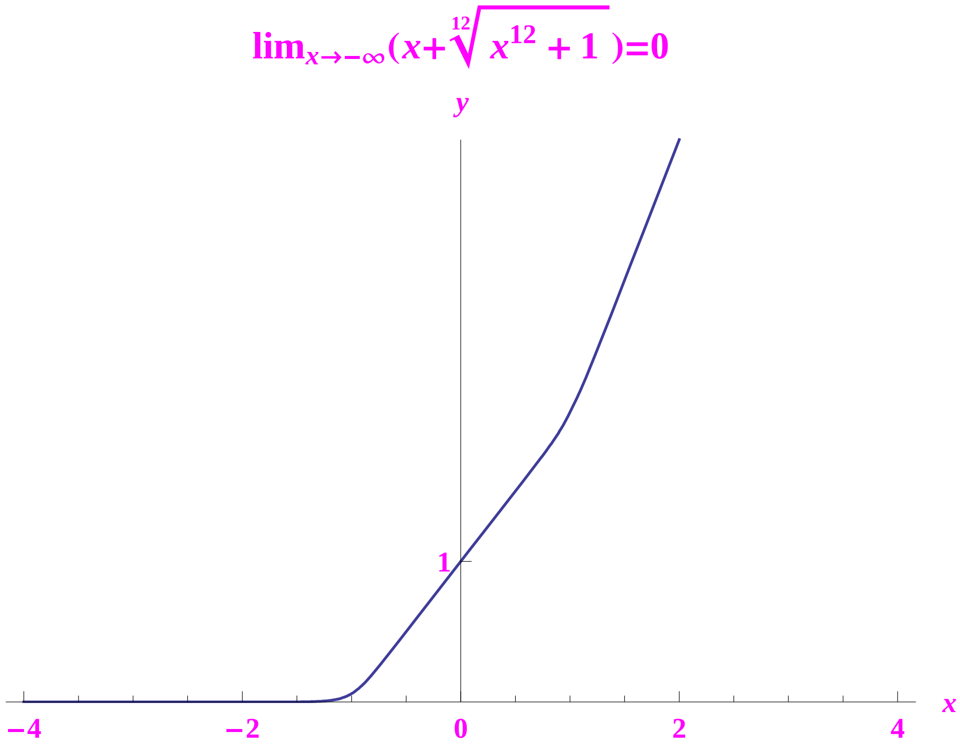
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty}a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)$$

Limiti di funzioni irrazionali – Fattore razionalizzante

Marcello Colozzo



Esercizio 1 *Supponiamo di voler calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}\right)=\infty-\infty \tag{1}$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}$*:*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}}\\
&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}}\\
&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}\\
&=-\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right)\\
&=-\left(+\infty\right)\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}}=-\infty
\end{aligned}$$

In questo caso relativamente semplice il fattore razionalizzante $R(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}$ *si calcola a occhio. Nei casi più complicati, invece, si calcola attraverso una formula. Precisamente, supponiamo di avere la funzione:*

$$f(x)=\sqrt[n]{p(x)}\pm\sqrt[n]{q(x)}, \tag{2}$$

dove $p(x)$ *e* $q(x)$ *sono polinomi. Il fattore razionalizzante che ci permette di passare dalla forma indeterminata* $\infty-\infty$ *alla forma* $\frac{\infty}{\infty}$*, è:*

$$R(x)=\sum_{k=1}^{n}(\mp1)^{k+1}\sqrt[n]{p(x)^{n-k}\,q(x)^{k-1}} \tag{3}$$

Esercizio 2 *Calcolare:*

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right) \tag{4}$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda=\infty-\infty$$

Applichiamo la (3):

$$\begin{aligned}
R(x)&=\sum_{k=1}^{3}\sqrt[3]{(x-1)^{3-k}(2x)^{k-1}}\\
&=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{(2x)^2},
\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x\,(x-1)}+\sqrt[3]{(2x)^2}\right)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x\,(x-1)}+\sqrt[3]{(2x)^2}} \\
&= -\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x\,(x-1)}+\sqrt[3]{(2x)^2}} = \frac{\infty}{\infty} \\
&= -\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2}\left[\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{2\left(1-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt[3]{4}\right]} \\
&= -\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = -(+\infty) = -\infty
\end{aligned}$$

Esercizio 3 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x\right) \tag{5}$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda = \infty - \infty$$

Qui il fattore razionalizzante si calcola ad occhio. Innanzitutto osserviamo che:

$$|x| = \begin{cases} |x|, & se\ x \geq 0 \\ -|x|, & se\ x < 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-|x|\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)} \\
&= \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}}_{=2} = 2
\end{aligned}$$

Esercizio 4 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right) \tag{6}$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda = \infty - \infty$$

Procediamo in maniera simile all'esercizio precedente:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-|x|\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}+|x|}=\frac{\infty}{\infty}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+|x|}\\
&= \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}}_{=-1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}}_{=2}=-2
\end{aligned}$$

Esercizio 5 *Calcolare:*

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[4]{x^4+1}\right)$$

Soluzione.

$$\lambda=(-\infty)+(+\infty)=\infty-\infty$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to-\infty}\left(-|x|+\sqrt[4]{x^4+1}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{x^4+1}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[4]{x^4}\right)
\end{aligned}$$

Il fattore razionalizzante è:

$$\begin{aligned}
R(x) &= \sum_{k=1}^{4}\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^{4-k}\left(x^4\right)^{k-1}}\\
&= \sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^3}+\sqrt[4]{x^4\left(x^4+1\right)^2}+\sqrt[4]{x^8\left(x^4+1\right)}+\sqrt[4]{x^{12}}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt[4]{x^4+1}\right)R(x)}{R(x)}$$

Sviluppiamo il numeratore:

$$\begin{aligned}
&\left(x+\sqrt[4]{x^4+1}\right)\left[\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^3}+\sqrt[4]{x^4\left(x^4+1\right)^2}+\sqrt[4]{x^8\left(x^4+1\right)}+\sqrt[4]{x^{12}}\right]\\
&=\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^4}-\sqrt[4]{x^{16}}=x^4+1-x^4=1,
\end{aligned}$$

cosicchè:

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{R(x)}=\frac{1}{+\infty}=0^+$$

Esercizio 6 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt[12]{x^{12} + 1} \right)$$

Soluzione.

$$\lambda = (-\infty) + (+\infty) = \infty - \infty$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \to -\infty} \left(-|x| + \sqrt[12]{x^{12} + 1} \right) \\ &= \lim_{x \to -\infty} \left(-\sqrt[12]{x^{12}} + \sqrt[12]{x^{12} + 1} \right) \\ &= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[12]{x^{12} + 1} - \sqrt[12]{x^{12}} \right) \end{aligned}$$

È conveniente calcolare il fattore razionalizzante con Mathematica ottenendo:

$$\lambda = 0$$