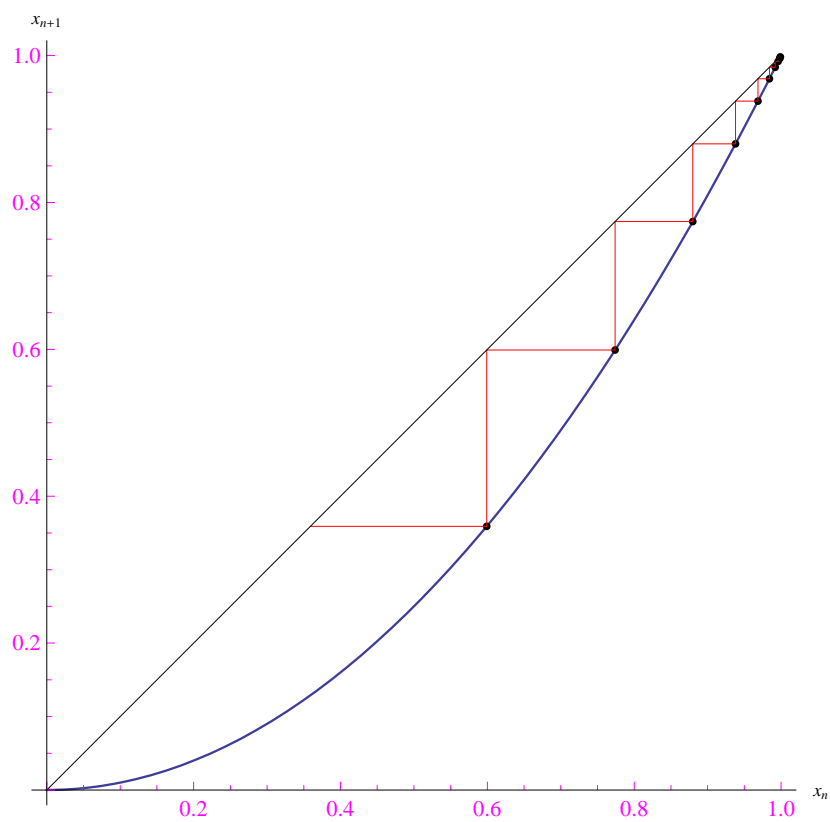


Figura 3.27: Diagramma di König-Lemaray della macchina ricorsiva con funzione di trasferimento (3.45) e stato iniziale $x_0 = 0.999$.

Abbiamo la seguente definizione:

Definizione 32 Il punto fisso x_* di una macchina ricorsiva con funzione di trasferimento f , è **repulsivo** se e solo se:

$$\exists I_\delta(x_*) = (x_* - \delta, x_* + \delta) \mid (x_0 \in I_\delta(x_*) - \{x_*\} \implies \exists n \in \mathbb{N} - \{0\} \mid f^n(x_0) \notin I_\delta(x_0))$$

Dal teorema 26 segue il corollario:

Corollario 33 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se x_* è un punto fisso una macchina ricorsiva con funzione di trasferimento f , segue:

- x_* è un punto fisso attrattivo se $|f'(x_*)| < 1$
- x_* è un punto fisso repulsivo se $|f'(x_*)| > 1$

Infatti, nell'esempio precedente riesce $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 2$.

Conclusione 34 Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una contrazione di $[a, b]$, il sistema ha un unico punto fisso attrattivo x_* .

3.4 Punti periodici. Oscillatore

Sia \mathcal{M} una macchina ricorsiva con funzione di trasferimento $f(x)$. Abbiamo visto che se f è una contrazione, comunque prendiamo $x_0 \in X$, la successione $\{f^n(x_0)\}$ converge all'unico punto fisso x_* radice dell'equazione $f(x) = x$. Di contro, se f non è una contrazione, possono esserci punti fissi repulsivi, cioè tali che $|f'(x_*)| > 1$. Ciò premesso, assegnata una generica trasformazione f , sussiste la seguente definizione:

Definizione 35

$$x_0 \in X \text{ è un punto periodico} \iff \exists N \in \mathbb{N} - \{0\} \mid f^N(x_0) = x_0$$

L'intero naturale N si chiama **periodo** del punto x_0 . Cioè, un punto periodico di $f(x)$ di periodo N , è un punto fisso di $f^N(x)$. Deve quindi aversi:

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= f(x_0) = x_1 \\ f^2(x_0) &= f(f(x_0)) = f(x_1) = x_2 \\ f^3(x_0) &= f(f(f(x_0))) = f(x_2) = x_3 \\ &\dots \\ f^N(x_0) &= f(x_{N-1}) = x_0 \end{aligned}$$

L'insieme degli N punti

$$\Omega_N = \{P_0(x_0, x_1), P_1(x_1, x_2), \dots, P_{N-1}(x_{N-1}, x_0)\},$$

si dice **orbita periodica** di periodo N .

Osservazione 36 Ogni punto fisso attrattivo è un punto periodico di periodo unitario.

Esempio 37 Consideriamo \mathcal{M} con $f(x) = -x$. Per tale macchina ricorsiva il punto $x = 0$ è l'unico punto fisso. Per la definizione precedente, segue che $\forall x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ è punto periodico di periodo 2. Infatti, risulta

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(-x_0) = x_0$$

Più precisamente:

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= f(x_0) = -x_0 \\ f^2(x_0) &= f(f(x_0)) = f(-x_0) = x_0, \end{aligned}$$

con orbita

$$\Omega_2 = \{P_0(x_0, -x_0), P_1(-x_0, x_0)\},$$

come mostrato in fig. 3.28.

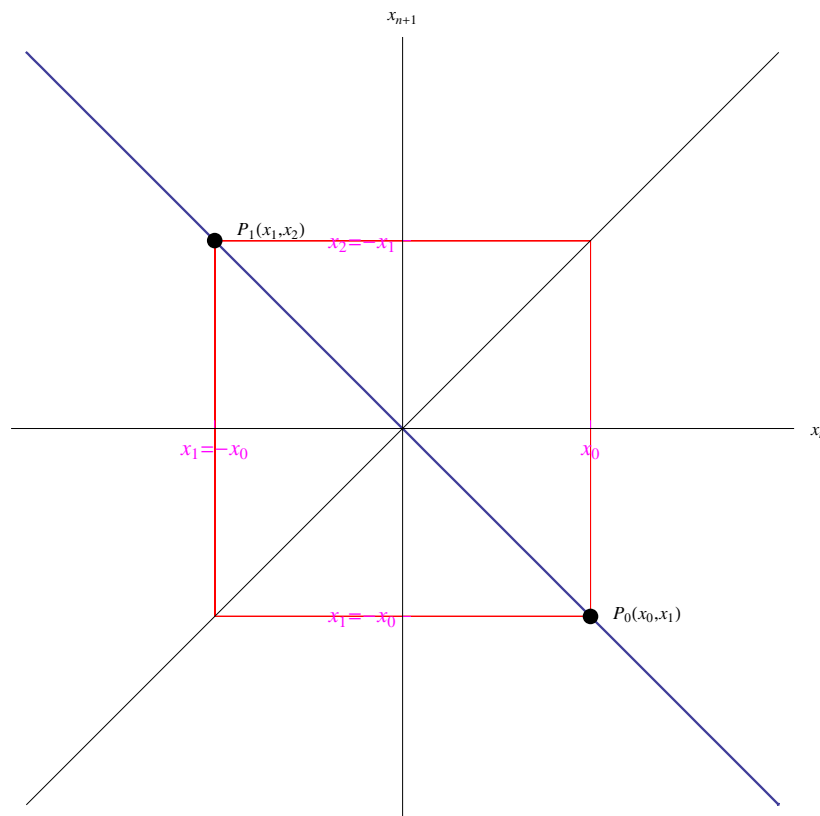


Figura 3.28: Diagramma di König-Lemmaray per la macchina ricorsiva \mathcal{M} con funzione di trasferimento $f(x) = -x$ e stato iniziale $x_0 > 0$.

Da tale esempio, vediamo che \mathcal{M} oscilla tra i punti $P_0(x_0, -x_0)$ e $P_1(-x_0, x_0)$. La corrispondente successione $\{x_n\}$ è oscillante, per cui $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} \{x_n\}$.

Questa è una proprietà generale:

$$x_0 \text{ è un punto periodico} \implies \nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

Capitolo 4

Macchine ricorsive lineari: alcune applicazioni

In questa sezione esaminiamo alcuni sistemi dinamici la cui evoluzione può essere simulata da una macchina ricorsiva lineare.

4.1 Transitorio in una serie RC

Consideriamo un condensatore di capacità C collegato in serie a una resistenza di carico R e a un generatore di segnale di ingresso $V_{in}(t)$, come mostrato nello schema di fig. 4.1. Assumiamo un segnale di ingresso costante:

$$V_{in}(t) = V_0 \mathcal{U}(t - t_0), \quad (4.1)$$

dove V_0 è una costante, mentre $\mathcal{U}(t)$ è la funzione gradino unitario:

$$\mathcal{U}(t - t_0) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq t_0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

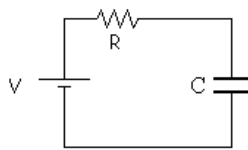


Figura 4.1: Serie RC .

La differenza di potenziale ai capi del condensatore [6] è:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C},$$

dove $q(t)$ è la carica elettrica al tempo t sulle armature del condensatore. La legge di Ohm ci fornisce la caduta di tensione ai capi della resistenza, ovvero il segnale di uscita:

$$V_{out}(t) = Ri(t),$$

dove $i(t) = \frac{dq}{dt} \equiv \dot{q}$ è l'intensità di corrente. Applicando l'equazione alla maglia (legge di Kirchoff):

$$V_C(t) + V_{out}(t) = V_{in}(t), \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Cioè:

$$\frac{q}{C} + R\dot{q} = V_0, \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

La (4.1) implica $q(t_0) = 0$ onde la carica elettrica al tempo t sulle armature del condensatore è la soluzione del problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{q} = -\frac{1}{RC}q + \frac{V_0}{R} \\ q(t_0) = 0 \end{cases}, \quad (4.2)$$

Il circuito in esame è, quindi, un sistema autonomo lineare $\dot{q} = \alpha_0 q + \beta_0$, essendo $\alpha_0 = -\frac{1}{RC} < 0$, $\beta_0 = \frac{V_0}{R} > 0$. L'unica soluzione del problema (4.2) è:

$$q(t) = q_M \left[1 - e^{-\frac{1}{\tau_c}(t-t_0)} \right], \quad (4.3)$$

dove $\tau_c \stackrel{def}{=} RC > 0$ e $q_M \stackrel{def}{=} V_0 C > 0$. La soluzione del problema di Cauchy (4.2) è, dunque, una *salita esponenziale*; la grandezza τ_c ha le dimensioni di un tempo e si chiama **costante di tempo** del circuito. La grandezza q_M è la carica elettrica a regime. Infatti:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = q_M$$

Ad esempio, per $R = 5 \Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ abbiamo una costante di tempo $\tau_c = 5 \times 10^{-6}$ s. Se tale circuito è alimentato da una f.e.m. $V_0 = 10$ V, otteniamo l'andamento riportato in fig. 4.2.

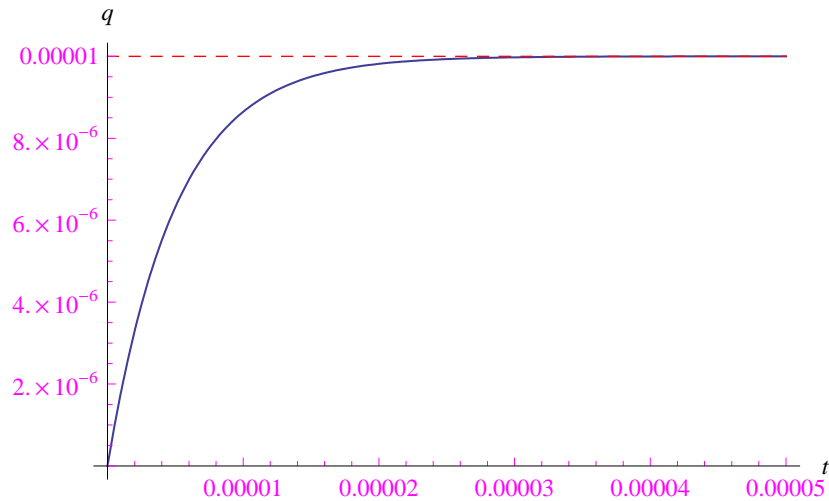


Figura 4.2: Andamento della carica elettrica $q(t)$ sulle armature del condensatore. Il circuito viene chiuso all'istante iniziale $t_0 = 0$. Il tempo è espresso in secondi, mentre la carica elettrica in Coulomb.

L'orbita di questo sistema è il seguente luogo geometrico:

$$\left\{ (q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq q \leq q_M, \dot{q} = -\frac{1}{RC}q + \frac{V_0}{R} \right\},$$

cioè il segmento della retta di equazione $\dot{q} = -\frac{1}{\tau_c}q + \frac{V_0}{R}$, come illustrato in fig 4.3, utilizzando i precedenti dati numerici. Da tale diagramma vediamo che il sistema evolve deterministicamente dallo stato iniziale $(\frac{V_0}{R}, 0)$ allo stato finale $(0, q_M)$. Si noti che quest'ultimo viene raggiunto a $t = +\infty$. In simboli:

$$\left(\frac{V_0}{R}, 0 \right) \xrightarrow{\text{evoluzione deterministica}} (0, q_M)$$

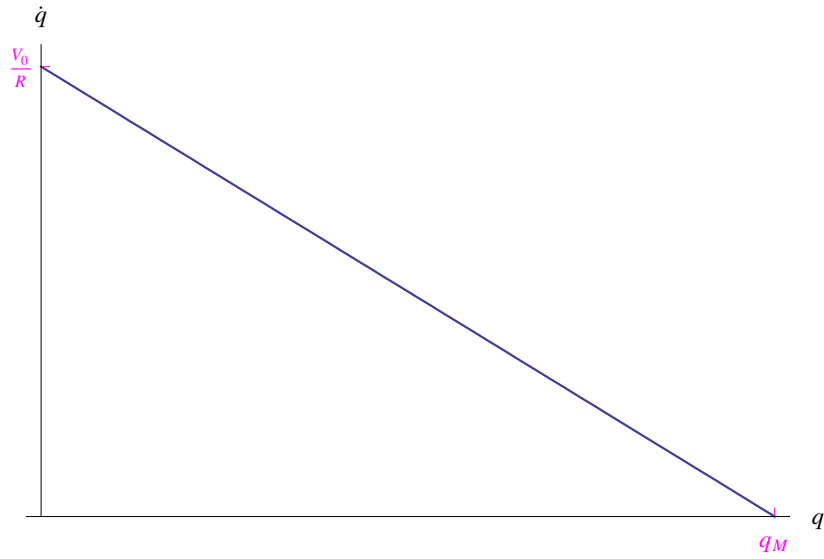


Figura 4.3: Traiettorie nello spazio delle configurazioni per un circuito RC . La derivata \dot{q} si annulla per $q = q_M$, che è il valore di regime della carica elettrica: raggiunto tale valore (a $t \rightarrow +\infty$) la carica elettrica non varia, per cui la derivata si annulla.

A questo punto appare chiaro il significato fisico della costante di tempo τ_c : tale grandezza fissa la scala dei tempi del transitorio. Infatti:

$$q(t \gg \tau_c) \simeq q_M$$

L'intensità di corrente è:

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t) = i_M e^{-t/\tau_c}, \quad (4.4)$$

dove $i_M \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_0}{R}$. Cioè, $i(t)$ è un esponenziale smorzato con costante di tempo τ_c . In fig. 4.4 riportiamo l'andamento dell'intensità di corrente in funzione del tempo per la serie RC vista in precedenza. La tensione in uscita è:

$$V_{out}(t) = Ri(t)$$

Tenendo conto della (4.4):

$$V_{out}(t) = V_M e^{-t/\tau_c}, \quad (4.5)$$

dove $V_M = Ri_M$. Infine, la tensione ai capi del condensatore è:

$$V_C(t) = V_0 (1 - e^{-t/\tau_c}) \quad (4.6)$$

A regime troviamo:

$$V_{out}(t \gg \tau_c) = 0, \quad V_C(t \gg \tau_c) = V_0$$

Per discutere il comportamento della corrispondente macchina ricorsiva lineare \mathcal{M}_Δ , è conveniente adimensionalizzare il problema passando dalle variabili (t, q) alle variabili (x, ξ) ovvero tempo adimensionale e carica adimensionale:

$$\begin{cases} x = \frac{t}{\tau_c} \\ \xi = \frac{q}{q_M} \end{cases},$$

cosicchè il problema (4.2) si scrive:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \xi' = -\xi + 1 \\ \xi(0) = 0 \end{cases}, \quad (4.7)$$

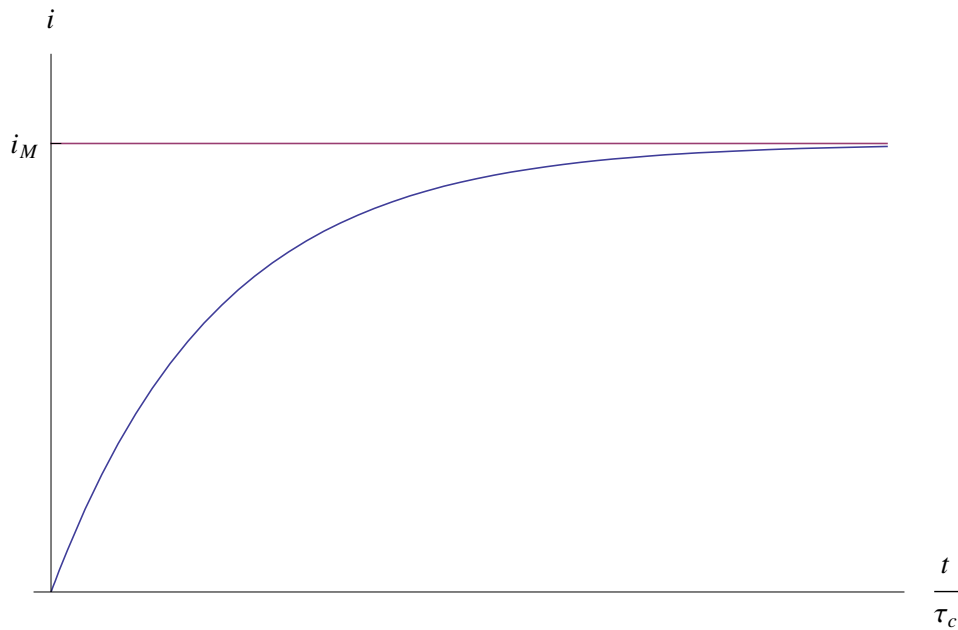


Figura 4.4: Andamento dell'intensità di corrente $i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau_c}$.

dove l'apice rappresenta la derivazione rispetto a x . Se $F(\xi) = -\xi + 1$, la corrispondente funzione di trasferimento di \mathcal{M}_Δ è $f_\Delta(x) = x + F(x) \cdot \Delta = (1 - \Delta)\xi + \xi$, ed è questa che va iterata, ottenendo l'orbita riportata in fig. 4.5, da cui vediamo che \mathcal{M}_Δ "parte" dallo stato di carica iniziale nulla ($\xi = 0$) per convergere asintoticamente verso lo stato $\xi = 1$, i.e. $q = q_M$.

4.2 Transitorio in una serie RL

Applicando la legge di Kirchhoff alle maglie:

$$Ri + V_L = V_0,$$

dove V_L è la differenza di potenziale ai capi dell'induttanza. Se L è il coefficiente di autoinduzione:

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

quindi:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0$$

Cioè l'equazione differenziale:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{V_0}{L},$$

con la condizione iniziale $i(0) = 0$. Abbiamo, dunque, il sistema autonomo lineare non omogeneo. Con la notazione delle sezioni precedenti si scrive

$$\frac{di}{dt} = -|\alpha_0|i + \beta_0$$

E il corrispondente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -|\alpha_0|i + \beta_0 \\ i(0) = 0 \end{cases},$$

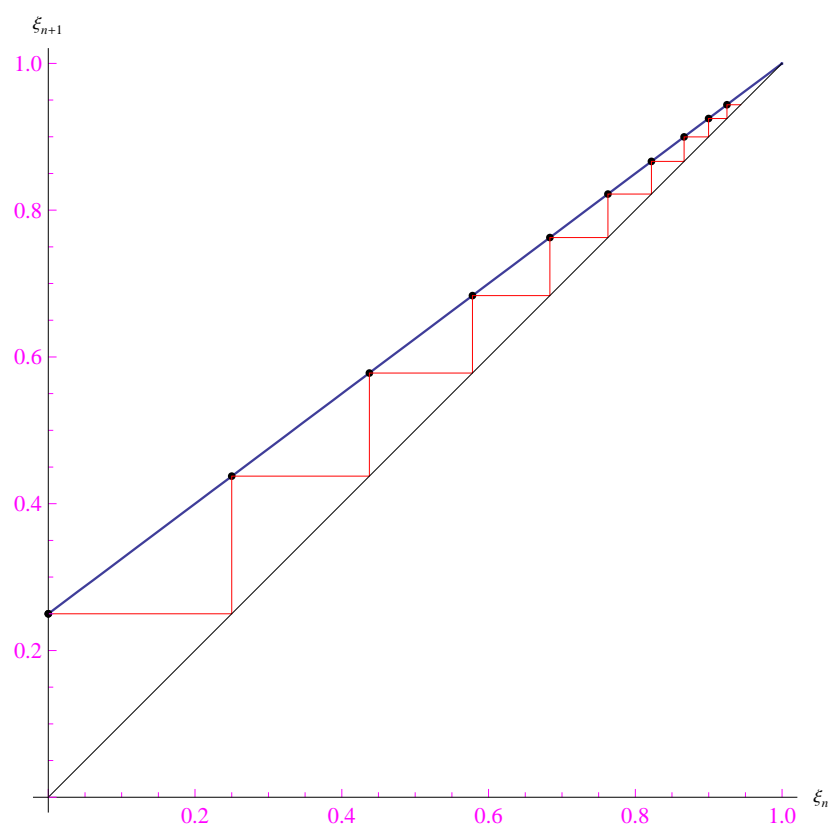


Figura 4.5: Diagramma di König-Lemaray della macchina ricorsiva che simula il processo di carica di un condensatore in serie ad una resistenza R . La grandezza ξ è la carica elettrica adimensionalizzata $\frac{q}{q_M}$.

con $\alpha_0 = -\frac{R}{L}$ e $\beta_0 = \frac{V_0}{R}$. Dalla (2.38):

$$i(t) = i_M (1 - e^{-t/\tau_c}),$$

dove la costante di tempo τ_c è data da

$$\tau_c = \frac{1}{|\alpha_0|} = \frac{L}{R},$$

mentre i_M è la corrente a regime:

$$i_M = \frac{\beta_0}{|\alpha_0|} = \frac{V_0}{R}$$

L'andamento dell'intensità di corrente in funzione di $\frac{t}{\tau_c}$ è riportato in fig.4.6.

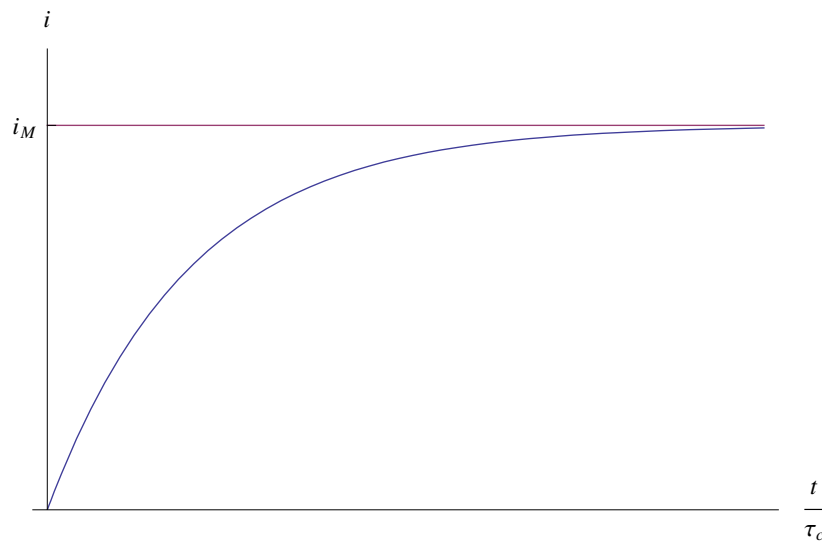


Figura 4.6: Andamento dell'intensità di corrente nella serie RL .

È istruttivo determinare l'andamento in funzione del tempo della tensione ai capi di L . Troviamo:

$$V_L(t) = V e^{-\frac{t}{\tau_c}},$$

il cui grafico è riportato in fig. 4.7.

Adimensionalizziamo il sistema eseguendo la trasformazione di coordinate (??) che in questo caso si scrive:

$$\begin{cases} x = \frac{R}{L}t \\ \xi = \frac{R}{V_0}i \end{cases},$$

per cui:

$$\frac{di}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{V_0}{L} \iff \frac{di}{dx} = -i + i_M$$

Ma $i = i_M \xi$

$$\frac{d(i_M \xi)}{dx} = -i_M \xi + i_M \iff \frac{d\xi}{dx} = 1 - \xi$$

Cioè:

$$\begin{cases} \xi' = 1 - \xi \\ \xi(0) = 0 \end{cases},$$

già analizzato nelle sezioni precedenti. Ne concludiamo che il transitorio circuitale in una serie RL è simulato dall'automa (??).

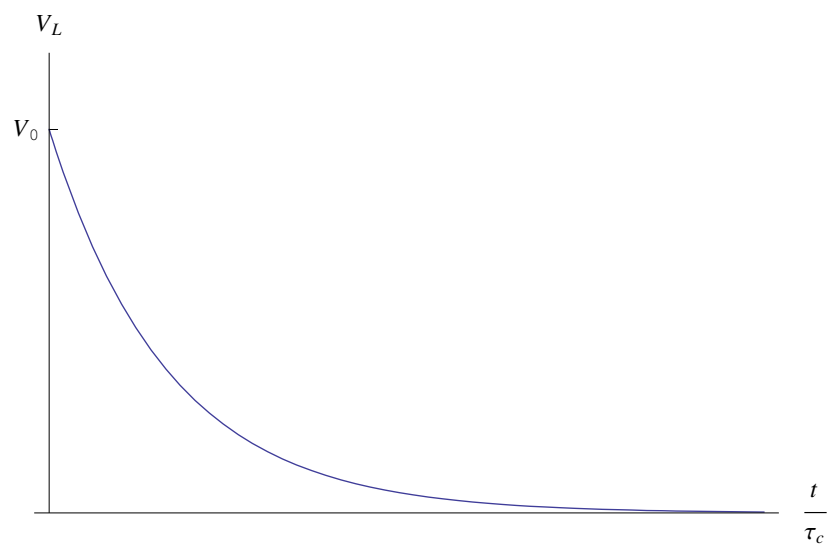


Figura 4.7: Andamento della differenza di potenziale ai capi di L .

Capitolo 5

Macchine ricorsive non lineari: la mappa logistica

Abbiamo esaminato alcuni esempi di macchine ricorsive lineari che, per quanto precede, corrispondono a equazioni differenziali $\dot{x} = F(x)$ lineari. Tuttavia, i casi più interessanti sono quelli in cui $F(x)$ è non lineare. Un caso particolare è $f(x) = \alpha x^2 - \alpha x$, dove $\alpha > 1$ è un parametro e $f(x) = x + F(x)$ è la corrispondente funzione di trasferimento. Tale macchina ricorsiva è nota come *mappa logistica*

5.1 L'equazione di Riccati

5.1.1 Problema di Cauchy

Sia dato un sistema dinamico a tempo continuo $\dot{x} = F_\alpha(x)$, dove

$$F_\alpha(x) = (\alpha - 1)x - \alpha x^2, \quad (5.1)$$

essendo $\alpha > 1$ un parametro. Abbiamo, dunque, il seguente problema di Cauchy:

$$\mathcal{P}_\alpha : \begin{cases} \dot{x} = (\alpha - 1)x - \alpha x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Osserviamo innanzitutto che se $x_0 = 0$, \mathcal{P}_α ammette la funzione identicamente nulla come unica soluzione. Similmente, se $x_0 = \frac{\alpha-1}{\alpha}$, l'unica soluzione del problema (5.2) è la funzione costante $x(t) = \frac{\alpha-1}{\alpha}$. Ciò è una conseguenza di una nota proprietà delle equazioni differenziali a variabili separabili (Appendice B.1), giacchè $x = 0, \frac{\alpha-1}{\alpha}$ sono zeri al finito di $F_\alpha(x)$.

L'equazione differenziale

$$\dot{x} = (\alpha - 1)x - \alpha x^2, \quad (5.3)$$

è nota come equazione di Riccati ed è manifestamente non lineare. Può essere resa lineare attraverso il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$, per cui sostituendo in (5.3):

$$-\frac{1}{y^2}\dot{y} = (\alpha - 1)\frac{1}{y} - \frac{\alpha}{y^2}$$

Siamo interessati ad integrali $y(t)$ non identicamente nulli, onde:

$$\dot{y} = (1 - \alpha)y + \alpha,$$

che è appunto lineare e come tale può essere integrata con il procedimento standard (cfr. § 2.3) o per separazione di variabili (cfr. B.1). Applicando il primo procedimento, otteniamo dapprima il fattore integrante:

$$I(t) = e^{-\int (1-\alpha)dt} = e^{-(1-\alpha)t}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt} [ye^{-(1-\alpha)t}] = \alpha e^{-(1-\alpha)t}$$

Integrando primo e secondo membro rispetto a t :

$$y(t, C) = -\frac{\alpha}{1-\alpha} + Ce^{-(\alpha-1)t}, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Ripristinando la variabile x :

$$x(t, C) = \frac{1}{\frac{\alpha}{\alpha-1} + Ce^{-(\alpha-1)t}},$$

che è l'integrale generale (5.3). Imponendo la condizione iniziale $x(t_0) = x_0 \neq 0$, otteniamo l'unica soluzione¹:

$$x(t) = \frac{x_0(\alpha-1)}{\alpha x_0 + (\alpha-1-\alpha x_0)e^{-(\alpha-1)(t-t_0)}} \quad (5.4)$$

Riesce:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{\alpha-1}{\alpha}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \quad (5.5)$$

per cui il grafico della soluzione del problema (5.2) ha un asintoto orizzontale; precisamente, la retta di equazione $x = \frac{\alpha-1}{\alpha} > 0$, dato che $\alpha > 1$. Inoltre, la (5.5) è indipendente da x_0 :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{\alpha-1}{\alpha} = \begin{cases} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^-, & \text{se } x_0 < \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^+, & \text{se } x_0 > \frac{\alpha-1}{\alpha} \end{cases} \quad (5.6)$$

In fig. 5.1 riportiamo la soluzione $x(t)$ per $\alpha = 3$ e per diversi valori dello stato iniziale x_0 .

5.1.2 Analisi delle soluzioni

Assumendo $t_0 = 0$, dalla (5.6) segue che il grafico γ_α della soluzione

$$x(t) = \frac{x_0(\alpha-1)}{\alpha x_0 + (\alpha-1-\alpha x_0)e^{-(\alpha-1)t}}, \quad (5.7)$$

è contenuto nella regione \mathcal{R}_α del piano cartesiano Otx :

$$\mathcal{R}_\alpha = \begin{cases} [0, +\infty) \times \left[x_0, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right), & \text{se } x_0 < \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ [0, +\infty) \times \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}, x_0\right], & \text{se } x_0 > \frac{\alpha-1}{\alpha} \end{cases}, \quad (5.8)$$

La derivata della funzione (5.7) è:

$$\dot{x}(t) = \frac{\alpha x_0(\alpha-1) \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} - x_0\right) e^{-(\alpha-1)t}}{\alpha \left[x_0 + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} - x_0\right) e^{-(\alpha-1)t}\right]^2}, \quad (5.9)$$

¹La funzione (5.1) è manifestamente lipschitziana, per cui sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz.

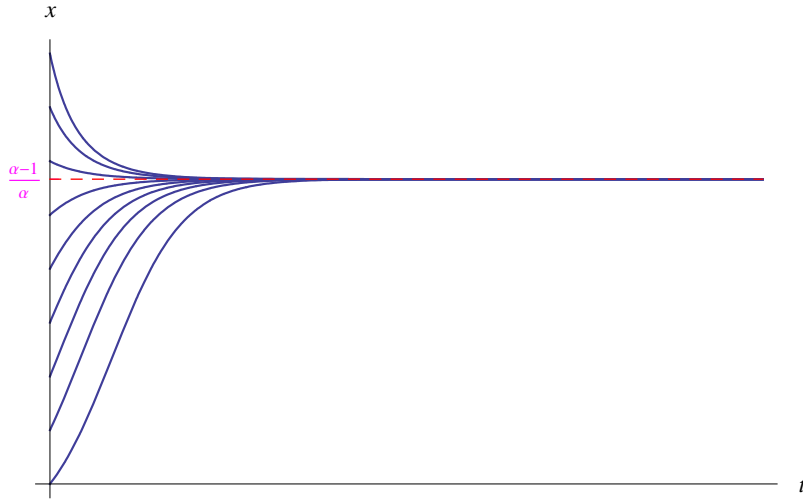


Figura 5.1: Andamento della soluzione del problema di Cauchy (5.2) per $\alpha = 3$ e per diversi valori di x_0 .

da cui vediamo che il segno di $\dot{x}(t)$ è controllato dal termine $\frac{\alpha-1}{\alpha} - x_0$:

$$\begin{aligned} x_0 < \frac{\alpha-1}{\alpha} &\implies \dot{x}(t) > 0, \quad \forall t \\ x_0 > \frac{\alpha-1}{\alpha} &\implies \dot{x}(t) < 0, \quad \forall t \end{aligned} \quad (5.10)$$

Cioè la funzione $x(t)$ è strettamente crescente se $x_0 < \frac{\alpha-1}{\alpha}$, altrimenti è strettamente decrescente. Il caso interessante è $0 < x_0 < \frac{\alpha-1}{\alpha}$, e il comportamento delle corrispondenti soluzioni può essere determinato dalla (5.3) che riscriviamo come:

$$\dot{x}(t) = (\alpha - 1) x(t) \left[1 - \frac{x(t)}{x_\infty} \right], \quad \forall t \quad (5.11)$$

essendo $x_\infty \stackrel{def}{=} \frac{\alpha-1}{\alpha}$. Riesce:

$$t \in \mathbb{R} \mid \frac{x(t)}{x_\infty} < 1 \implies \dot{x}(t) > 0, \quad \forall t$$

Cioè $x(t)$ è strettamente crescente per ogni t tale che $\frac{x(t)}{x_\infty} < 1$. Ne consegue:

$$\exists t_* < +\infty \mid x(t \ll t_*) \ll x_\infty \implies \dot{x}(t) \simeq (\alpha - 1) x(t), \quad \forall t \in [0, \delta t], \quad \text{con } \delta t \ll t_*,$$

onde:

$$x(t) = x_0 e^{(\alpha-1)t}, \quad \forall t \in [0, \delta t] \quad (5.12)$$

Conclusione 38 *Nell'intervallo di tempo $[0, \delta t]$ la grandezza $x(t)$ segue la legge esponenziale (5.12). Nel limite opposto:*

$$x(t) \xrightarrow[t \gg t_*]{} x_\infty$$

Tale conclusione è corroborata dal grafico di fig. 5.2.

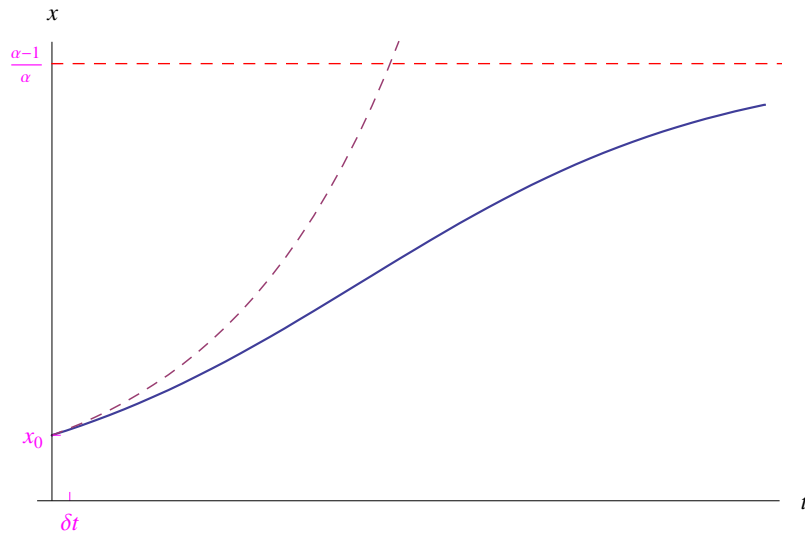


Figura 5.2: In questo grafico confrontiamola soluzione esatta del problema di Cauchy (5.2) con quella approssimata (5.12), valida in un intorno destro di $t = 0$.

Determiniamo ora l'integrale particolare che verifica la condizione iniziale $a(t_0) = t_0$. A tale scopo calcoliamo il valore della costante di integrazione (che ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza):

$$C = \frac{e^{\beta t_0}}{a_M} \left(\frac{a_M}{a_0} - 1 \right) > 0,$$

giacchè è $a_0 < a_M$. La soluzione è:

$$a(t) = \frac{a_M}{1 + \left(\frac{a_M}{a_0} - 1 \right) e^{-\beta(t-t_0)}} \quad (5.13)$$

La derivata prima è:

$$\dot{a}(t) = a_M \beta \left(\frac{a_M}{a_0} - 1 \right) \frac{e^{-\beta(t-t_0)}}{\left[1 + \left(\frac{a_M}{a_0} - 1 \right) e^{-\beta(t-t_0)} \right]^2} \quad (5.14)$$

Esaminiamo il comportamento agli estremi della soluzione (5.13). Risulta:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = a_M$$

Dallo studio del segno della derivata prima (5.14) segue che $a(t)$ è strettamente crescente in $[t_0, +\infty)$. Inoltre, dall'analisi qualitativa delle soluzioni, abbiamo visto che:

$$\exists t_* \mid a(t \ll t_*) \propto e^{\beta(t-t_0)}$$

Resta quindi confermata la legge esponenziale a tempi brevi. In fig. 5.3 è riportata la grandezza $a(t)$ (normalizzata su a_M) in funzione del tempo $t - t_0$.

La velocità di crescita di $a(t)$ è misurata dalla seguente grandezza avente le dimensioni dell'inverso di un tempo:

$$H(t) = \left| \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right| = \frac{\beta \left(\frac{a_M}{a_0} - 1 \right)}{\left(\frac{a_M}{a_0} - 1 \right) + e^{\beta(t-t_0)}} \quad (5.15)$$

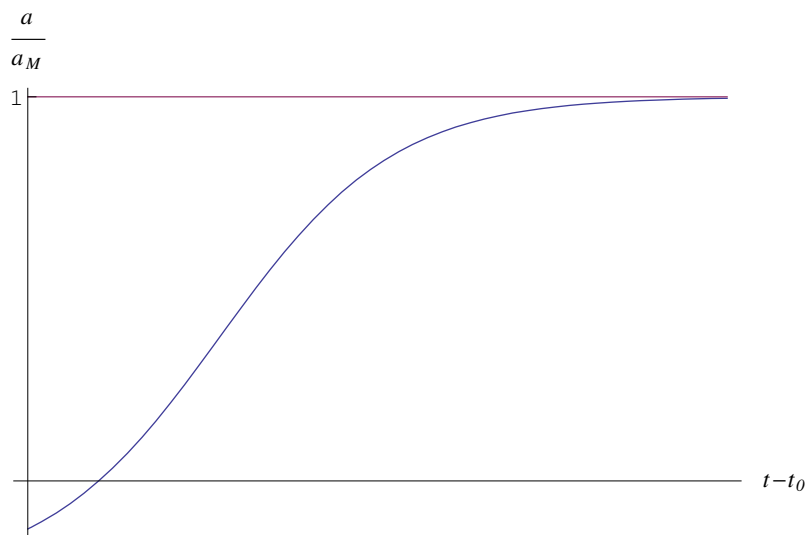


Figura 5.3: Andamento qualitativo della soluzione (5.13). Inizialmente la grandezza $a(t)$ cresce con legge esponenziale. Successivamente, la crescita rallenta e il “valore massimo a_M viene raggiunto asintoticamente.

Per $t \in (t_0, t_0 + \delta t)$:

$$a(t) \propto e^{\beta(t-t_0)},$$

Abbiamo:

$$H(t) \simeq \beta, \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \delta t) \tag{5.16}$$

Asintoticamente:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = 0,$$

come appunto c'era da aspettarsi, poichè per $t \rightarrow +\infty$, $a(t)$ tende alla costante a_M . Il tempo caratteristico del sistema è:

$$\tau_H(t) = \frac{1}{H(t)} = \frac{\left(\frac{a_M}{a_0} - 1\right) + e^{\beta(t-t_0)}}{\beta \left(\frac{a_M}{a_0} - 1\right)}$$

Per $t \in (t_0, t_0 + \delta t)$:

$$\tau_H(t) \simeq \frac{1}{\beta} \tag{5.17}$$

Appendice A

Calcolo della rotta iniziale

La navigazione del sommergibile procede per *ortodromia* [1], ovvero seguendo l'arco di circolo massimo (sulla sfera terrestre) minore di 180° che unisce i punti A e B le cui coordinate geografiche sono date dalle (1.1)-(1.2). Da questi dati è possibile determinare la grandezza M [1]:

$$\tan M = \cos \Delta\lambda \tan c_B, \quad (\text{A.1})$$

dove¹

$$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A = 61^\circ 05' W,$$

è la differenza di longitudine tra A e B , mentre

$$c_B = 90^\circ - \varphi_B = 45^\circ 44'$$

è la colatitudine del punto di arrivo B . La rotta iniziale è data da:

$$\tan R_i = \tan \Delta\lambda \sin M \sec (\varphi_A + M)$$

Sostituendo i valori delle varie grandezze si trova $R_i = N 61^\circ 33' 30'' W$. Come è noto, l'ortodromia è la distanza più breve tra due punti sulla sfera. A differenza della *lossodromia*, l'ortodromia interseca i meridiani sotto un angolo variabile, per cui il sommergibile sarà costretto a cambiare rotta con continuità. Tale problema viene risolto sostituendo all'arco di circolo massimo una opportuna spezzata lossodromica. Tipicamente, l'angolo di rotta lossodromica R_v del primo tratto di spezzata, viene fatto coincidere con R_i . Si pone, dunque, $R_v = R_i$.

¹Gli angoli (latitudine, longitudine, rotta iniziale, etc.) sono espressi in gradi primi e secondi.

Appendice B

Alcuni metodi di integrazione delle equazioni differenziali ordinarie

B.1 Integrazione per separazione di variabili

Riprendiamo l'equazione differenziale del primo ordine e di forma normale:

$$\dot{x} = F(x) \tag{B.1}$$

Abbiamo visto che il tutto “si gioca” sulla regolarità o meglio, sulla lipschitzianità della funzione $F(x)$ e, conseguentemente, della funzione $f(x) = x + F(x)$ del corrispondente sistema dinamico a tempo discreto. Inoltre, come è ben noto dalla teoria delle equazioni differenziali, la (B.1) si integra per separazione di variabili. Escludendo il caso banale in cui $F(x)$ è identicamente nulla¹, studiamo il problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{B.2}$$

Esaminiamo i seguenti casi:

1. $F(x_0) = 0$
2. $F(x_0) \neq 0$

Caso 1: x_0 è uno zero di $F(x)$. La funzione costante $x(t) \equiv x_0$ verifica l'equazione differenziale $\dot{x} = F(x)$. Infatti:

$$\frac{d}{dt}x_0 = F(x_0) \iff 0 = 0$$

Quindi $x(t) \equiv x_0$ risolve il problema di Cauchy (B.2) per qualunque istante iniziale $t_0 \in \mathbb{R}$.

Esempio 39 Sia dato il problema

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = x - 1 \\ x(t_0) = 1 \end{cases}, \tag{B.3}$$

Qui è $F(x) = x - 1$ ed è manifestamente Lipschitziana. Il punto $x_0 = 1$ è uno zero di $F(x)$ per cui la funzione costante $\xi(t) \equiv 1$ risolve il problema di Cauchy proposto. Tale soluzione è unica, in forza della Lipschitzianità di $F(x)$. Quindi:

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \xi(t) = 1 \mid \begin{cases} \dot{\xi}(t) = \xi(t) - 1 \\ \xi(t_0) = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \tag{B.4}$$

¹In tal caso l'integrale generale della (B.1) è $x(t, C) = C$, cioè una qualunque funzione costante.

La funzione di trasferimento del corrispondente sistema dinamico a tempo discreto è:

$$f(x) = 2x - 1,$$

e $x_0 = 1$ è il suo punto fisso, onde riesce $x_n = f^n(x_0) = x_0, \forall n \in \mathbb{N}$. Ne consegue che $P_*(x_*, x_*) \equiv P_0(x_0, x_0), \forall n \in \mathbb{N}$. Cioè, l'orbita del sistema si riduce al solo punto iniziale $P_0(1, 1): \Omega = \{P_0\}$, come illustrato in fig. B.1.

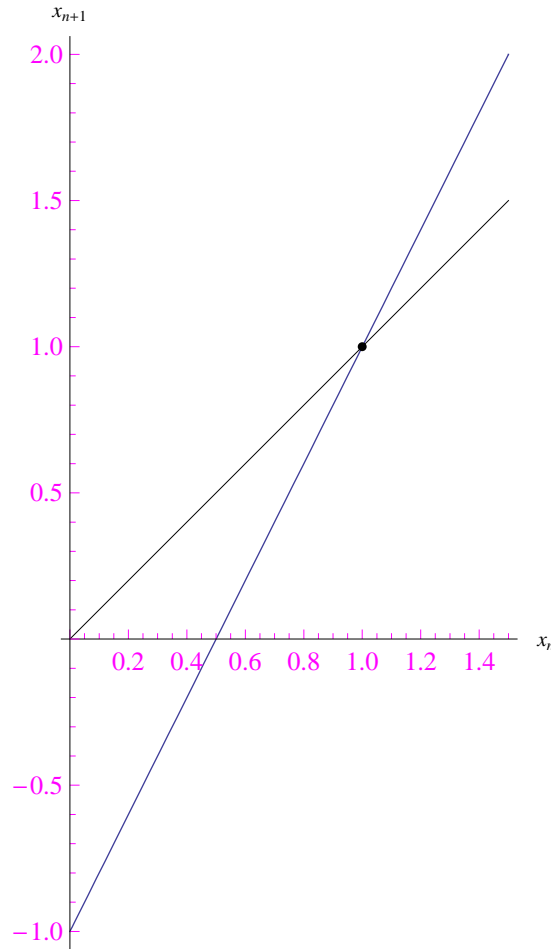


Figura B.1: Diagramma di König-Lemaray del sistema dinamico con funzione di trasferimento $f(x) = 2x - 1$ e stato iniziale $x_0 = 1$.

Caso 2. Rammentando che la lipchitzianità di $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ implica la continuità:

$$F(x_0) \neq 0 \underset{F \text{ è continua}}{\implies} \exists J_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq X \mid x \in J_\varepsilon(x_0) \implies F(x) \neq 0$$

Senza perdita di generalità, supponiamo $F(x_0) > 0$, come illustrato in fig. B.2.

Risulta:

$$\dot{x} = F(x) \iff \dot{x}(t) = F[x(t)], \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

Se esiste una funzione $x(t)$ che risolve il problema di Cauchy (B.2), necessariamente deve valere la seguente implicazione:

$$\begin{aligned} \exists J_\varepsilon(x_0) \mid \forall x \in J_\varepsilon(x_0), F(x) \neq 0 &\implies \\ \implies \exists I_{\delta_\varepsilon}(t_0) = (t_0 - \delta_\varepsilon, t_0 + \delta_\varepsilon) \mid t \in [t_1, t_2] \cap I_{\delta_\varepsilon}(t_0) &\implies x(t) \in J_\varepsilon(x_0), \end{aligned}$$

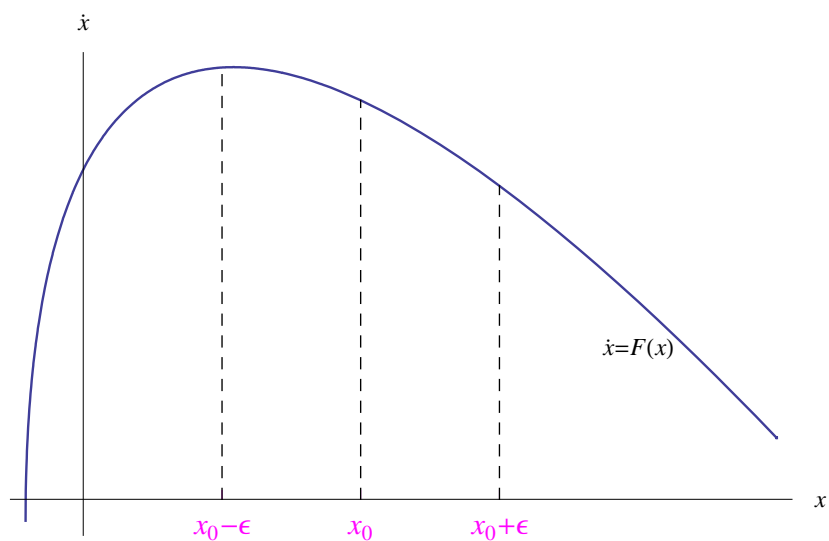


Figura B.2: Grafico della funzione $F(x)$ e determinazione di un intorno $J_\epsilon(x_0)$ tale che $F(x) > 0, \forall x \in J_\epsilon(x_0)$.

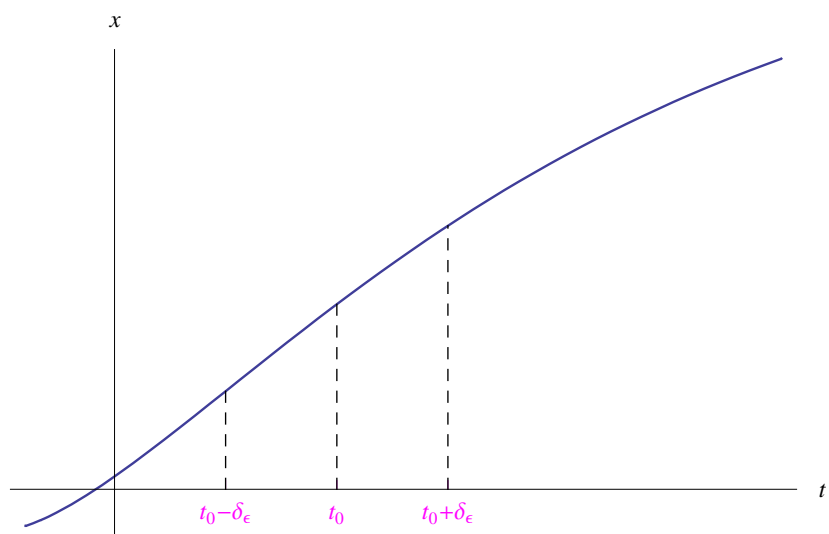


Figura B.3: All'intorno $J_\epsilon(x_0)$ corrisponde l'intorno $I_{\delta_\epsilon}(t_0)$ dove è $F[x(t)] > 0$.

come illustrato in fig. B.3.

Ciò implica:

$$\left. \begin{array}{l} \text{assegnato} \\ \text{un opportuno } \varepsilon > 0 \end{array} \right) \implies (\exists I_{\delta_\varepsilon}(t_0) \mid t \in [t_1, t_2] \cap I_{\delta_\varepsilon}(t_0) \implies F[x(t)] \neq 0$$

Quindi:

$$t \in [t_1, t_2] \cap I_{\delta_\varepsilon}(t_0) \implies \frac{\dot{x}(t)}{F[x(t)]} = 1$$

Integrando primo e secondo membro²:

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(\tau)}{F[x(\tau)]} d\tau = \int_{t_0}^t d\tau, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \cap I_{\delta_\varepsilon}(t_0)$$

Se nell'integrale a primo membro eseguiamo il cambio di variabile $t \rightarrow x = x(t)$, l'equazione precedente si scrive:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{F(\xi)} = t - t_0, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \cap I_{\delta_\varepsilon}(t_0)$$

Se $G(x)$ è una primitiva di $\frac{1}{F(x)}$:

$$G[x(t)] - G(x_0) = t - t_0$$

O ciò che è lo stesso:

$$G(x) - t - [G(x_0) - t_0] = 0, \tag{B.5}$$

Quindi, se esiste un integrale $x(t)$ che risolve il problema di Cauchy (B.2), $x(t)$ è necessariamente definito (implicitamente) dalla (B.5). Infatti, derivando la (B.5) rispetto a t :

$$G'(x) \dot{x} - 1 = 0 \implies \frac{\dot{x}}{F(x)} - 1 = 0,$$

cioè la $\dot{x} = F(x)$. Inoltre:

$$G[x(t_0)] - t_0 - [G(x_0) - t_0] = 0 \implies G[x(t_0)] = G(x_0) \implies x(t_0) = x_0$$

In pratica si procede nel seguente modo. Assegnato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

1. Si determinano le eventuali soluzioni costanti, cioè gli zeri della funzione $F(x)$.
2. Si *separano le variabili*:

$$\frac{dx}{F(x)} = dt$$

Integrando primo e secondo membro:

$$\int \frac{dx}{F(x)} = C + t,$$

²In tal caso, si dice che l'equazione differenziale viene risolta *per quadrature*. L'origine di questo termine deriva dal fatto che calcolare un integrale definito equivale a determinare un'area.

dove abbiamo incorporato in $C \in \mathbb{R}$ i valori delle costanti generate dall'integrazione indefinita a primo e secondo membro. Otteniamo:

$$G(x) = C + t$$

Tale relazione definisce implicitamente l'integrale generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = F(x)$. A questo punto si determina il valore C_0 della costante di integrazione C in modo da avere $x(t_0) = x_0$.

$$G[x(t_0)] = C_0 + t_0$$

Cioè:

$$G(x_0) = C_0 + t_0,$$

da cui:

$$C_0 = G(x_0) - t_0$$

Quindi l'integrale particolare che verifica la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ è definito implicitamente dall'equazione:

$$t = G(x_0) - t_0 + G[x(t)]$$

Esempio 40 Riprendiamo l'equazione differenziale dell'esempio 39, riferendoci al seguente problema:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = x - 1 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (\text{B.6})$$

con $x_0 \neq 1$, ma "prossimo" a 1. Separando le variabili e integrando si perviene alla seguente equazione che definisce implicitamente l'integrale generale $x(t, C)$ della $\dot{x} = x - 1$:

$$\ln|x - 1| = t + C, \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad (\text{B.7})$$

Per esplicitare la funzione $x(t, C)$, consideriamo i due casi distinti:

1. $x_0 \in (1 - \delta, 1)$ con $0 < \delta \ll 1$
2. $x_0 \in (1, 1 + \delta)$ con $0 < \delta \ll 1$

Nel caso 1 riesce

$$x(t) - 1 < 0, \quad \forall t \in [t_0, +\infty),$$

onde la (B.7) si scrive:

$$\ln(1 - x) = t + C,$$

da cui:

$$x(t, C) = 1 - e^C e^t$$

Definendo la nuova costante di integrazione $C' = e^C$, l'equazione precedente diventa:

$$x(t, C') = 1 - C' e^t, \quad \forall C' \in [0, +\infty) \quad (\text{B.8})$$

Deve essere

$$x(t_0) = x_0 \iff 1 - C' e^{t_0} = x_0,$$

onde il valore della costante di integrazione che risolve il problema (B.6) è

$$C'_0 = (1 - x_0) e^{-t_0},$$

cosicchè la soluzione del problema è

$$\xi_1(t) = 1 - (1 - x_0)e^{t-t_0} \quad (\text{B.9})$$

Quindi:

$$\xi_1(t) = 1 - (1 - x_0)e^{t-t_0} \mid \begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = \xi_1(t) - 1 \\ \xi_1(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Si noti che la (B.9) riproduce il caso $x_0 = 1$, giacchè $\xi_1(t) = 1, \forall t \in [t_0, +\infty)$. Dalla (B.9):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_1(t) = -\infty$$

Il grafico della soluzione $\xi_1(t)$ è riportato in fig. B.4.

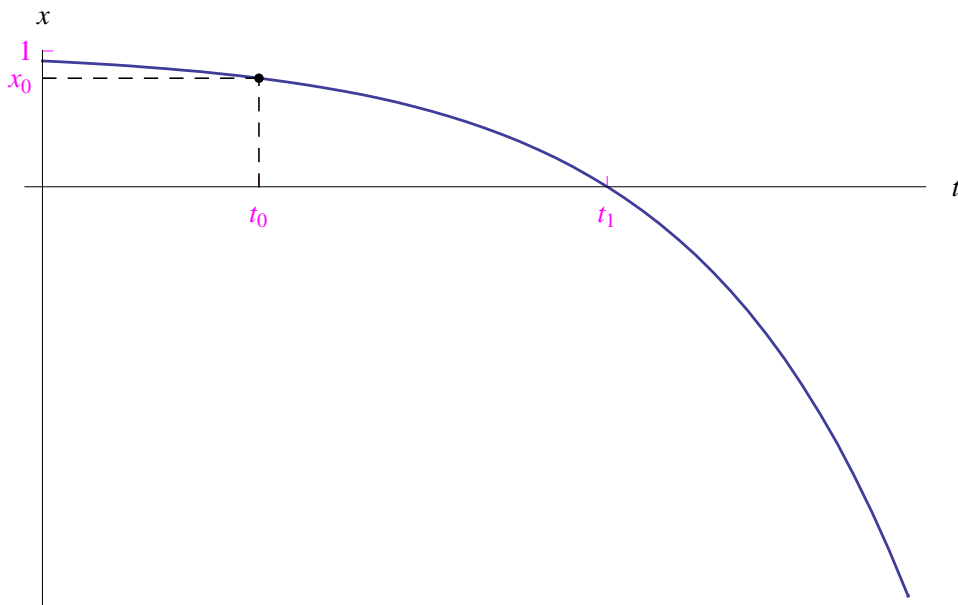


Figura B.4: Grafico della soluzione del problema di Cauchy (B.6) con $x_0 \in (1 - \delta, 1)$.

Nel caso 2 la (B.7) si scrive:

$$\ln(x - 1) = t + C,$$

da cui

$$x(t, C') = 1 + C'e^t,$$

dove $C' = e^C$. Imponendo la condizione iniziale $x(t_0, C') = x_0$ si trova la soluzione per questo secondo caso, e cioè:

$$\xi_2(t) = 1 + (x_0 - 1)e^{t-t_0},$$

riuscendo:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_1(t) = -\infty$$

E il cui grafico è riportato in fig. B.5.

Passando al corrispondente sistema dinamico a tempo discreto, si ha che la funzione da iterare è:

$$f(x) = 2x - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Assumendo $x_0 \in (1 - \delta, 1)$, si ottiene l'evoluzione dinamica graficata in fig. B.6, da cui vediamo che lo stato del sistema si allontana definitivamente da x_0 per tendere a $-\infty$. Tale comportamento è in accordo con il corollario (33), giacchè è $f'(x) > 1$.

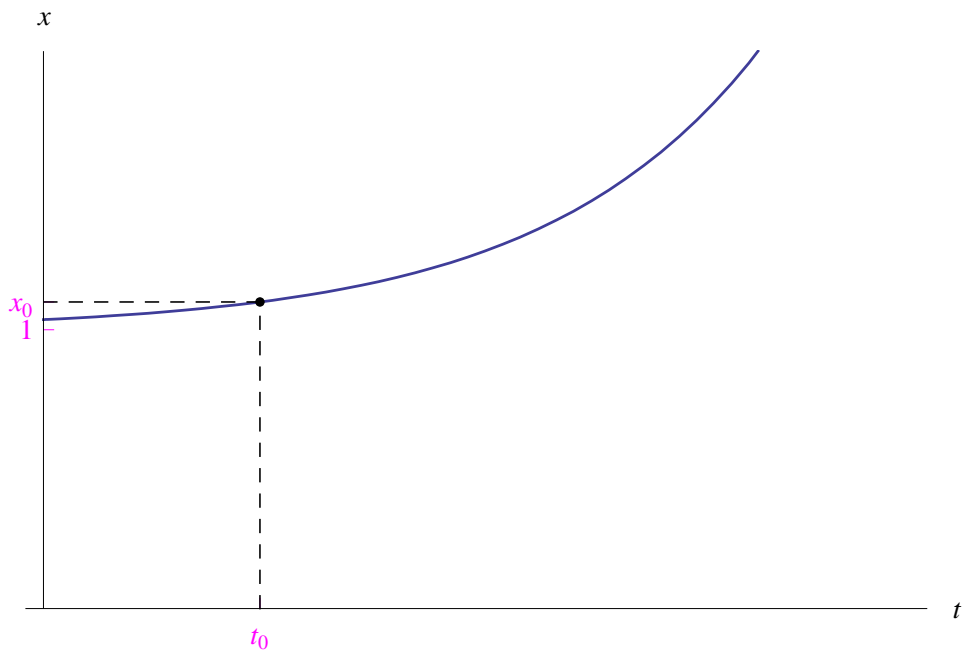


Figura B.5: Grafico della soluzione del problema di Cauchy (B.6) con $x_0 \in (1, 1 + \delta)$.

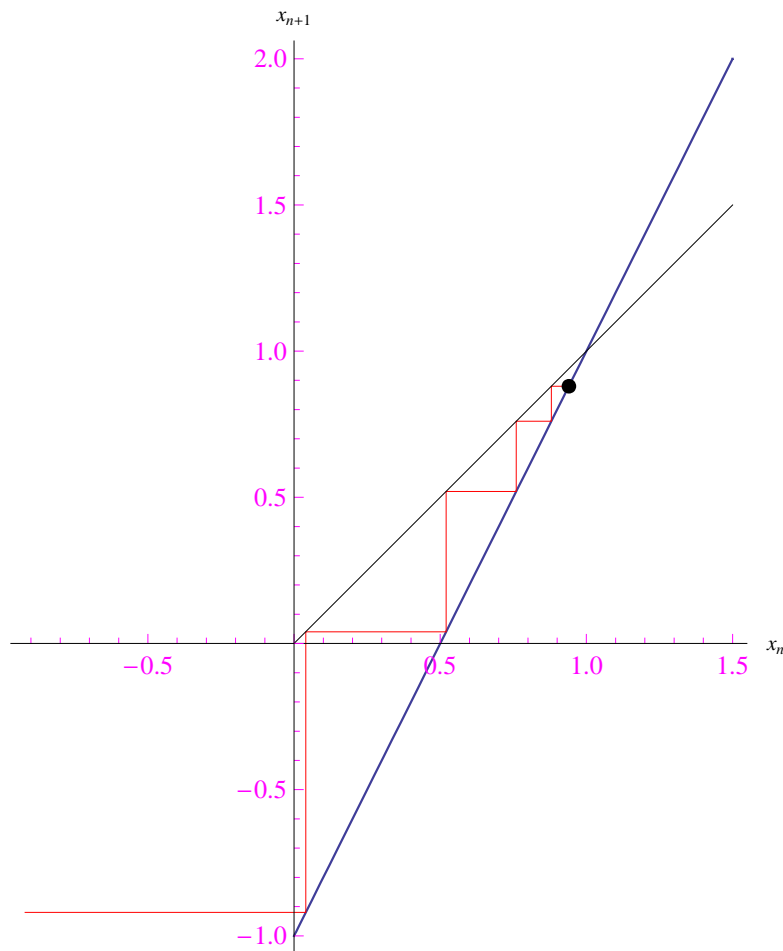


Figura B.6: Diagramma di König-Lemary del sistema dinamico con funzione di trasferimento $f(x) = 2x - 1$ e stato iniziale $x_0 = 1$.

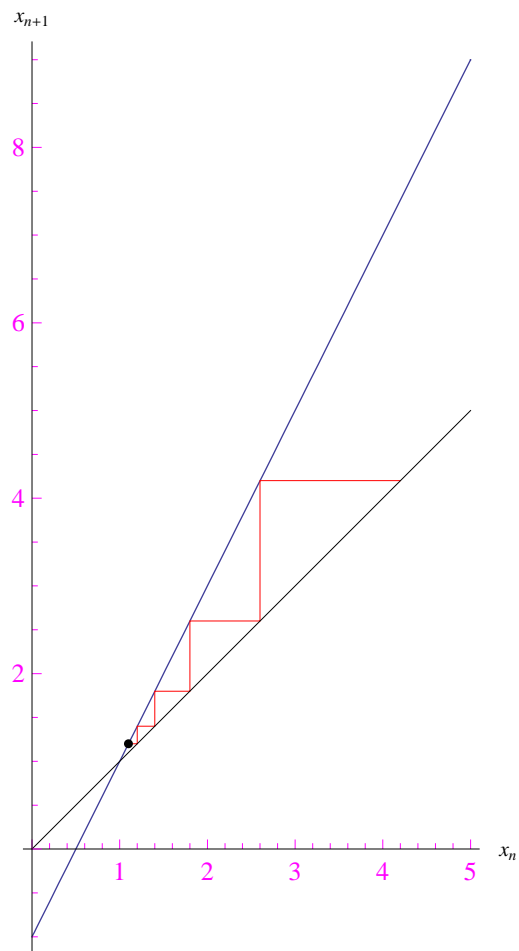


Figura B.7: Diagramma di König-Lemary del sistema dinamico con funzione di trasferimento $f(x) = 2x - 1$ e stato iniziale $x_0 = 1$.

Una conclusione analoga per $x_0 \in (1, 1 + \delta)$, come illustrato in fig. B.7, da cui vediamo che lo stato del sistema si allontana definitivamente da x_0 per tendere a $+\infty$.

Dal corollario 30 segue che comunque prendiamo una contrazione f di $[a, b]$, la successione di funzioni iterate $\{f^n(x)\}$ converge alla funzione costante. Ci proponiamo ora di studiare il comportamento della successione $\{f^n(x)\}$ nel caso in cui f non sia una contrazione o, al più, è una contrazione locale. Consideriamo il caso più semplice, cioè quello di un sistema lineare:

$$f(x) = \alpha x + \beta, \tag{B.10}$$

con $|\alpha| > 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Ne consegue che comunque prendiamo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, si ha che (B.10) non è una contrazione di $[a, b]$. Iteriamo la funzione (B.10) a partire da x_0 :

$$\begin{aligned} f^0(x) &= \alpha x + \beta & (B.11) \\ f^1(x) &= \alpha^2 x + \beta(\alpha + 1) \\ f^2(x) &= \alpha^3 x + \beta(\alpha^2 + \alpha + 1) \\ &\dots \\ f^n(x) &= \alpha^{n+1} x + \beta(\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + \alpha + 1), \end{aligned}$$

da cui vediamo che $f^n(x)$ è ancora una funzione lineare il cui grafico ha coefficiente angolare α^{n+1} , per cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = +\infty$. Ne concludiamo che nel caso della funzione lineare (B.10) la successione $\{f^n(x)\}$ non converge.

Esaminiamo il caso della trasformazione (3.45) che qui riscriviamo:

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in [0, 1]$$

Bibliografia

- [1] Capasso I., Fede S., 1976. *Navigazione*. Hoepli
- [2] Fiorenza R., Greco D. 1978. *Lezioni di Analisi Matematica*. Liguori Editore.
- [3] Ghizetti A., 1978. *Lezioni di Analisi matematica*. Vol. II. Veschi
- [4] Arbib. Brains M. A., 1987. *Machines and Mathematics*, McGraw-Hill.
- [5] Wagon S., 1995, *Guida a Matematica*, McGraw-Hill.
- [6] Edminister J.A, 1992. *Circuiti elettrici*. Etas