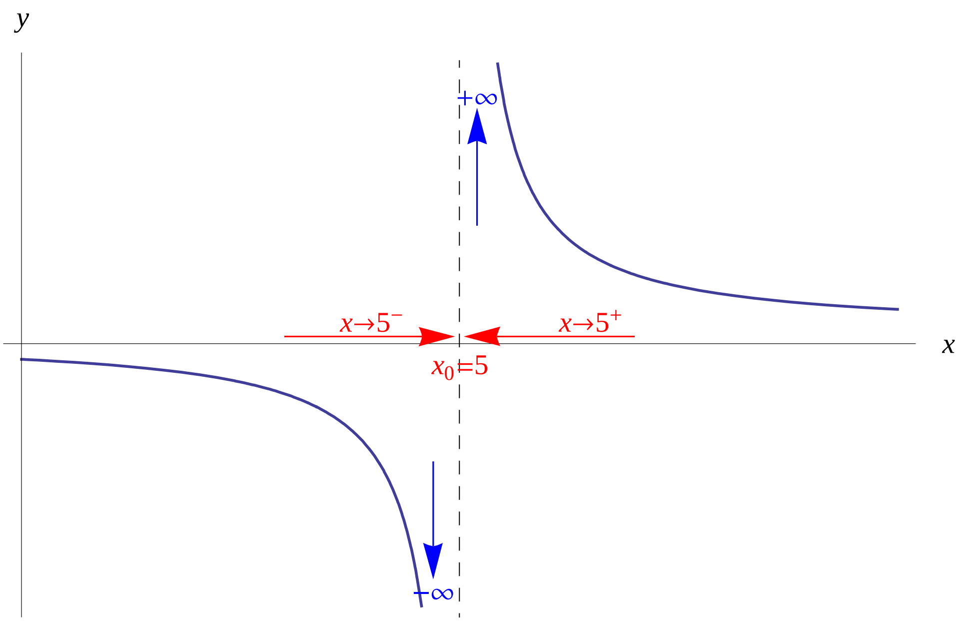
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Limiti di funzioni razionali fratte e di funzioni irrazionali

Marcello Colozzo



Indice

1 Funzioni razionali fratte

1.1 Rapporti che non si presentano in forma indeterminata

Esercizio 1 *Calcolare:*

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$$

Soluzione

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25} = \frac{25 - 25 + 10}{25 - 25} = \frac{10}{0}$$

Dobbiamo distinguere i due casi: $x \to 5^-$, $x \to 5^+$, cioè determinare il limite destro e il limite sinistro. È conveniente studiare il segno del denominatore in un intorno di $x_0 = 5$.

$$x^2 - 25 > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty),$$

onde:

$$\lim_{x \to 5^-} \left(x^2 - 25\right) = 0^-, \quad \lim_{x \to 5^+} \left(x^2 - 25\right) = 0^+,$$

per cui

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 5^+} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25} = \frac{10}{0^+} = +\infty$$

Ne concludiamo che la funzione $\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$ è divergente negativamente a sinistra di $x_0 = 5$, e divergente positivamente a destra.

Esercizio 2 *Calcolare:*

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 20x - 7}{4 - x^2}$$

Soluzione

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 20x - 7}{4 - x^2} = \frac{4 - 40 - 7}{4 - 4} = -\frac{43}{0}$$

Dobbiamo procedere come nell'esercizio precedente, ossia distinguere i due casi: $x \to -2^-$, $x \to -2^+$. Studiamo perciò il segno del denominatore in un intorno di $x_0 = -2$.

$$4 - x^2 > 0 \Longleftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Longleftrightarrow x \in (-2, 2),$$

onde:

$$\lim_{x \to -2^-} \left(4 - x^2\right) = 0^-, \quad \lim_{x \to -2^+} \left(4 - x^2\right) = 0^+,$$

per cui

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 + 20x - 7}{4 - x^2} = -\frac{43}{0^-} = -(-\infty) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + 20x - 7}{4 - x^2} = -\frac{43}{0^+} = -(+\infty) = -\infty$$

Ne concludiamo che la funzione $\frac{x^2+20x-7}{4-x^2}$ è divergente positivamente a sinistra di $x_0 = -2$, e divergente negativamente a destra.

1.2 Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Esercizio 3 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} \tag{1}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere l'indeterminazione osserviamo che:*

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= (x-1)(x-2) \\ x^2 + x - 6 &= (x+3)(x-2), \end{aligned}$$

onde:

$$\lambda = \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{5}$$

Esercizio 4 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} \tag{2}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere l'indeterminazione osserviamo che:*

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= (x-3)(x+2) \\ x^3 + 5x^2 + 8x + 4 &= (x+2)^2 (x+1), \end{aligned}$$

cosicchè:

$$\lambda = \lim_{x \to -2} \frac{x-3}{(x+1)(x+2)} = \frac{-5}{0}$$

Occorre dunque stabilire il segno del denominatore $(x+1)(x+2)$. Risulta:

$$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2,$$

onde

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = -2, -1,$$

da cui il segno:

$$x^2 + 3x + 2 > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned} x \to -2^- &\Longrightarrow (x+1)(x+2) \to 0^+ \\ x \to -2^+ &\Longrightarrow (x+1)(x+2) \to 0^- \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^-} \frac{x-3}{(x+1)(x+2)} &= \frac{-5}{0^+} = -\left(\frac{5}{0^+}\right) = -(+\infty) = -\infty \\ \lim_{x \to -2^+} \frac{x-3}{(x+1)(x+2)} &= \frac{-5}{0^-} = -\left(\frac{5}{0^-}\right) = -(-\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Ne concludiamo che la funzione assegnata è divergente negativamente a sinistra di $x_0 = -2$, e divergente positivamente a destra di $x_0 = 2$. Ciò è illustrato nel grafico di fig. (1).

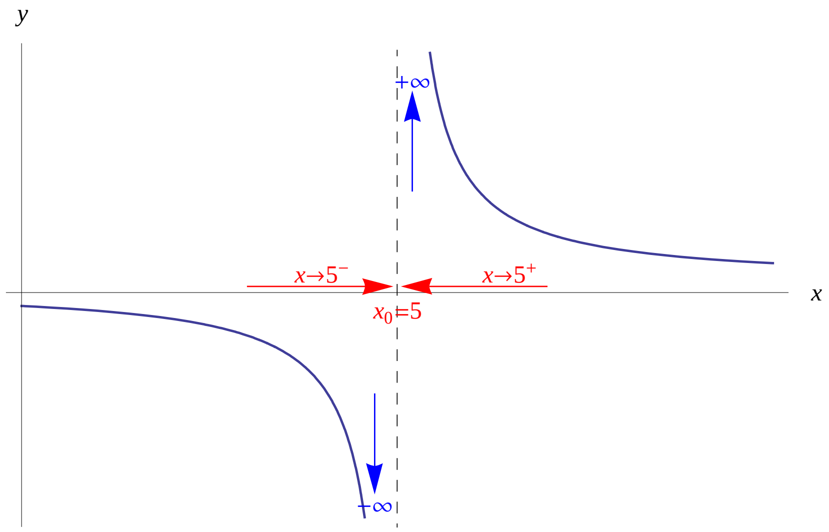


Figura 1: La retta verticale $x = 5$ è asintoto verticale per il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.

Esercizio 5

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-2,-1) \cup (3,+\infty)$$

Quindi:

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$$

Esercizio 6 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to2} \frac{x^4-8x^2+16}{x^3-8} \tag{3}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere tale indeterminazione procediamo come segue:*

$$\begin{gathered} x^4-8x^2+16 = \left(x^2-4\right)^2 = (x-2)^2(x+2)^2 \\ x^3-8 = (x-2)\left(x^2+2x+4\right), \end{gathered}$$

onde:

$$\lambda = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x+2)}{x^2+2x+4} = \frac{0\cdot4}{4+4+4} = 0$$

Esercizio 7 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} \tag{4}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere tale indeterminazione procediamo come segue:*

$$\begin{gathered} x^2-2x = x(x-2) \\ x^2-4x+4 = (x-2)^2, \end{gathered}$$

onde:

$$\lambda = \lim_{x\to2} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0}$$

Occorre dunque stabilire il segno del rapporto $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Risulta:

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

Esercizio 8 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere tale indeterminazione procediamo come segue:*

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= (x-1)^2 (x+2) \\ x^4 - 4x + 3 &= (x-1)^2 \left(x^2 + 2x + 3\right), \end{aligned}$$

onde:

$$\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 9 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere tale indeterminazione procediamo come segue:*

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x-1)(x+1) \\ x^2 - 3x + 2 &= (x-2)(x-1), \end{aligned}$$

onde:

$$\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$$

Esercizio 10 *Sia data una funzione $f(y)$ la cui espressione analitica è il risultato della seguente operazione di passaggio al limite:*

$$f(y) = \lim_{x\to y} \frac{x^2 - (y+1)x + y}{x^3 - y^3} \tag{5}$$

Dopo aver determinato $f(y)$, calcolare:

$$\lim_{y\to 0} f(y)$$

Soluzione

Il limite a secondo membro della (5) si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, che può essere rimossa con il solito procedimento, ovvero riducendo in fattori numeratore e denominatore, per poi semplificare. Abbiamo:

$$x^2 - (y+1)x + y = (x-1)(x-y), \quad x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$

Sostituendo nella (5):

$$\begin{aligned} f(y) &= \lim_{x\to y} \frac{x-1}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{y-1}{y^2 + y^2 + y^2} \\ &= \frac{y-1}{3y^2} \end{aligned}$$

Ne consegue

$$\lim_{y\to 0} f(y) = -\frac{1}{3}\lim_{y\to 0}\frac{1-y}{y^2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{0^+}\right) = -(+\infty) = -\infty$$

Cioè $f(y)$ diverge negativamente per $y \to 0$. Come possiamo risolvere tale problema con Mathematica? Per rispondere a questa domanda, cerchiamo di elaborare una routine che accetta una generica funzione di due variabili $f_1(x,y)$ tale che $f_1(y,y)$ dà luogo alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per cui:

$$f(y) = \lim_{x\to y} f(x,y)$$

La routine può essere prelevata al seguente link.

Esercizio 11 *Calcolare:*

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

***Soluzione**. Risulta:*

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{0}{0}$$

Sviluppando il numeratore e semplificando:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

Esercizio 12 *Calcolare:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Riesce:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$$
$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2(x+1),$$

per cui:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$$

Esercizio 13 *Calcolare*

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Riesce:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2),$$

per cui

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+2} = -2$$

Esercizio 14 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$$

Soluzione
Abbiamo

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{0}$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to 2^-}(x-2)=0^-,\quad \lim_{x\to 2^+}(x-2)=0^+,$$

per cui

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

Esercizio 15 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$$

Soluzione
Abbiamo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\frac{1-3+2}{1-4+3}=\frac{0}{0}$$

Riesce:

$$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$$
$$x^4-4x+3=(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}$$

1.3 Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Esercizio 16 *Studiare il comportamento all'infinito della seguente funzione*

$$f(x)=\frac{3x^3+4x^2+x-1}{x^4},$$

per poi elaborare una routine in ambiente Mathematica.
Soluzione.
Si tratta di calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x),\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)$$

Iniziamo a calcolare il primo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+4x^2+x-1}{x^4}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{x}=\frac{3+0}{+\infty}=0^+$$

Similmente:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+4x^2+x-1}{x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{x}=\frac{3+0}{-\infty}=0^-$$

La routine in ambiente Mathematica per il calcolo di limiti di questo tipo, può essere prelevata al seguente link.

Esercizio 17 *Studiare il comportamento all'infinito della seguente funzione*

$$f(x)=\frac{10^9x}{x^2-1}$$

Soluzione.
Si tratta di calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x),\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)$$

Iniziamo a calcolare il primo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{10^9x}{x^2-1}&=10^9\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\\&=10^9\frac{1}{(+\infty)(1-0)}\\&=\frac{10^9}{+\infty}=0^+\end{aligned}$$

Similmente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{10^9x}{x^2-1}&=10^9\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\\&=10^9\frac{1}{(-\infty)(1-0)}\\&=\frac{10^9}{-\infty}=0^-\end{aligned}$$

Esercizio 18 *Studiare il comportamento all'infinito della seguente funzione*

$$f(x)=\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$$

Soluzione.
Si tratta di calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x),\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)$$

Iniziamo a calcolare il primo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\infty}{\infty}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{3+\frac{7}{x}}\\&=\frac{(+\infty)(1-0+0)}{3+0}\\&=+\infty\end{aligned}$$

Similmente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{3+\frac{7}{x}} \\ = \frac{(-\infty)(1-0+0)}{3+0} \\ = -\infty\end{aligned}$$

Esercizio 19 *Studiare il comportamento all'infinito della seguente funzione*

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

Soluzione.
Si tratta di calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Iniziamo a calcolare il primo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\ = \frac{1+0^+}{1+0^+} \\ = 1^+\end{aligned}$$

Similmente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \\ = \frac{1+0^-}{1+0^-} \\ = \frac{1^-}{1^+} = 1^-\end{aligned}$$

Esercizio 20 *Studiare il comportamento all'infinito della seguente funzione*

$$f(x) = \frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$$

Soluzione.
Si tratta di calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Iniziamo a calcolare il primo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{x\left(1-\frac{8}{x^2+\frac{5}{x^3}}\right)} \\ = \frac{2-0^++0^+}{(+\infty)(1-0^++0^+)} \\ = \frac{2}{+\infty} = 0^+\end{aligned}$$

Similmente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{x\left(1-\frac{8}{x^2+\frac{5}{x^3}}\right)}$$
$$= \frac{2}{-\infty} = 0^-$$

Esercizio 21 *Studiare il comportamento all'infinito della funzione:*

$$f(x) = \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$$

Soluzione
Si tratta di calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Iniziamo con il primo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(2+\frac{3}{x}\right)^3 x^2\left(3-\frac{2}{x}\right)^2}{x^5\left(1+\frac{5}{x^5}\right)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)^3\left(3-\frac{2}{x}\right)^2}{1+\frac{5}{x^5}}$$
$$= \frac{(2+0^+)^3(3-0^+)^2}{1+0^+}$$
$$= \frac{8^+\cdot 9^-}{1^+} = 72^+$$

Similmente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)^3\left(3-\frac{2}{x}\right)^2}{1+\frac{5}{x^5}}$$
$$= \frac{(2+0^-)^3(3-0^-)^2}{1+0^+}$$
$$= \frac{8^-\cdot 9^-}{1^-} = 72^-$$

Esercizio 22 *Calcolare:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^5+7x^4+1}{2x^5+7}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^5+7x^4+1}{2x^5+7} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5\left(4+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(2+\frac{7}{x^5}\right)}$$
$$= 2$$

Esercizio 23 *Calcolare:*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1}{x^2-1}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1}{x^2-1}&=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\\&=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty\end{aligned}$$

Esercizio 24 *Calcolare:*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+1}{x^2-1}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+1}{x^2-1}&=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\\&=\lim_{x\to\pm\infty}x^2=+\infty\end{aligned}$$

Di seguito un esercizio sulla forma indeterminata $\infty-\infty$:

Esercizio 25 *Calcolare:*

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right)$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right)&=\infty-\infty=\lim_{x\to1}\frac{1+x-3}{1-x^2}\\&=-\frac{1}{0},\end{aligned}$$

occorre dunque distinguire i due casi $x\to1^+$, $x\to1^-$. Studiando il segno del rapporto $\frac{1+x-3}{1-x^2}$, si trova:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}\frac{1+x-3}{1-x^2}&=+\infty\\\lim_{x\to1^-}\frac{1+x-3}{1-x^2}&=-\infty\end{aligned}$$

Esercizio 26 *Calcolare*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x+1}{x}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x+1}{x}&=\frac{\infty}{\infty}\\&=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Esercizio 27 *Calcolare*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{x^2+x+2}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{x^2+x+2} &= \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \begin{cases} +\infty, & se\ x\to+\infty \\ -\infty, & se\ x\to-\infty \end{cases}
\end{aligned}$$

Esercizio 28 *Calcolare*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(5x+1)^3(2x-1)}{x^5+5}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(5x+1)^3(2x-1)}{x^5+5} &= \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(5+\frac{1}{x}\right)^3\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x^5\left(1+\frac{5}{x}\right)} \\
&= 500
\end{aligned}$$

Esercizio 29 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+bx+c}{mx+n},\ con\ a,b\neq 0$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+bx+c}{mx+n} &= \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x\left(m+\frac{n}{x}\right)} \\
&= \frac{a}{m}\cdot\lim_{x\to+\infty} x = \frac{a}{m}\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & se\ \frac{a}{m}>0 \\ -\infty, & se\ \frac{a}{m}<0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Esercizio 30 *Calcolare*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x+5}{x^3-4x+1}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x+5}{x^3-4x+1} &= \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} \\
&= 2\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 2\cdot 0^- = 0^-
\end{aligned}$$

2 Funzioni irrazionali

2.1 Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Si cerca di razionalizzare il numeratore e/o il denominatore.

Esercizio 31 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$.
Metodo 1
Razionalizziamo il numeratore:

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \cdot \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1 - x}{(1 - x)\left(1 + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{1 + \sqrt{x}},$$

onde:

$$\lambda = \lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

Metodo 2
Il denominatore è la differenza di due quadrati: $1 - x = \left(1 - \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)$, *per cui:*

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 32 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x - 2}}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$. *Razionalizziamo il numeratore, poichè è proprio questo termine a dar luogo all'indeterminazione:*

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x - 2}} &= \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x - 2}} \cdot \frac{\sqrt{x + 2} + \sqrt{2x}}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{2x}} \\
&= -\frac{x - 2}{\underbrace{\sqrt{x - 2}}_{=\sqrt{x-2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{2x}} \\
&= -\frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{2x}},
\end{aligned}$$

cosicchè:

$$\lambda = -\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{2x}} = 0$$

Esercizio 33 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to 1} \frac{x + 1 - 2\sqrt{x}}{(x - 1)^2}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$. *Osserviamo che*

$$x + 1 - 2\sqrt{x} = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2,$$

per cui:

$$\lambda = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 \left(\sqrt{x} + 1\right)^2} = \frac{1}{4}$$

Esercizio 34 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$. *Il denominatore è la differenza di due cubi:*

$$x - 1 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - 1^3 = \left(\sqrt[3]{x} - 1\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right),$$

cosicchè:

$$\lambda = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right)} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 35 *Sia data la funzione:*

$$f_a(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x^2(x-a)}{\sqrt{x(x-a)} + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

essendo a un parametro reale positivo. Calcolare

$$\lambda(a) = \lim_{x \to a} f_a(x) \tag{6}$$

Soluzione. *Determiniamo innanzitutto l'insieme di definizione di* $f_a(x)$. *Si tratta di risolvere:*

$$\sqrt{x(x-a)} + \sqrt{x^2 - a^2} \neq 0 \iff \begin{cases} x(x-a) \geq 0 \\ x^2 - a^2 \geq 0 \\ x(x-a) \neq x^2 - a^2 \end{cases} \tag{7}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} x(x-a) \geq 0 &\iff x \in X_1 = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty) \\ x^2 - a^2 \geq 0 &\iff x \in X_2 = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \\ x(x-a) \neq x^2 - a^2 &\iff x \in X_3 = \mathbb{R} - \{a\} \end{aligned}$$

Quindi l'insieme di definizione è:

$$X = X_1 \cap X_2 \cap X_3 = (-\infty, -a] \cup (a, +\infty)$$

Ciò implica che il limite (6) è in realtà un limite destro:

$$\lambda(a) = \lim_{x \to a+} f_a(x)$$

Per rimuovere la forma di indeterminazione sviluppiamo l'espressione analitica della funzione come segue:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x^2(x-a)}{\sqrt{x(x-a)} + \sqrt{x^2 - a^2}} &= \frac{\sqrt{(x-a)(x+a)} + x^2(x-a)}{\sqrt{x(x-a)} + \sqrt{(x-a)(x+a)}} \\ &= \frac{\sqrt{x-a}\left(\sqrt{x+a} + x^2\sqrt{x-a}\right)}{\sqrt{x-a}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{x+a} + x^2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+a}}, \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}\lambda(a) &= \frac{\sqrt{2a}+a^2\cdot 0}{\sqrt{2a}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) \\ &= 2-\sqrt{2},\end{aligned}$$

cioè $\lambda(a)$ è indipendente da a.

Esercizio 36 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x-2} = \frac{0}{0}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lambda &= -\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} \\ &= -\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Esercizio 37 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{0}{0}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}} \\ &= \lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1+x+x^2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

Esercizio 38 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 2}\frac{4-x^2\left(3+\sqrt{5x-1}\right)}{9-5x+1} \\ &= \frac{1}{5}\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)\left(3+\sqrt{5x-1}\right)}{2-x} \\ &= \frac{1}{5}\lim_{x\to 2}(2+x)\left(3+\sqrt{5x-1}\right) \\ &= \frac{24}{5}\end{aligned}$$

Esercizio 39 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2} = \frac{0}{0}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 2} \left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}+2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} \right) \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} = \frac{2+2}{2\left(2\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 40 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 8} \frac{2-\sqrt{x-4}}{x^2-64} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 8} \left(\frac{2-\sqrt{x-4}}{x^2-64} \cdot \frac{2+\sqrt{x-4}}{2+\sqrt{x-4}} \right) \\
&= -\lim_{x\to 8} \frac{x-8}{(x-8)(x+8)\left(2+\sqrt{x-4}\right)} \\
&= -\lim_{x\to 8} \frac{1}{(x+8)\left(2+\sqrt{x-4}\right)} \\
&= -\frac{1}{64}
\end{aligned}$$

Esercizio 41 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 4} \left(\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} \cdot \frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}} \cdot \frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}} \right) \\
&= -\lim_{x\to 4} \frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

2.2 Forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ e $0 \cdot \infty$

Esercizio 42 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)}\\&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}=\frac{1+0^+}{0^++1}\\&=1\end{aligned}$$

Esercizio 43 *Calcolare:*

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}\\&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}}=+\infty\end{aligned}$$

Esercizio 44 *Calcolare:*

$$\lambda=\lim_{x\to\div\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+1}=0\cdot\infty$$

Soluzione. *Separiamo i due casi:* $x\to+\infty$ *e* $x\to-\infty$. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}}\\&= \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}\\&\underset{|x|=x}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\&= \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\&= (+\infty)\cdot\left(1+0^+\right)=+\infty\end{aligned}$$

Per $x\to-\infty$*:*

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}\\&\underset{|x|=-x}{=}-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\&= -\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\&= -\left(+\infty\right)\left(1+0^+\right)=-\infty\end{aligned}$$

Esercizio 45 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 5 + \sqrt{x^4 - 3x + 1}}{x - 1 + \sqrt{x^4 + x - 2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Soluzione. *Per $x \to +\infty$:*

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5 + \sqrt{x^4 \left(1 - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)}}{x - 1 + \sqrt{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}\right)}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5 + x^2\sqrt{1 - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}{x - 1 + x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}}} \\
&= \frac{2 - 0 + \sqrt{1 - 0 + 0}}{0 - 0 + \sqrt{1 + 0 - 0}} = 3
\end{aligned}$$

Alla stessa maniera:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 5 + \sqrt{x^4 - 3x + 1}}{x - 1 + \sqrt{x^4 + x - 2}} = 3$$

Ne concludiamo che la retta $y = 3$ *è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra, per il grafico della funzione assegnata.*

Esercizio 46 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x - \sqrt{x}}{x + 8\sqrt{x}} = \frac{\infty - \infty}{\infty}$$

Soluzione. *Calcoliamo a parte il limite del numeratore:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \left(5x - \sqrt{x}\right) &= \lim_{x \to +\infty} x \left(5 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\
&= (+\infty)(5 - 0) = +\infty,
\end{aligned}$$

per cui il rapporto $\frac{5x - \sqrt{x}}{x + 8\sqrt{x}}$ *si presenta nella forma indeterminata* $\frac{\infty}{\infty}$. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x - \sqrt{x}}{x + 8\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(5 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1 + \frac{8}{\sqrt{x}}\right)} \\
&= \frac{5 - 0}{1 + 0} = 5
\end{aligned}$$

Esercizio 47 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[12]{x^{12} + 1} + \sqrt[4]{x^4 - 1}}{\sqrt[5]{1 + x^5} + \sqrt[3]{1 + x^3}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Soluzione.

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\left(\sqrt[12]{1+\frac{1}{x^{12}}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^{4}}}\right)}{x\left(\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}+1}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}\right)} \\
&= \underbrace{\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}\right)}_{=-1}\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{1+\frac{1}{x^{12}}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^{4}}}}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}+1}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}}\right)}_{=1} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Esercizio 48 *Calcolare:*

$$
\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2+x-1}=\frac{\infty}{\infty}
$$

Soluzione.

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \underbrace{\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)}_{=0}\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-x}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}_{=1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2.3 Forma indeterminata $\infty-\infty$. Fattore razionalizzante.

Supponiamo di voler calcolare il limite:

$$
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}\right)=\infty-\infty \tag{8}
$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}} \\
&= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}} \\
&= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)} \\
&= -\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right) \\
&= -(+\infty)\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}}=-\infty
\end{aligned}
$$

In questo caso relativamente semplice il fattore razionalizzante $R(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{2x}$ si *calcola a occhio*. Nei casi più complicati, invece, si calcola attraverso una formula. Precisamente, supponiamo di avere la funzione:

$$f(x) = \sqrt[n]{p(x)} \pm \sqrt[n]{q(x)}, \tag{9}$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi. Il fattore razionalizzante che ci permette di passare dalla forma indeterminata $\infty - \infty$ alla forma $\frac{\infty}{\infty}$, è [1]:

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{k=1}^{n} (\mp 1)^{k+1} \sqrt[n]{p(x)^{n-k} q(x)^{k-1}} \\ &= \sqrt[n]{p(x)^{n-1}} + (\mp 1)^3 \sqrt[n]{p(x)^{n-2} q(x)} + \sqrt[n]{p(x)^{n-3} q(x)^2} + \\ &+ \dots + (\mp 1)^{n+1} \sqrt[n]{q(x)^{n-1}} \end{aligned} \tag{10}$$

Esercizio 49 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{2x} \right) \tag{11}$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda = \infty - \infty$$

Applichiamo la (10):

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{k=1}^{3} \sqrt[3]{(x-1)^{3-k} (2x)^{k-1}} \\ &= \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{(2x)^2}, \end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{2x} \right) \left(\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{(2x)^2} \right)}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{(2x)^2}} \\ &= - \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{(2x)^2}} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= - \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2} \left[\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{2\left(1 - \frac{1}{x}\right)} + \sqrt[3]{4} \right]} \\ &= - \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} = -(+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

Esercizio 50 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x \right) \tag{12}$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda = \infty - \infty$$

Qui il fattore razionalizzante si calcola ad occhio. Innanzitutto osserviamo che:

$$|x| = \begin{cases} |x|, & se\ x \geq 0 \\ -|x|, & se\ x < 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-|x|\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}\\
&= \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}}_{=2}=2
\end{aligned}$$

Esercizio 51 *Calcolare:*

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right) \tag{13}$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda=\infty-\infty$$

Procediamo in maniera simile all'esercizio precedente:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-|x|\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}+|x|}=\frac{\infty}{\infty}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+|x|}\\
&= \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}}_{=-1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}}_{=2}=-2
\end{aligned}$$

Esercizio 52 *Calcolare:*

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[4]{x^4+1}\right)$$

Soluzione.

$$\lambda=(-\infty)+(+\infty)=\infty-\infty$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to-\infty}\left(-|x| + \sqrt[4]{x^4+1}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{x^4+1}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt[4]{x^4}\right)\end{aligned}$$

Il fattore razionalizzante è:

$$\begin{aligned}R(x) &= \sum_{k=1}^{4}\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^{4-k}\left(x^4\right)^{k-1}}\\ &= \sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^3} + \sqrt[4]{x^4\left(x^4+1\right)^2} + \sqrt[4]{x^8\left(x^4+1\right)} + \sqrt[4]{x^{12}}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt[4]{x^4+1}\right)R(x)}{R(x)}$$

Sviluppiamo il numeratore:

$$\begin{aligned}&\left(x+\sqrt[4]{x^4+1}\right)\left[\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^3} + \sqrt[4]{x^4\left(x^4+1\right)^2} + \sqrt[4]{x^8\left(x^4+1\right)} + \sqrt[4]{x^{12}}\right]\\ &= \sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^4} - \sqrt[4]{x^{16}} = x^4+1-x^4 = 1,\end{aligned}$$

cosicchè:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{R(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Esercizio 53 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[12]{x^{12}+1}\right)$$

Soluzione.

$$\lambda = (-\infty) + (+\infty) = \infty - \infty$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to-\infty}\left(-|x| + \sqrt[12]{x^{12}+1}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[12]{x^{12}} + \sqrt[12]{x^{12}+1}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[12]{x^{12}+1} - \sqrt[12]{x^{12}}\right)\end{aligned}$$

È conveniente calcolare il fattore razionalizzante con Mathematica ottenendo:

$$\lambda = 0$$

Esercizio 54 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+1} - x\right)$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda = \infty - \infty$$

Osserviamo che per $x \to +\infty$ è $x = |x| = \sqrt{x^2}$, onde:

$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2} \right)$$

In questo caso il fattore razionalizzante si calcola a occhio, per cui:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2} \right) \left(\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2} \right)}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 2x + 1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + |x|} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{|x| \left(\sqrt{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\
&= \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{|x|} \right) \cdot \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \cdot \lim_{x \to +\infty} x = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \cdot (+\infty) = +\infty
\end{aligned}$$

Esercizio 55 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + x \right)$$

***Soluzione**. Risulta:*

$$\lambda = (+\infty) + (-\infty) = \infty - \infty$$

Osserviamo che per $x \to -\infty$ è $x = -|x| = -\sqrt{x^2}$, onde:

$$\lambda = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2} \right)$$

In questo caso il fattore razionalizzante si calcola a occhio, per cui:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2} \right) \left(\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2} \right)}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2}} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 2x + 1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + |x|} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{|x| \left(\sqrt{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\
&= \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{|x|} \right) \cdot \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \cdot \lim_{x \to -\infty} (-x) = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \cdot (+\infty) = +\infty
\end{aligned}$$

Esercizio 56 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} \right)$$

Soluzione. *Calcoliamo a parte*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) &= \infty-\infty \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{+\infty} = 0,
\end{aligned}$$

cosicchè il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$. *Scriviamo:*

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} \\
&= \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}\right)}_{=1}\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right)}_{=\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 57 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda = \frac{(-\infty)-(+\infty)}{+\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-|x|\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{x^{2/3}\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}} \\
&\underset{|x|=-x,\ per\ x<0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{x^{2/3}\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2+\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)}{x^{2/3}\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}} \\
&= \left(\lim_{x\to-\infty}x^{1/3}\right)\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}}\right) \\
&= (-\infty)\cdot 2 = -\infty
\end{aligned}$$

Esercizio 58 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[8]{8x^8-3x+1}+2x^3+\sqrt[5]{x^4+1}}{2x^3+\sqrt[5]{x^4+1}}$$

Soluzione. *Scriviamo:*

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt[8]{8x^8-3x+1}}{2x^3+\sqrt[5]{x^4+1}}+1\right)\\ &= \lambda'+1,\end{aligned}$$

dove:

$$\lambda' = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[8]{8x^8-3x+1}}{2x^3+\sqrt[5]{x^4+1}}$$

Calcoliamo a parte il limite del denominatore:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3+\sqrt[5]{x^4+1}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3+x^{4/5}\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^4}}\right)$$

Cioè:

$$\lim_{x\to-\infty}x^3\left(2+\frac{1}{x^{11/5}}\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^4}}\right)=(-\infty)\left(2+0\cdot\sqrt{1+0}\right)=-\infty,$$

cosicchè:

$$\lambda'=\frac{\infty}{\infty}$$

Risulta:

$$\begin{aligned}\lambda' &= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt[8]{8-\frac{3}{x^7}+\frac{1}{x^8}}}{x^3\left(2+\frac{1}{x^{11/5}}\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^4}}\right)}\\ &= \underbrace{\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x^3}\right)}_{=0}\underbrace{\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[8]{8-\frac{3}{x^7}+\frac{1}{x^8}}}{2+\frac{1}{x^{11/5}}\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^4}}}\right)}_{=\frac{\sqrt[8]{8+0}}{2+0}}\\ &= 0\end{aligned}$$

Finalmente

$$\lambda = 1+0=1$$

Esercizio 59 *Dimostrare:*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[2n]{2nx^{2n}-3x+1}+2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}}{2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}}=1$$

dove $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$.

Soluzione. *Scriviamo:*

$$\begin{aligned}\lambda_{2n} &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt[2n]{2nx^{2n}-3x+1}}{2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}}+1\right)\\ &= \lambda'_{2n}+1,\end{aligned}$$

dove:

$$\lambda_{2n}' = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[2n]{2nx^{2n}-3x+1}}{2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}}$$

Calcoliamo a parte il limite del denominatore:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}\right) = \infty - \infty$$

Rimuoviamo l'indeterminazione:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(2x^{2n-1}+x^{\frac{2n-2}{2n-1}}\sqrt[2n-1]{1+\frac{1}{x^{2n-2}}}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left[x^{2n-1}\left(2+\frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}}\sqrt[2n-1]{1+\frac{1}{x^{2n-2}}}\right)\right]\end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}>0, \quad 2n-2>0, \quad 2n-1>0$$

per cui

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}}=0, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{2n-2}}=0, \quad \lim_{x\to-\infty}x^{2n-1}=-\infty$$

Quindi:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}\right)=(-\infty)\left(2+0\cdot\sqrt{1+0}\right)=-\infty$$

Pertanto il calcolo di λ_{2n}' conduce alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda_{2n}' &= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt[2n]{2n-\frac{3}{x^{2n-1}}+\frac{1}{x^{2n}}}}{x^{2n-1}\left(2+\frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}}\sqrt[2n-1]{1+\frac{1}{x^{2n-2}}}\right)}\\ &= \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x^{2n-1}}\right)\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}}\sqrt[2n-1]{1+\frac{1}{x^{2n-2}}}\right)\end{aligned}$$

Il primo limite è

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x^{2n-1}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^{2n-1}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{2(n-1)}}=0$$

Il secondo limite

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}}\sqrt[2n-1]{1+\frac{1}{x^{\frac{2n-2}{2n-1}}}}\right)=2,$$

cosicchè:

$$\lambda_{2n}'=0$$

Ne concludiamo

$$\lambda_{2n}=1, \quad \forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$$

Per $n=2$ il grafico della funzione, tracciato con Mathematica è riportato in fig. 2.

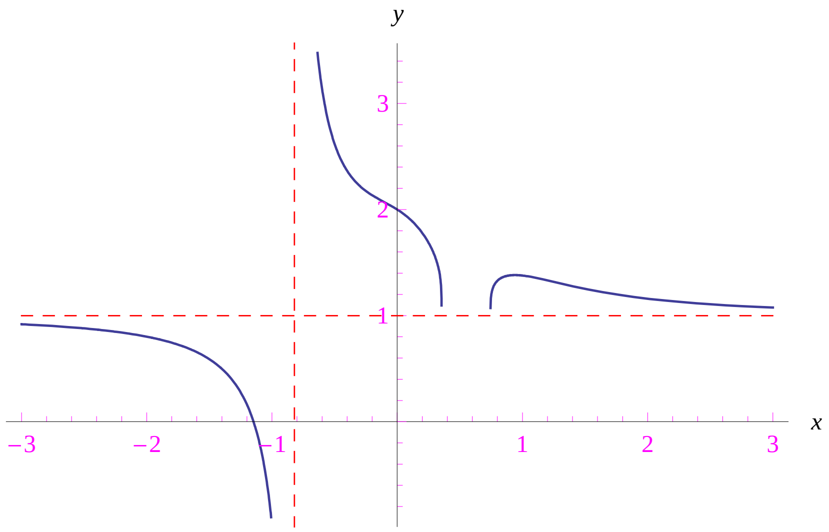


Figura 2: Grafico della funzione $\frac{\sqrt[2n]{2nx^{2n}-3x+1}+2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}}{2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}}$ per $n=2$.

Esercizio 60 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right) = \infty-\infty$$

Soluzione. *Scriviamo:*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$$

Quindi calcoliamo il fattore razionalizzante tramite la (10), ottenendo:

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}\sqrt[3]{(x^3)^{3-k}(1-x^3)^{k-1}} \\ &= \sqrt[3]{x^6}-\sqrt[3]{x^3(1-x^3)}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2} \end{aligned}$$

Riesce:

$$\left(\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{1-x^3}\right)R(x) = 1,$$

quindi:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{1-x^3}\right)R(x)}{R(x)} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \\ &= \frac{1}{(+\infty)-(+\infty)\sqrt[3]{-(+\infty)}+\sqrt[3]{(1-(+\infty))^2}} \\ &= \frac{1}{(+\infty)-(-\infty)+(+\infty)} \\ &= \frac{1}{+\infty} = 0^+ \end{aligned}$$

Esercizio 61 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2}\right)$$

Soluzione. *Abbiamo la forma indeterminata $\infty - \infty$:*

$$\lambda = (+\infty) - (+\infty) = \infty - \infty$$

Il fattore razionalizzante è immediato, per cui:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+3-x^2+2}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{5-4x}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{5}{x}-4\right)}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)}\\
&= \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}\right)}_{=+1}\underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{x}-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}\right)}_{=-2} = -2
\end{aligned}$$

Esercizio 62 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2}\right)$$

Soluzione. *Abbiamo la forma indeterminata $\infty - \infty$:*

$$\lambda = (+\infty) - (+\infty) = \infty - \infty$$

Il fattore razionalizzante è immediato (vedere esercizio precedente):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2}}\\
&= \underbrace{\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}\right)}_{=-1}\underbrace{\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x}-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}\right)}_{=-2} = 2
\end{aligned}$$

Esercizio 63 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+4}-x\right)$$

Soluzione. *Abbiamo la forma indeterminata $\infty - \infty$:*

$$\lambda = \infty - \infty$$

Non c'è bisogno di calcolare il fattore razionalizzante, giacchè $\sqrt{x^2+4x+4} = x+2$, per cui:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}(x+2-x) = 2$$

Esercizio 64 *Calcolare:*

$$\lambda_1 = \lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)$$
$$\lambda_2 = \lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)$$

Soluzione.

$$\lambda_1 = (-\infty)(\infty-\infty)$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)\left(\sqrt{x^2-12x+1}+\sqrt{3x^2+x+2}\right)}{\sqrt{x^2-12x+1}+\sqrt{3x^2+x+2}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2-13x-1}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}\\
&= -\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{13}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}\\
&= -\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|}\right)\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{13}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}}_{=\frac{2}{1+\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

Il primo limite a secondo membro è:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|} = -\lim_{x\to-\infty} x = +\infty,$$

per cui:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right) = -(+\infty)\cdot\frac{2}{1+\sqrt{3}} = -\infty,$$

cosicchè:

$$\lambda_1 = (-\infty)(-\infty) = +\infty$$

Calcoliamo λ_2 *utilizzando lo stesso procedimento:*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)\\
&= -\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{|x|}\right)\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{13}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}}_{=\frac{2}{1+\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

Riesce:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$$

per cui:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right) = -(+\infty)\cdot\frac{2}{1+\sqrt{3}} = -\infty$$

Quindi:

$$\lambda_2 = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

3 Esercizi di riepilogo

Questa sezione compone un ripasso per il calcolo di limiti di funzioni razionali fratte e irrazionali.

Esercizio 65 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{2x + 5}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:*

$$\lambda = \frac{\infty}{\infty}$$

Scriviamo:

$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(2 + \frac{5}{x}\right)} = +\infty$$

Esercizio 66 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:*

$$\lambda = \frac{\infty}{\infty}$$

Scriviamo:

$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{4}{x^3}\right)} = \frac{3}{+\infty} = 0^+$$

Esercizio 67 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Scriviamo:

$$\lambda = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = 4$$

Esercizio 68 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \left(x^2 + ax + a^2\right) = 3a^2 \end{aligned}$$

Esercizio 69 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Risulta: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, $x^2 - 12x + 20 = (x-2)(x-10)$, *onde:*

$$\lambda = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x-10} = \frac{1}{8}$$

Esercizio 70 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Risulta: $x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$, $3x^2 - 5x - 2 = (3x+1)(x-2)$, *onde:*

$$\lambda = \lim_{x \to 2} \frac{x+5}{3x+1} = 1$$

Esercizio 71 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Risulta: $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2)$, $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, *onde:*

$$\lambda = \lim_{x \to -2} \frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}$$

Esercizio 72 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 - x - 6}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Risulta: $x^3 + 4x^2 + 4x = x(x+2)^2$, $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, *onde:*

$$\lambda = \lim_{x \to -2} \frac{x(x+2)}{x-3} = 0$$

Esercizio 73 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{3x-2}}{x-1}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{1-\sqrt{3-2}}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 1} \frac{\left(1-\sqrt{3x-2}\right)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}{(x-1)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1-3x+2}{(x-1)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)} \\
&= -3\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{3x-2}} = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 74 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{0}{\sqrt{0+4}-2} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x+4-4} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{x+4}+2\right) = 4
\end{aligned}$$

Esercizio 75 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x-2}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{\sqrt{2+2}-\sqrt{4}}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)} \\
&= -\lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Esercizio 76 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to -1} \frac{x + \sqrt{2x+3}}{x+1}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{-1 + \sqrt{-2+3}}{-1+1} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \to -1} \frac{\left(x + \sqrt{2x+3}\right)\left(x - \sqrt{2x+3}\right)}{(x+1)\left(x - \sqrt{2x+3}\right)} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{(x+1)\left(x - \sqrt{2x+3}\right)}\end{aligned}$$

Ma $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, *per cui*

$$\lambda = \lim_{x \to -1} \frac{x-3}{x - \sqrt{2x+3}} = 2$$

Riferimenti bibliografici

[1] Orecchia G., Spataro S., *Limiti. Esercizi* Tecnos – Collana Esami