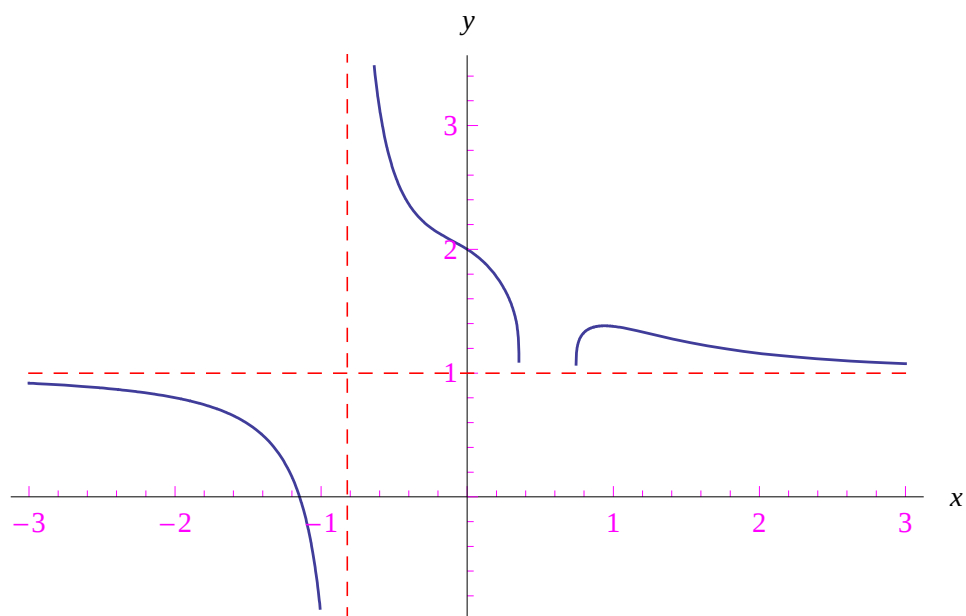


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[2n]{2nx^{2n}-3x+1}+2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}}{2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}} = 1$$

Marcello Colozzo



Esercizio 1 *Dimostrare:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[2n]{2nx^{2n} - 3x + 1} + 2x^{2n-1} + \sqrt[2n-1]{x^{2n-2} + 1}}{2x^{2n-1} + \sqrt[2n-1]{x^{2n-2} + 1}} = 1$$

dove $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Soluzione. *Scriviamo:*

$$\begin{aligned} \lambda_{2n} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt[2n]{2nx^{2n} - 3x + 1}}{2x^{2n-1} + \sqrt[2n-1]{x^{2n-2} + 1}} + 1 \right) \\ &= \lambda'_{2n} + 1, \end{aligned}$$

dove:

$$\lambda'_{2n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[2n]{2nx^{2n} - 3x + 1}}{2x^{2n-1} + \sqrt[2n-1]{x^{2n-2} + 1}}$$

Calcoliamo a parte il limite del denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x^{2n-1} + \sqrt[2n-1]{x^{2n-2} + 1} \right) = \infty - \infty$$

Rimuoviamo l'indeterminazione:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x^{2n-1} + \sqrt[2n-1]{x^{2n-2} + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x^{2n-1} + x^{\frac{2n-2}{2n-1}} \sqrt[2n-1]{1 + \frac{1}{x^{2n-2}}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^{2n-1} \left(2 + \frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}} \sqrt[2n-1]{1 + \frac{1}{x^{2n-2}}} \right) \right] \end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\frac{4n^2 - 6n + 3}{2n - 1} > 0, \quad 2n - 2 > 0, \quad 2n - 1 > 0$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{2n-2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n-1} = -\infty$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x^{2n-1} + \sqrt[2n-1]{x^{2n-2} + 1} \right) = (-\infty) \left(2 + 0 \cdot \sqrt[2n-1]{1 + 0} \right) = -\infty$$

Pertanto il calcolo di λ'_{2n} conduce alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned} \lambda'_{2n} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt[2n]{2n - \frac{3}{x^{2n-1}} + \frac{1}{x^{2n}}}}{x^{2n-1} \left(2 + \frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}} \sqrt[2n-1]{1 + \frac{1}{x^{2n-2}}} \right)} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x^{2n-1}} \right) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}} \sqrt[2n-1]{1 + \frac{1}{x^{2n-2}}} \right) \end{aligned}$$

Il primo limite è

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x^{2n-1}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^{2n-1}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{2(n-1)}} = 0$$

Il secondo limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}} {}^{2n-1}\sqrt{1 + \frac{1}{x^{\frac{2n-2}{2n-1}}}} \right) = 2,$$

cosicchè:

$$\lambda'_{2n} = 0$$

Ne concludiamo

$$\lambda_{2n} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

Per $n = 2$ il grafico della funzione, tracciato con *Mathematica* è riportato in fig. 1.

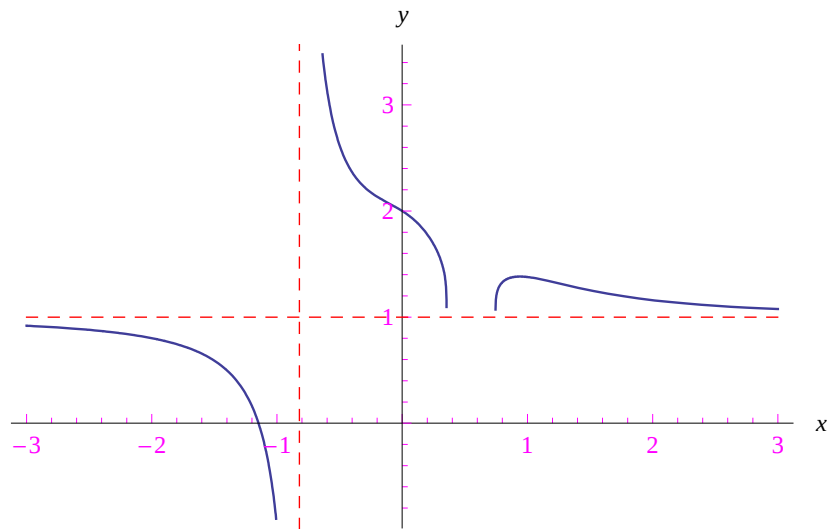


Figura 1: Grafico della funzione $\frac{{}^{2n}\sqrt{2nx^{2n}-3x+1}+2x^{2n-1}+{}^{2n-1}\sqrt{x^{2n-2}+1}}{2x^{2n-1}+{}^{2n-1}\sqrt{x^{2n-2}+1}}$ per $n = 2$.