Appunti di Fisica 1

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

1 Campi localmente conservativi

Esercizio 1 *Un punto materiale è vincolato a muoversi sul piano cartesiano xy sede del campo di forze*

$$\mathbf{F}(x,y)=\varepsilon\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}\right), \tag{1}$$

dove $\varepsilon>0$ è una costante con le dimensioni di una energia.

È conservativo il campo (1)?

Soluzione

Le componenti cartesiane della forza sono:

$$F_x(x,y)=-\varepsilon\frac{y}{x^2+y^2},\quad F_y(x,y)=\varepsilon\frac{x}{x^2+y^2} \tag{2}$$

Tali funzioni sono definite nel campo connesso $E=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, che è manifestamente non semplicemente connesso. Studiamo il comportamento di tali funzioni in un intorno di $(0,0)$. Dobbiamo calcolare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}F_x(x,y)=-\varepsilon\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{x^2+y^2} \tag{3}$$

Passando a coordinate polari nel piano: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}F_x(x,y)=-\varepsilon\sin\varphi\lim_{r\to0^+}\frac{1}{r}=\begin{cases}-\varepsilon\cdot(+\infty)=-\infty, & \text{se }\sin\varphi>0\\ -\varepsilon\cdot(-\infty)=+\infty, & \text{se }\sin\varphi<0\end{cases}$$

Cioè dipende dalla direzione secondo cui ci avviciniamo al punto di accumulazione $(0,0)$. Ne segue che il limite (3) non esiste. Analoga conclusione per l'altra componente della forza. Quindi $(0,0)$ è una singolarità per tali funzioni. In fig. riportiamo il grafico di $F_x(x,y)$.

D'altra parte il campo vettoriale assegnato è irrotazionale, giacché

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Proviamo quindi a trovare la più generale primitiva $U(x,y)$, i.e. il potenziale da cui deriva la forza $\mathbf{F}$. Deve essere

$$\frac{\partial U}{\partial x}=F_x,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=F_y \tag{4}$$

Utilizziamo la seconda delle (4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y}=\varepsilon\frac{x}{x^2+y^2}&\Longrightarrow U(x,y)=\varepsilon x\int\frac{dy}{x^2+y^2}\\ &=\varepsilon\int\frac{d(y/x)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\varepsilon\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+f(x)\end{aligned}$$

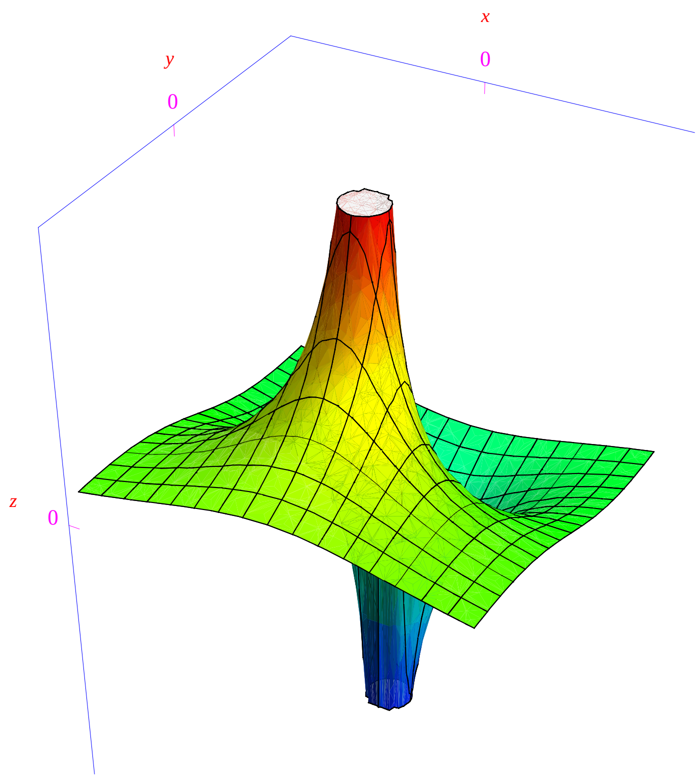

Figura 1: Esercizio (??). Grafico della componente $F_x\left(x,y\right)$ della forza. Si noti la singolarità nell'origine.

Dalla prima delle (4)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial x}=-\varepsilon\frac{y}{x^2+y^2}\\
&\Longleftrightarrow -\varepsilon\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f'(x)=-\varepsilon\frac{y}{x^2+y^2}\\
&\Longleftrightarrow f'(x)=0\Longleftrightarrow f(x)=C,\quad \forall C\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$U(x,y)=\varepsilon\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+C$$

Assumendo nullo il potenziale lungo l'asse y (zero dell'energia potenziale) si ha

$$U(x,y)=\varepsilon\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

e quindi l'energia potenziale

$$V(x,y)=-\varepsilon\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\tag{5}$$

Osserviamo innanzitutto che la funzione (5) non è continua su tutto il campo E, ma in un suo sottoinsieme (in fig. 2 riportiamo il grafico di $U(x,y)$). Precisamente:

$$E'=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0,\ \ -\infty<y<+\infty\right\},$$

Proviamo allora a calcolare il lavoro eseguito dalle forze del campo nello spostamento del punto materiale lungo una circonferenza di centro l'origine e raggio R:

$$L=\oint_{+\gamma}F_x dx+F_y dy=-\varepsilon\oint_{+\gamma}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$$

Una rappresentazione parametrica di tale luogo geometrico è

$$x=R\cos\theta,\ \ y=R\sin\theta,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
L&=-\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{R(\sin\theta)\cdot(-R\sin\theta)-R\cos\theta(\cos\theta)}{R^2}d\theta\\
&=\varepsilon\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\varepsilon
\end{aligned}$$

cioè il campo di forze assegnato non è conservativo. Ciò è una conseguenza della topologia di E (campo connesso ma non semplicemente connesso) a causa della singolarità in $(0,0)$. Possiamo aggirare tale singolarità e le discontinuità di $V(x,y)$ sull'asse y, riferendoci alla restrizione di $V(x,y)$ ai semipiani $x>0$ e $x<0$, in ciascuno dei quali preso separatamente, il campo è conservativo. Diremo dunque, che il campo è *localmente conservativo*: il lavoro svolto lungo un qualunque percorso chiuso contenuto in uno dei predetti semipiani, è nullo.

***

Il seguente esercizio mostra che la richiesta di connessione lineare semplice, è una condizione sufficiente ma non necessaria per l'integrabilità di una forma differenziale lineare.

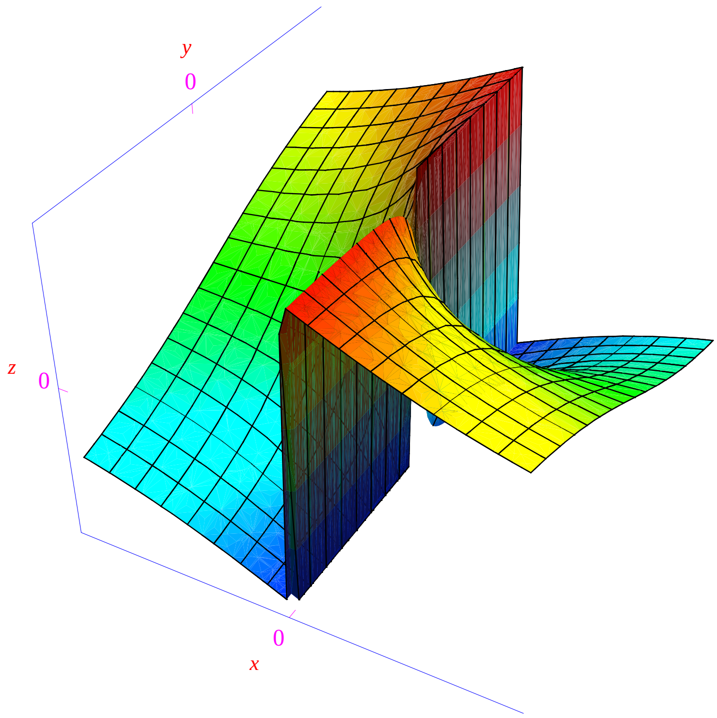

Figura 2: Grafico dell'energia potenziale *(5)*.