Esercizio di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Studiare il comportamento della funzione*

$$f(x) = \frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\sinh\left(\frac{a}{x}\right)}, \quad (a > 0) \tag{1}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione

La funzione è definita in X tale che

$$\frac{1+x}{x} > 0, \tag{2}$$

cioè

$$X = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \tag{3}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{\ln(0^+)}{\sinh(-a)} = -\frac{-(\infty)}{\sinh(a)} = +\infty, \tag{4}$$

cosicché la funzione diverge positivamente per $x \to -1^-$. Conseguentemente, la retta $x+1 = 0$ è asintoto verticale a destra per il grafico di f. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\ln(+\infty)}{\sinh(+\infty)} = \frac{\infty}{\infty} \tag{5}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{1}{x}, \tag{6}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to +\infty} \frac{\ln(t+1)}{\sinh(at)} = \frac{\infty}{\infty} \tag{7}$$

Applichiamo la regola di De L'Hopital

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t+1)}{\sinh(at)} \overset{\text{H}}{=} \frac{1}{a} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(t+1)\cosh(at)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+, \tag{8}$$

onde

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+ \tag{9}$$

Cioè la funzione è infinitesima per $x \to 0^+$. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} \tag{10}$$

Con il cambio di variabile precedente:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t+1)}{\sinh(at)} \\ &= \frac{1}{a} \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t+1)}{t} \cdot \lim_{t\to 0^+} \frac{at}{\sinh(at)} \end{aligned} \tag{11}$$

Abbiamo così fattorizzato il limite nel prodotto dei limiti fondamentali:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln (t+1)}{t} = \frac{1}{\ln e} = 1, \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{at}{\sinh (at)} = 1$$

Ne consegue

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{a} \tag{12}$$

Utilizzando il medesimo artificio

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{a}, \tag{13}$$

ovvero la retta $y = \frac{1}{a}$ è asintoto orizzontale per il grafico di f (fig. 1)

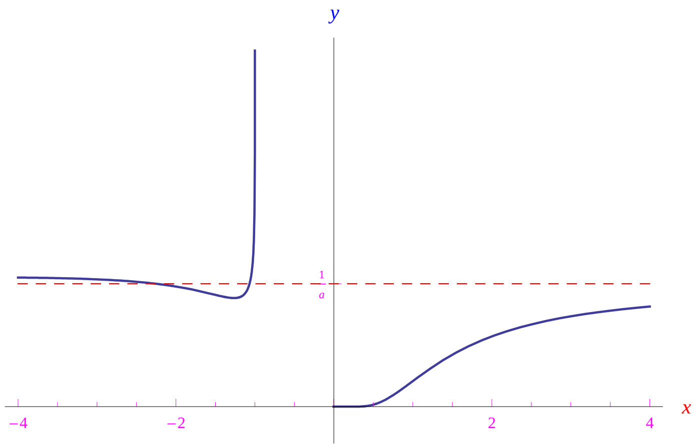

Figura 1: Diagramma cartesiano della funzione (1).