Limiti di funzioni trigonometriche

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cot x - 1}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Procediamo nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\frac{1}{\tan x} - 1} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x (\tan x - 1)}{1 - \tan x} \\
&= - \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x = -1
\end{aligned}$$

Esercizio 2 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Eseguendo il cambio di variabile $t = 1 - x$ si ha $\tan \frac{\pi x}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2} \right) = \cot \frac{\pi t}{2}$, onde:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{t \to 0} t \cot \frac{\pi t}{2} \\
&= \frac{2}{\pi} \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\pi t}{2}}{\tan \frac{\pi t}{2}} \\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Esercizio 3 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to 0} \cot 2x \cot \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Osservando che $\cot \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \tan x$, si ha:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\tan 2x} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\tan 2x} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 4 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin 2x}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\pi} = \frac{0}{0}$$

Per rimuovere la forma indeterminata sviluppiamo $\sin 2x$ con le formule di duplicazione degli archi:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\sin x\cos x}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 5 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere l'indeterminazione sviluppiamo il numeratore $\sin x - 1 = \sin x - \sin\frac{\pi}{2}$ con le formule di prostafaresi:

$$\sin x - \sin\frac{\pi}{2} = 2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

per cui:

$$\begin{aligned}\lambda &= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 2\sin 0 = 2\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Esercizio 6 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}, \quad (a\in\mathbb{R}-\{0\})$$

Soluzione. Il limite si calcola a partire dal limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, eseguendo il cambio di variabile $t = ax$:

$$\lambda = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{t}{a}} = a\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = a$$

Esercizio 7 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}, \quad (a,b\in\mathbb{R}-\{0\},\ a\neq b)$$

Soluzione. Anche questo limite si calcola a partire dal limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\right)\\ &= \frac{a}{b}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}\right)\\ &= \frac{a}{b}\cdot 1\cdot 1 = \frac{a}{b}\end{aligned}$$

Esercizio 8 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \frac{1-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0}$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos x} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x - \cos x} \right) \\ &= - \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Esercizio 9 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin^2 x - \sin^2 x_0}{x - x_0}, \quad (x_0 \in \mathbb{R})$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere l'indeterminazione espandiamo il numeratore:

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{(\sin x - \sin x_0)(\sin x + \sin x_0)}{x - x_0}$$

Il termine che produce l'indeterminazione è $\sin x - \sin x_0$ che può essere sviluppato con le formule di prostaferesi:

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right) \cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right),$$

per cui

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{2 \sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right) \cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right)}{x - x_0} (\sin x + \sin x_0) \right] \\ &= 2 \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{\sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right)}{\frac{x - x_0}{2}}}_{=1} \cdot \lim_{x \to x_0} \left[\cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right) (\sin x + \sin x_0) \right] \end{aligned}$$

Il secondo limite a secondo membro è:

$$\lim_{x \to x_0} \left[\cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right) (\sin x + \sin x_0) \right] = 2 \cos x_0 \sin x_0 = \sin 2x_0$$

Quindi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin^2 x - \sin^2 x_0}{x - x_0} = \sin 2x_0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Esercizio 10 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - \sin x}{1 - \cos x + \sin x}$$

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, giacchè

$$\lambda = \frac{1-1-0}{1-1+0} = \frac{0}{0}$$

Dalle formule di duplicazione:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Longrightarrow \cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \Longrightarrow \sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

onde:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{1-1+2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1-1+2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}} \\ &= \frac{0-1}{0+1} = -1\end{aligned}$$

Alternativamente, possiamo esprimere $\sin x$ e $\cos x$ come funzione razionale di $\tan\frac{x}{2} \stackrel{def}{=} t$. In altri termini, utilizziamo le formule parametriche:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t\to 0} \frac{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}}{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1+t^2-1+t^2-2t}{1+t^2-1+t^2+2t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t-1}{t+1} = -1\end{aligned}$$

Esercizio 11 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x - \cos x + \sin x \cos x}{1 - \sin x + \cos x - \sin x \cos x}}$$

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, giacchè

$$\lambda = \frac{1-0-1+0}{1-0+1-0} = \frac{0}{0}$$

Eseguendo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{2} - x$:

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t, \ \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t,$$

per cui

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t - \sin t + \cos t \sin t}{1 - \cos t + \sin t - \cos t \sin t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t - \sin t\,(1-\cos t)}{1-\cos t + \sin t\,(1-\cos t)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\sin t}{1+\sin t} = \frac{1-0}{1+0} = 1\end{aligned}$$

Esercizio 12 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sin x - \cos x + \sin x \cos x}{1-\sin x + \cos x - \sin x \cos x}}$$

Soluzione.
Anche qui il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sin x - \cos x\,(1-\sin x)}{1-\sin x + \cos x\,(1+\sin x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sin x)\,(1-\cos x)}{(1-\sin x)\,(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-1}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

Esercizio 13 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sin x - \cos x + \sin x \cos x}{1+\sin x - \cos x - \sin x \cos x}}$$

Soluzione.
Per rimuovere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ scriviamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sin x - \cos x\,(1-\sin x)}{1+\sin x - \cos x\,(1+\sin x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sin x)\,(1-\cos x)}{(1+\sin x)\,(1-\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{1-0}{1+0} = 1
\end{aligned}$$

Esercizio 14 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$$

Soluzione.
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \frac{0-\sin 0}{0+\sin 0} = \frac{0}{0}$$

Scriviamo

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} \\
&= \frac{1-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \\
&= \frac{1-1}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

Esercizio 15 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x}$$

Soluzione.

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \frac{0 - \sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Scriviamo

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) \\ &= 1 - \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \\ &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

Esercizio 16 *Dimostrare*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\lambda - 1)\, x + \tan x}{\sin x + \tan^2 x} = \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Soluzione.

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \to 0} \frac{(\lambda - 1)\, x + \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \left[(\lambda - 1) \frac{x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right]}{\sin x \left(1 + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{(\lambda - 1) \frac{x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos^2 x}} = \\ &= \frac{\lambda - 1 + 1}{1} = \lambda\end{aligned}$$

Esercizio 17 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos^2 x}{2 \sin x \,(1 - \sin x)}$$

Soluzione

Anche qui abbiamo la forma indeterminata $0/0$. Eseguiamo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{2} - x$, per cui $\cos x = \sin t$, $\sin x = \cos t$:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t \to 0} \frac{3 \sin^2 t}{2 \cos t \,(1 - \cos t)} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sin^2 t}{t^2}}{\cos t \left(\frac{1 - \cos t}{t^2}\right)} \\ &= \frac{3}{2} \frac{\lim_{t \to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2}{\lim_{t \to 0} \cos t \cdot \lim_{t \to 0} \left(\frac{1 - \cos t}{t^2}\right)} \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{2}} = 3\end{aligned}$$

Esercizio 18 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Dividiamo numeratore e denominatore per x^2:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}}{\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$$

Ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1,$$

per cui

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

Esercizio 19 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Dividiamo numeratore e denominatore per x^2:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\sin x}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Esercizio 20 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x \sin x \cos x}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ci conviene espandere il numeratore in $(1-\cos x)(1+\cos x)$, comprimere il denominatore in $\frac{\sin 2x}{2}$, per poi dividere numeratore e denominatore per x^2:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x \cdot \frac{\sin 2x}{2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2}}{\frac{\sin 2x}{2x}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \lim_{x\to 0} (1+\cos x)}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{1} = 1
\end{aligned}$$

Esercizio 21 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin x \cos x}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ci conviene espandere il numeratore in $(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos x^2\right)$, comprimere il denominatore in $\frac{\sin 2x}{2}$, per poi dividere numeratore e denominatore per x^2:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos x^2\right)}{x\cdot\frac{\sin 2x}{2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos x^2\right)}{x^2}}{\frac{\sin 2x}{2x}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}\left(1+\cos x+\cos x^2\right)}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot 3}{1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 22 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{9}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{9}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Esercizio 23 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}} \\
&= \frac{1}{\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 24 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Infatti ricordando l'arco notevole $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$:

$$\lambda=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t=x-\frac{\pi}{3}$:

$$\lambda=\lim_{t\to 0}\frac{1-2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin t}$$

Espandiamo $\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$ con le formule di addizione:

$$\lambda=\lim_{t\to 0}\frac{1-2\cos t\cos\frac{\pi}{3}+2\sin t\sin\frac{\pi}{3}}{\sin t}$$

Ma $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, per cui

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}{\sin t}\\&=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)+\sqrt{3}\end{aligned}$$

Il limite a secondo membro è:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\sin t}{t}}=\frac{0}{1}=0,$$

per cui

$$\lambda=0+\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

Esercizio 25 *Calcolare:*

$$\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot\sin\frac{x}{2}}{1-\cos x}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Dividiamo numeratore e denominatore per x^2:

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}\\&=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}\\&=\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1\end{aligned}$$

Alternativamente tenendo conto della relazione $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ che si ottiene dalle formule di duplicazione del coseno, si ha:

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}}=1\end{aligned}$$

Esercizio 26 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x - 2\cos^2 x}{x\sin x}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Riduciamo in fattori il numeratore:

$$1+\cos x - 2\cos^2 x = (2\cos x + 1)(1-\cos x),$$

per cui:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{(2\cos x + 1)(1-\cos x)}{x\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(2\cos x+1)(1-\cos x)}{x^2}}{\frac{\sin x}{x^2}} \\ &= \frac{3\cdot\frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Alternativamente, possiamo scrivere $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, onde:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x - 2\cos^2 x}{x\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos x}{x\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x\,(1-\cos x)}{x\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{x^2} + \cos^2 x\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{1+1\cdot\frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 27 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{1-\cos x}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \\ &= 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

Esercizio 28 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\tan x - \sin x}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cos x}{\sin x\,(1-\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x^2}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}} \\
&= \frac{1}{1\cdot\frac{1}{2}} = 2
\end{aligned}$$

Esercizio 29 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)^2}{\cos x}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Conviene eseguire il cambio di variabile:

$$t = \frac{\pi}{2} - x \Longrightarrow \sin x = \cos t,\ \cos x = \sin t,$$

e $t \to 0$ per $x \to \frac{\pi}{2}$, cosicchè il limite diventa:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{t\to 0} \frac{(1-\cos t)^2}{\sin t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(1-\cos t)^2}{t}}{\frac{\sin t}{t}} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\left(\frac{1-\cos t}{\sqrt{t}}\right)^2}{\frac{\sin t}{t}}
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sqrt{t}} &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t}\sqrt{t}\right) \\
&= \underbrace{\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)}_{=0}\lim_{t\to 0}\sqrt{t} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde $\lambda = 0$. Alternativamente, possiamo utilizzare le formule parametriche

$$t = \tan\frac{x}{2},\ \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

e $t \to 1$ per $x \to \frac{\pi}{2}$, sicchè:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{t\to 1} \frac{\left(1-\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= -\lim_{t\to 1} \frac{t^4-4t^3+6t^2-4t+1}{(t-1)(t+1)}
\end{aligned}$$

Ma $t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = (t^3 - 3t^2 + 3t - 1)(t - 1)$, per cui

$$\begin{aligned}\lambda &= -\lim_{t\to 1} \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t+1} \\ &= -\frac{1-3+3-1}{2} = 0\end{aligned}$$

Esercizio 30 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}{\cos x\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

Osservando che $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 x} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}{1-\sin^2 x} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}{(1-\sin x)(1+\sin x)} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{1+\sin x} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 31 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0^+} (\ln x - \ln\sin 2x)$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x}{\sin 2x}\right) = \ln \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin 2x} \\ &= \ln \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{2}\right) \\ &= \ln\frac{1}{2} = -\ln 2\end{aligned}$$

Esercizio 32 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x\,(1-\sin x)$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Conviene eseguire il cambio di variabile:

$$t = \frac{\pi}{2} - x \Longrightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cot t, \ \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$$

cosicchè

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t \to 0} \cot t \, (1 - \cos t) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{\tan t} = \frac{0}{0}\end{aligned}$$

Dividendo numeratore e denominatore per t:

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\tan t}{t}} = \frac{0}{1} = 0$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x \, (1 - \sin x) \, (1 + \sin x)}{1 + \sin x} \\ &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x \left(1 - \sin^2 x\right)}{1 + \sin x} \\ &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x \cos^2 x}{1 + \sin x} \\ &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin x} \\ &= \frac{1 \cdot 0}{1 + 1} = 0\end{aligned}$$

Esercizio 33 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin^2 x + \sin x - 4}{x - \frac{\pi}{2}}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Conviene eseguire il cambio di variabile:

$$t = \frac{\pi}{2} - x \Longrightarrow \sin x = \cos t, \ \cos x = \sin t,$$

cosicchè

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{3 \cos^2 t + \cos t - 4}{t}$$

Il numeratore è un polinomio di secondo grado in $\cos t$ e riducendo in fattori: $3 \cos^2 t + \cos t - 4 = (3 \cos t + 4) \, (\cos t - 1)$, onde:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t \to 0} \frac{(3 \cos t + 4) \, (\cos t - 1)}{t} \\ &= -\underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{t \to 0} (3 \cos t + 4)}_{=7} = 0\end{aligned}$$

Esercizio 34 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x \left(1 - \sin x\right)$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Conviene eseguire il cambio di variabile:

$$t = \frac{\pi}{2} - x \Longrightarrow \tan x = \cot t, \ \sin x = \cos t?$$

per cui

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{t \to 0} \cot t \left(1 - \cos t\right) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{\tan t} = \frac{0}{0} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\tan t}{t}} \\
&= \frac{0}{1} = 0
\end{aligned}$$

Esercizio 35 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(1 - \tan x\right) \tan 2x$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Dalle formule di duplicazione:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x},$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\left(1 - \tan x\right) \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}\right] \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\left(1 - \tan x\right) \frac{2 \tan x}{\left(1 - \tan x\right)\left(1 + \tan x\right)}\right] \\
&= 2 \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1 + \tan x} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{1+1} = 1
\end{aligned}$$

Esercizio 36 *Calcolare*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + \sin x}{ax - \sin x}, \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

Soluzione.
Poniamo per definizione:

$$f_a\left(x\right) = \frac{x + \sin x}{ax - \sin x}, \tag{2}$$

distinguendo i due casi:

1. $a \neq 0$

2. $a = 0$

Nel primo caso scriviamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sin x}{ax-\sin x} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(a-\frac{\sin x}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{a-\frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{1+0}{a-0} \\ &= \frac{1}{a},\end{aligned} \tag{3}$$

giacchè:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} = 0,$$

in forza del teorema dei carabinieri. Infatti, la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è definitivamente limitata (in un intorno di $+\infty$ o di $-\infty$) tra $-\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x}$, che sono entrambe infinitesime per $x \to \pm\infty$. Tenendo conto della (3), per $a = 0$ siamo tentati a scrivere $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sin x}{\sin x} = 0$. Più precisamente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f_0(x) &= -\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sin x}{\sin x} \\ &= -\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{\sin x} \\ &= -\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sin x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}_{=1}\end{aligned}$$

Ma $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sin x}$ non esiste. Infatti, $\frac{x}{\sin x}$è definitivamente limitata (in un intorno di $+\infty$ o di $-\infty$) tra $-x$ e x, per cui detta funzione assume infinite volte (in ogni intorno di $+\infty$ o di $-\infty$) tutti i valori tra $-\infty$ e $+\infty$. Ne concludiamo che il limite proposto non esiste per $a = 0$.

Nelle fig. 1-2. riportiamo il grafico di $f_{a=2}(x)$ e $f_{a=0}(x)$ rispettivamente.

Esercizio 37 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{1-\sin^2 x}}{x^2}}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \frac{\ln(1-0)}{0} = \frac{0}{0}$$

Osseviamo che

$$\ln\sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left(1-\sin^2 x\right),$$

quindi:

$$\lambda = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{x^2},$$

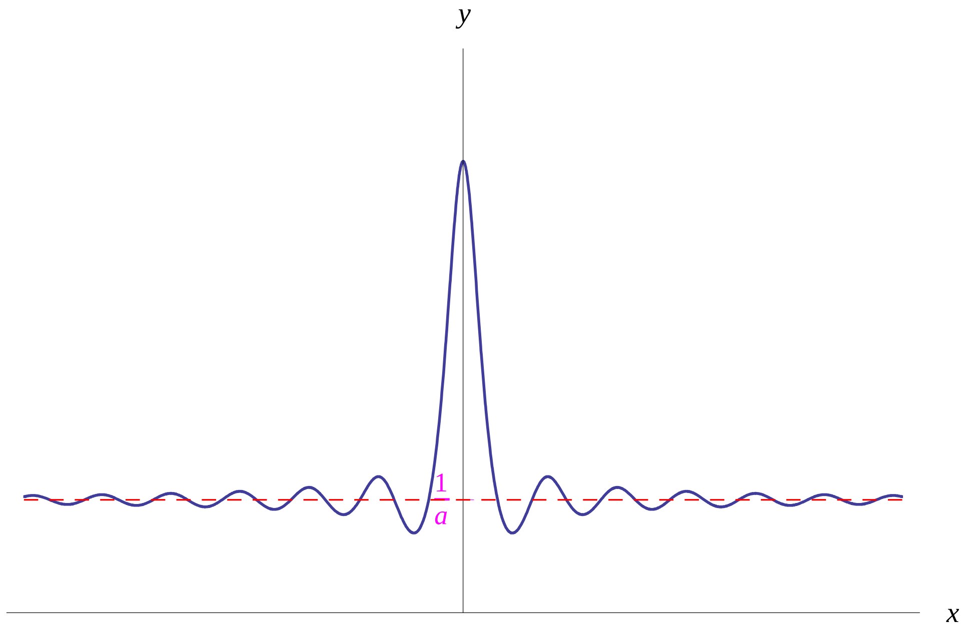

Figura 1: Grafico della funzione (2) per $a = 2$.

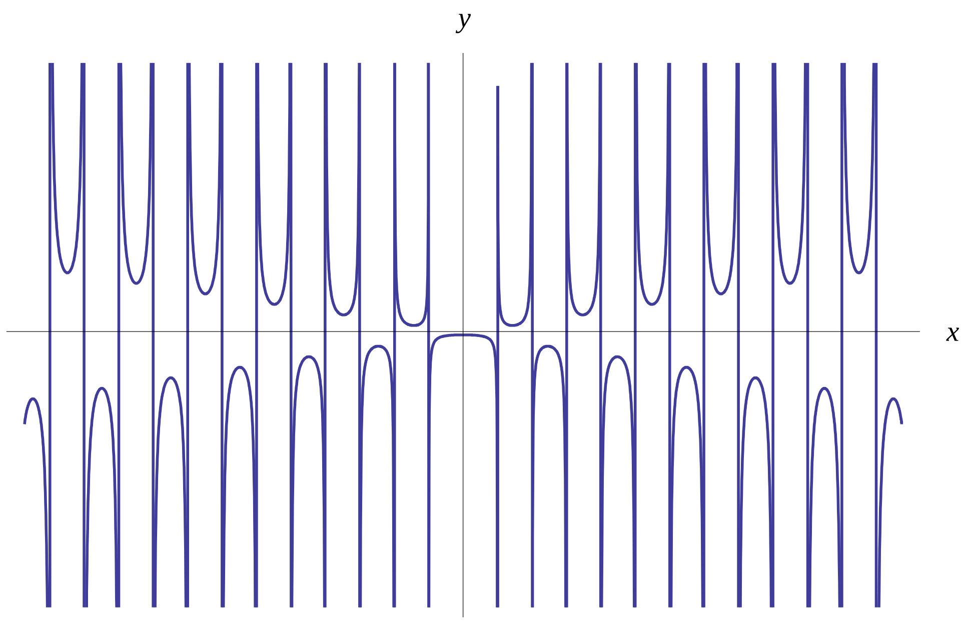

Figura 2: Grafico della funzione (2) per $a = 0$.

che suggerisce l'utilizzo del limite fondamentale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lg_a(1+x)}{x}=\lg_a e,$$

e in particolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Per ricondurci a questo limite, scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{-\sin^2 x}\cdot\left(\frac{-\sin^2 x}{x^2}\right)\right]\\&=-\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{-\sin^2 x}\right]}_{=\lambda_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)}_{=1}\end{aligned}$$

Calcoliamo λ_1 con il cambio di variabile $t=-\sin^2 x\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$:

$$\lambda_1=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1,$$

per cui

$$\lambda=-\frac{1}{2}$$

Esercizio 38 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x}}$$

Soluzione
Si calcola facilmente:

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}-\lim_{x\to 0}\cos x\\&=1-1=0\end{aligned}$$

Esercizio 39 *Calcolare:*

$$\lambda=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Eseguendo il cambio di variabile $t=\pi-x$:

$$\lambda=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sin\frac{t}{2}}{t}$$

Eseguendo un secondo cambio di variabile $\tau=\frac{t}{2}$:

$$\lambda=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1-\sin\tau}{\tau}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

Esercizio 40 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x - 2}{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - 2\left(1 - \cos^2 x\right)}{2\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - 2\sin^2 x}{2\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 41 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x}\right)}$$

Soluzione
Qui abbiamo la forma indeterminata $\infty - \infty$. Scriviamo

$$\lambda = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x - 1}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Esercizio 42 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}}$$

Soluzione
La forma indeterminata $\frac{0}{0}$ può essere rimossa dividendo numeratore e denominatore per x:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}} \\
&= \frac{1}{0}
\end{aligned}$$

In particolare:

$$\begin{aligned}
x \to 0^+ &\Longrightarrow \frac{1 - \cos x}{x} \to 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\
x \to 0^- &\Longrightarrow \frac{1 - \cos x}{x} \to 0^- \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty
\end{aligned}$$

Esercizio 43 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cot x + \cos x}}$$

Soluzione
La forma indeterminata $\frac{0}{0}$ può essere rimossa eseguendo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{2} - x$:

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{\tan t + \sin t},$$

per poi dividere numeratore e denominatore per t:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\tan t}{t} + \frac{\sin t}{t}} \\ &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 44 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot x \right)}$$

Soluzione
Qui abbiamo la forma indeterminata $\infty - \infty$ che può essere ricondotta alla forma $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x},$$

che a sua volta può essere rimossa dividendo numeratore e denominatore per x:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

Esercizio 45 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x \cos x}{\sin^2 x - 1}}$$

Soluzione
La forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si risolve facilmente:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \left(1 - \sin x\right)}{\left(\sin x - 1\right)\left(\sin x + 1\right)} \\ &= -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + 1} \\ &= -\frac{0}{1+1} = 0\end{aligned}$$

Esercizio 46 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right)} \tag{4}$$

Soluzione.
Qui abbiamo la forma indeterminata $\infty - \infty$ che può essere ricondotta alla forma $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x},$$

che a sua volta può essere rimossa eseguendo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{2} - x$:

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \sin t}{\cos t} = 0,$$

in quanto già calcolato in precedenza.

Esercizio 47 *Dimostrare:*

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin (x + x_0) + \sin (x - x_0)}{\cos (x + x_0) - \cos (x - x_0)} = -\cot x_0} \tag{5}$$

Soluzione.
Riesce:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin (x + x_0) + \sin (x - x_0)}{\cos (x + x_0) - \cos (x - x_0)} = \frac{\sin x_0 + \sin (-x_0)}{\cos x_0 - \cos (x_0)} = \frac{0}{0},$$

avendo tenuto conto della parità (-1) della funzione seno, e della parità $(+1)$ della funzione coseno. Ricordiamo le formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned}
\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
\cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},
\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin \left(\frac{x + x_0 + x - x_0}{2} \right) \cos \left(\frac{x + x_0 - x + x_0}{2} \right)}{-2 \sin \left(\frac{x + x_0 + x - x_0}{2} \right) \sin \left(\frac{x + x_0 - x + x_0}{2} \right)} \\
&= -\lim_{x \to 0} \frac{\cos x_0}{\sin x_0} = -\cot x_0
\end{aligned}$$

Esercizio 48 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - \sin x}{\sin 2x}}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta manifestamente nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ che può essere rimossa esplicitando $\tan 2x$:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin x}{\sin 2x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - \sin x \cos 2x}{\sin 2x \cos 2x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x - \sin x \cos 2x}{2 \sin x \cos x \cos 2x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos x - \cos 2x}{2 \cos x \cos 2x} \\
&= \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 49 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x}}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta manifestamente nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ che può essere rimossa moltiplicando numeratore e denominatore per $\sin x + \cos x$:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x} \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} \right) \\ &= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \sin 2x)(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x - \cos^2 x}\end{aligned}$$

A questo punto osserviamo che possiamo isolare il termine $\sin x + \cos x$, in quanto non produce indeterminazione:

$$\lambda = \underbrace{\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\sin^2 x - \cos^2 x}}_{=\lambda_1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)}_{=\sqrt{2}}$$

Calcoliamo λ_1 osservando che $\sin^2 x - \cos^2 x = -\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = -\cos 2x$, per cui:

$$\lambda_1 = -\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{4} - x$:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{\sin t} \\ &= -\lim_{t \to 0} \frac{\frac{1 - \cos t}{t}}{\frac{\sin t}{t}} \\ &= -\frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

Esercizio 50 *Calcolare :*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{1 + \cos x - \sin x}}$$

Soluzione

Per risolvere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, eseguiamo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{2} - x$, per cui:

$$\cos 2x = \cos(\pi - 2t) = -\cos 2t, \quad \cos x = \sin t, \ \sin x = \cos t,$$

e il limite diventa:

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos 2t}{1 + \sin t - \cos t}$$

Scrivendo a numeratore $1 = \sin^2 t + \cos^2 t$:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos 2t}{\sin^2 t + \cos^2 t + \sin t - \cos t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos 2t}{\sin t (\sin t + 1) + \cos t (\cos t - 1)} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1 - \cos 2t}{2t} \cdot 2}{\frac{\sin t}{t} (\sin t + 1) - \cos t \cdot \frac{1 - \cos t}{t}} \\ &= 2 \cdot \frac{\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos 2t}{2t}}{(\sin t + 1) \lim_{t \to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right) - \cos t \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t}}\end{aligned}$$

Ovviamente

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 2t}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=0,$$

onde

$$\lambda=2\frac{0}{(0+1)\cdot 1-1\cdot 0}=0$$

Esercizio 51 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x+\cos 2x}{1-\sin x}}$$

Soluzione

Possiamo rimuovere l'evidente forma indeterminata $\frac{0}{0}$ ricordando la formula di duplicazione $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, per cui:

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x+1-2\sin^2 x}{1-\sin x}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\\&=1+1=2\end{aligned}$$

Esercizio 52 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}}$$

Soluzione

Possiamo rimuovere l'evidente forma indeterminata $\frac{0}{0}$ ricordando la formula di duplicazione $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, per cui:

$$\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+1-2\cos^2 2x}{1-\cos x}$$

Riduciamo in fattori $-2\cos^2 x+\cos x+1$:

$$-2\cos^2 x+\cos x+1=(2\cos x+1)(1-\cos x),$$

quindi:

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{x\to 0}\frac{(2\cos x+1)(1-\cos x)}{1-\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}(2\cos x+1)\\&=3\end{aligned}$$

Esercizio 53 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1-\sin 2x+\cos 2x}}$$

Soluzione

Possiamo rimuovere l'evidente forma indeterminata $\frac{0}{0}$ eseguendo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{4} - x$, per cui $2x = \frac{\pi}{2} - 2t$ e quindi:

$$\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) = \cos 2t$$
$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) = \sin 2t$$

Pertanto il limite diventa:

$$\lambda = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos 2t - \sin 2t}{1 - \cos 2t + \sin 2t}$$

Eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile $\tau = 2t$:

$$\lambda = \lim_{\tau\to 0} \frac{1 - \cos\tau - \sin\tau}{1 - \cos\tau + \sin\tau},$$

che abbiamo già calcolato (cfr. esercizio 10) per cui è $\lambda = -1$.

Esercizio 54 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos 2x}{1 - \sin x}}$$

Soluzione

Possiamo rimuovere l'evidente forma indeterminata $\frac{0}{0}$ eseguendo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{2} - x$, per cui $2x = \pi - 2t$ e quindi:

$$\cos 2x = \cos(\pi - 2t) = -\cos 2t, \quad \sin x = \cos t$$

Pertanto il limite diventa:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - \cos 2t}{1 - \cos t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 2\cos^2 t + 1}{1 - \cos t}\end{aligned}$$

Ma $\cos t - 2\cos^2 t + 1 = (2\cos t + 1)(1 - \cos t)$, per cui

$$\lambda = \lim_{t\to 0} (2\cos t + 1) = 3$$

Esercizio 55 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} - \tan 2x}{1 - \sqrt{3}\tan x}}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Infatti, rammentiamo che $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \tan\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, per cui $\lambda = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$. Per rimuovere l'indeterminazione utilizziamo la formula di duplicazione:

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Quindi:

$$\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} - \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}{1 - \sqrt{3}\tan x}$$

Eseguendo il cambio di variabile $t = \tan x \underset{x \to \frac{\pi}{6}}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{t \to \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3} - \frac{2t}{1-t^2}}{1 - \sqrt{3}t} \\
&= \lim_{t \to \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}(1-t^2) - 2t}{\left(1 - \sqrt{3}t\right)(1-t^2)} \\
&= \lim_{t \to \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}t - 1\right)(1-t^2)}
\end{aligned}$$

Ma $\sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3} = \left(\sqrt{3}t - 1\right)\left(t + \sqrt{3}\right)$, per cui:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{t \to \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\left(\sqrt{3}t - 1\right)\left(t + \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}t - 1\right)(1-t^2)} \\
&= \lim_{t \to \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t + \sqrt{3}}{1 - t^2} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Esercizio 56 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x - \sin x}{\cos 2x + \cos x}} \tag{6}$$

Soluzione.
Ricordiamo gli archi notevoli:

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{2\pi}{3} &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \\
\cos\frac{2\pi}{3} &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

per cui il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Sviluppando con le formule di duplicazione:

$$\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{\cos^2 x + \cos x - 1},$$

e riducendo in fattori il numeratore:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{(\cos x + 1)(2\cos x - 1)} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Esercizio 57 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \tan\frac{x}{2}}{1-\cos x - \tan\frac{x}{2}}} \tag{7}$$

Soluzione.

Per rimuovere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ utilizziamo la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \Longrightarrow 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2},$$

per cui

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2} - \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{2\sin^2\frac{x}{2} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{2\cdot 0 - 1}{2\cdot 0 + 1} = -1\end{aligned}$$

Esercizio 58 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}} \tag{8}$$

Soluzione.

Per rimuovere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$:

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}},$$

dopodichè utilizziamo la formula di duplicazione del coseno: $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, quindi

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Esercizio 59 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}} \tag{9}$$

Soluzione.

Anche qui conviene moltiplicare numeratore e denominatore per $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{\cos x} \\ &= \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}}_{=\lambda_1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}_{=\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Per calcolare λ_1 eseguiamo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{2} - x$, onde:

$$\lambda_1 = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{\sin t} = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

Esercizio 60 *Risolvere l'equazione in $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:*

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2nx) + \sin(nx)}{\sin[(n+1)x] + \sin x} = \frac{3}{2}} \tag{10}$$

Soluzione.
Innanzitutto calcoliamo il limite a primo membro:

$$\lambda_n \stackrel{def}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2nx) + \sin(nx)}{\sin[(n+1)x] + \sin x}$$

Applicando le formule di prostaferesi:

$$\sin(2nx) + \sin(nx) = 2\sin\left(\frac{3nx}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$
$$\sin[(n+1)x] + \sin x = 2\sin\left(\frac{n+2}{2}x\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right),$$

per cui:

$$\lambda_n = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{3nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{n+2}{2}x\right)} = \frac{3n}{n+2}$$

Deve essere

$$\frac{3n}{n+2} = \frac{3}{2},$$

da cui $n = 2$.

Esercizio 61 *Risolvere l'equazione in $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{n}} \frac{1 - (n-1)\cos x}{\pi - nx} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{11}$$

Soluzione.
Eseguendo il cambio di variabile $t = \pi - nx$, si ha:

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{n} - \frac{t}{n}\right) = \cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{t}{n} + \sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{t}{n},$$

per cui il limite diventa:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - (n-1)\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{t}{n} - (n-1)\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{t}{n}}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{1 - (n-1)\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{t}{n}}{t} - (n-1)\sin\frac{\pi}{n} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\sin\frac{t}{n}}{t}$$

Il secondo limite a secondo membro è:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin\frac{t}{n}}{t} = \frac{1}{n},$$

per cui l'equazione assegnata si scrive:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - (n-1)\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{t}{n}}{t} - \frac{n-1}{n}\sin\frac{\pi}{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

L'altro limite è

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-(n-1)\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{t}{n}}{t}=\begin{cases}\infty, & \text{se } (n-1)\cos\frac{\pi}{n}\neq 1\\ 0, & \text{se } (n-1)\cos\frac{\pi}{n}=1\end{cases}$$

Infatti per $(n-1)\cos\frac{\pi}{n}=1$, ponendo $\tau=\frac{t}{n}$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1-(n-1)\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{t}{n}}{t}&=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos\frac{t}{n}}{t}\\&=\frac{1}{n}\lim_{\tau\to 0}\frac{1-\cos\tau}{\tau}\\&=0\end{aligned}$$

Ne consegue che deve essere

$$(n-1)\cos\frac{\pi}{n}=1\Longleftrightarrow\cos\frac{\pi}{n}=\frac{1}{n-1}\Longleftrightarrow n=3$$

La (11) equivale a dire che tra le infinite funzioni

$$f_n(x)=\frac{1-(n-1)\cos x}{\pi-nx},$$

l'unica che converge in $x=\frac{\pi}{n}$ è quella con $n=3$.

Esercizio 62 *Determinare i valori del parametro $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ per i quali la seguente equazione in $a,b\in\mathbb{R}$*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^n}=-4, \tag{12}$$

ammette ∞^1 soluzioni.

Svolgimento

Dal momento che il limite a primo membro della (12) si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, conviene sviluppare il numeratore attraverso le formule di prostaferesi:

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{a-\beta}{2},$$

che nel nostro caso si scrivono:

$$\cos ax-\cos bx=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right),$$

cosicchè:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^n}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x^n}$$

Per $n=1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}&=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x}\\&=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)}{x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}_{=0}\end{aligned} \tag{13}$$

Riesce:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a\pm b}{2}x\right)}{x}=\frac{a\pm b}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a\pm b}{2}x\right)}{\frac{a\pm b}{2}x}}_{=1}=\frac{a\pm b}{2}$$

Quindi la (13) diventa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}=-2\frac{a\pm b}{2}\cdot 0=0$$

Ciò implica che deve essere $n\geq 2$. Proviamo prima per ogni $n>2$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^n}&=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x^n}\\&=-2\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a+b}{2}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a-b}{2}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{n-2}}}_{=\infty}\\&=\infty\end{aligned}$$

Deve allora essere necessariamente $n=2$. Infatti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}&=-2\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a+b}{2}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a-b}{2}}\\&=\frac{b^2-a^2}{2}\end{aligned}$$

Il problema chiede di determinare $a,b\in\mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=-4$, per cui:

$$\frac{b^2-a^2}{2}=-4$$

Cioè

$$a^2-b^2-8=0, \tag{14}$$

che è un'equazione di secondo grado in a,b e come tale ammette ∞^1 soluzioni. Assumendo $b\in\mathbb{R}$ come parametro, la soluzione generale della (14) si scrive:

$$a=\pm\sqrt{b^2+8},\quad \forall b\in\mathbb{R}, \tag{15}$$

o ciò che è lo stesso:

$$(a,b)=\left(\pm\sqrt{b^2+8},b\right),\quad \forall b\in\mathbb{R}$$

Osservando che $\cos\left(\pm\sqrt{b^2+8}x\right)=\cos\left(\sqrt{b^2+8}x\right)$, segue che alla soluzione generale (15) corrisponde la famiglia di funzioni:

$$\mathcal{F}=\left\{f_{\pm\sqrt{b^2+8},b}(x)\right\}, \tag{16}$$

essendo:

$$f_{\pm\sqrt{b^2+8},b}(x)=\frac{\cos\left(\sqrt{b^2+8}x\right)-\cos bx}{x^2} \tag{17}$$

Per quanto precede, comunque prendiamo $b\in\mathbb{R}$, la funzione $f_{\pm\sqrt{b^2+8},b}(x)$ converge a -4 per $x\to 0$. In fig. 3 sono graficate alcune funzioni della famiglia (16).

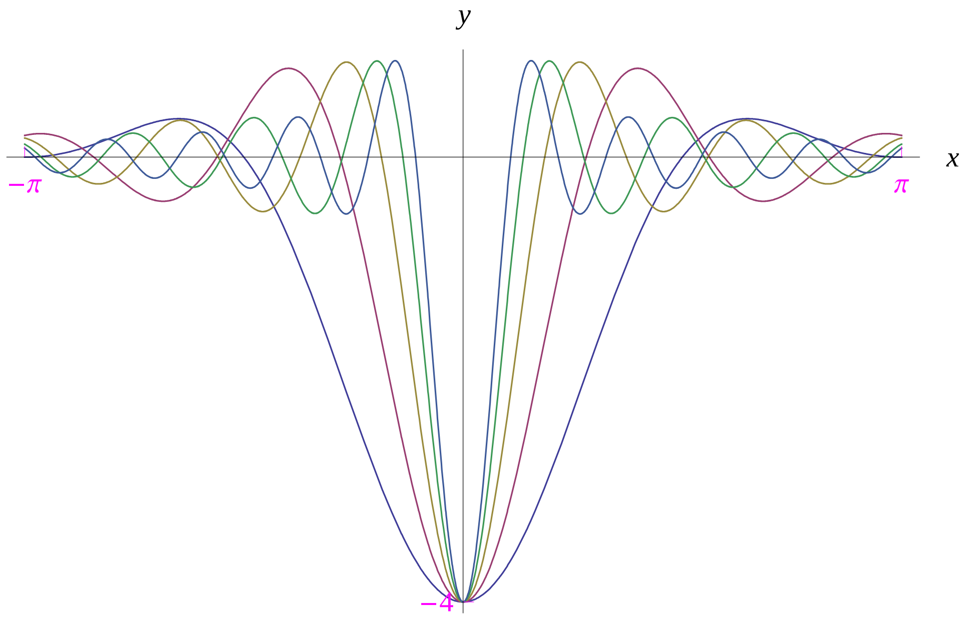

Figura 3: Grafico di (17) per $b = 1, 2, 4, 6, 8, 10$.

Esercizio 63 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{\cos^2 x - \cos^2 x_0}$$

Svolgimento

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Espandendo il denominatore otteniamo:

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{(\cos x - \cos x_0)(\cos x + \cos x_0)},$$

da cui vediamo che $\cos x + \cos x_0$ non dà luogo a indeterminazione, quindi lo lasciamo così com'è. Lavoriamo, dunque, sui termini $\sin(x - x_0)$ e $\cos x - \cos x_0$. Il primo può essere espanso con le formule di duplicazione:

$$\sin(x - x_0) = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x - x_0}{2}$$

Il rimanente termine $\cos x - \cos x_0$ può essere trasformato in prodotto tramite prostaferesi:

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\lambda &= -\frac{1}{2} \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x - x_0}{2}}{\sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2} (\cos x + \cos x_0)} \\
&= -\lim_{x \to x_0} \frac{\cos \frac{x - x_0}{2}}{\sin \frac{x + x_0}{2} (\cos x + \cos x_0)} \\
&= -\frac{1}{\sin x_0 (\cos x + \cos x_0)} \\
&= -\frac{1}{2 \sin x_0 \cos x_0} \\
&= -\frac{1}{\sin 2x_0}
\end{aligned}$$

Esercizio 64 *Dimostrare:*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{\sin\frac{x}{n}-\sin\frac{x_0}{n}}=\frac{n\cos x_0}{\cos\frac{x_0}{n}},\quad \forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$$

Svolgimento

Conviene utilizzare le formule di prostaferesi per trasformare numeratore e denominatore in prodotti di funzioni trigonometriche, giacchè il rapporto così come è scritto, si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\sin x-\sin x_0&=2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x-x_0}{2}\\ \sin\frac{x}{n}-\sin\frac{x_0}{n}&=2\sin\frac{x-x_0}{2n}\cos\frac{x-x_0}{2n},\end{aligned}$$

cosicchè

$$\lambda_n\overset{def}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{\sin\frac{x}{n}-\sin\frac{x_0}{n}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x-x_0}{2}}{\sin\frac{x-x_0}{2n}\cos\frac{x-x_0}{2n}}$$

Eseguendo il cambio di variabile $t=\frac{x-x_0}{2}$:

$$\lambda_n=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cos(x_0+t)}{\sin\frac{t}{n}\cos\frac{x_0+t}{n}}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per t:

$$\begin{aligned}\lambda_n&=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t}{t}\cos(x_0+t)}{\frac{\sin\frac{t}{n}}{\frac{t}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cos\frac{x_0+t}{n}}\\ &=\frac{1\cdot\cos x_0}{1\cdot\frac{1}{n}\cos\frac{x_0}{n}}\\ &=\frac{n\cos x_0}{\cos\frac{x_0}{n}}\end{aligned}$$

Esercizio 65 *Calcolare:*

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{x}}$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{x}=\frac{0}{0}$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\sin x}\frac{\sin x}{x}\right)\\ &=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\sin x}}_{=\lambda_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1}\end{aligned}$$

Calcoliamo il limite λ_1 eseguendo il cambio di variabile $t = \sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$:

$$\lambda_1 = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{1/n} - 1}{t}$$

Tenendo presente il limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, si ha $\lambda_1 = \frac{1}{n}$, onde:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\sin x} - 1}{x} = 0$$

Esercizio 66 *Dimostrare*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x^n \sin \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1}{x^{n-1}} = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}}$$

Soluzione

Tenendo presente che

$$\lim_{x\to 0} \left(x^n \sin \frac{1}{x}\right) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\},$$

si ha che il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x^n \sin \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1}{x^{n-1}} &= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\left(1 + x^n \sin \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1}{x^n \sin \frac{1}{x}} \cdot x \sin \frac{1}{x}\right] = \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x^n \sin \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1}{x^n \sin \frac{1}{x}}}_{\lambda_1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)}_{=0}\end{aligned}$$

Per calcolare il limite λ_1 eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = x^n \sin \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

onde

$$\lambda_1 = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t}$$

Rammentando il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

si ha $\lambda_1 = \alpha$ e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x^n \sin \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1}{x^{n-1}} = 0$$

In fig. (4) riportiamo il grafico della funzione per assegnati valori di n, α.

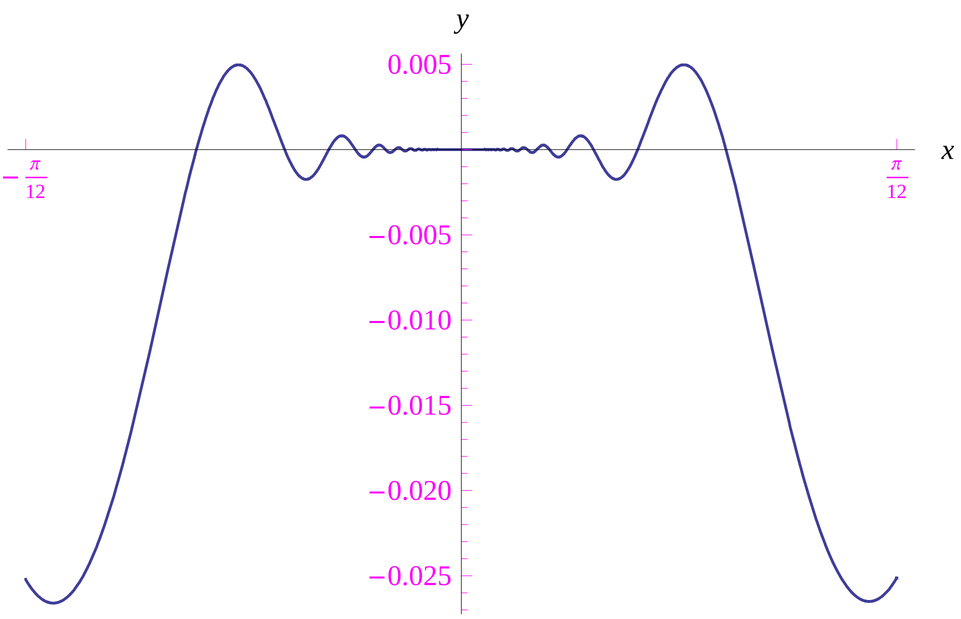

Figura 4: Grafico di $\frac{\left(1+x^n \sin \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1}{x^{n-1}}$ per $(\alpha, n) = \left(\sqrt{5}, 4\right)$.