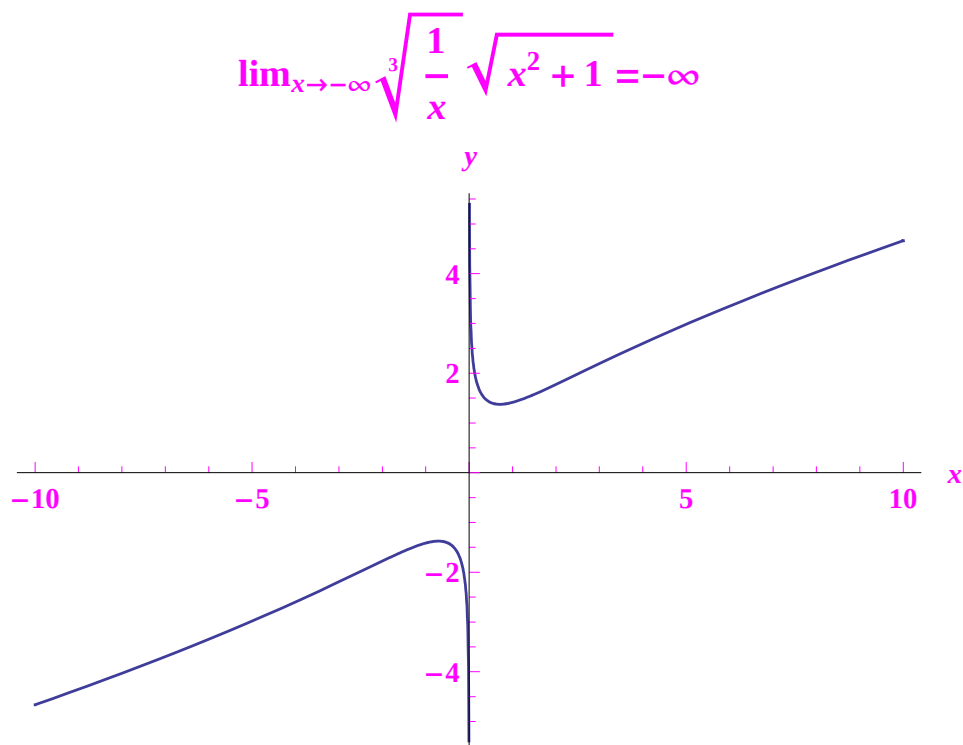


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Limiti di funzioni irrazionali (parte prima)

Marcello Colozzo



Esercizio 1 Calcolare:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$$

Soluzione. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Metodo 1

Razionalizziamo il numeratore:

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \cdot \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1 - x}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} = \frac{1}{1 + \sqrt{x}},$$

onde:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

Metodo 2

Il denominatore è la differenza di due quadrati: $1 - x = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})$, per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2 Calcolare:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}$$

Soluzione. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Razionalizziamo il numeratore, poichè è proprio questo termine a dar luogo all'indeterminazione:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} &= \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}} \\ &= -\frac{x-2}{\underbrace{\sqrt{x-2}}_{=\sqrt{x-2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}} \\ &= -\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}}, \end{aligned}$$

cosicchè:

$$\lambda = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}} = 0$$

Esercizio 3 Calcolare:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2}$$

Soluzione. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Osserviamo che

$$x+1-2\sqrt{x} = (\sqrt{x}-1)^2,$$

per cui:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{4}$$

Esercizio 4 Calcolare:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

Soluzione. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Il denominatore è la differenza di due cubi:

$$x - 1 = (\sqrt[3]{x})^3 - 1^3 = (\sqrt[3]{x} - 1) (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1),$$

cosicchè:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} - 1) (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 5 Sia data la funzione:

$$f_a(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x^2(x - a)}{\sqrt{x(x - a)} + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

essendo a un parametro reale positivo. Calcolare

$$\lambda(a) = \lim_{x \rightarrow a} f_a(x) \quad (1)$$

Soluzione. Determiniamo innanzitutto l'insieme di definizione di $f_a(x)$. Si tratta di risolvere:

$$\sqrt{x(x - a)} + \sqrt{x^2 - a^2} \neq 0 \iff \begin{cases} x(x - a) \geq 0 \\ x^2 - a^2 \geq 0 \\ x(x - a) \neq x^2 - a^2 \end{cases} \quad (2)$$

Risulta:

$$\begin{aligned} x(x - a) \geq 0 &\iff x \in X_1 = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty) \\ x^2 - a^2 \geq 0 &\iff x \in X_2 = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \\ x(x - a) \neq x^2 - a^2 &\iff x \in X_3 = \mathbb{R} - \{a\} \end{aligned}$$

Quindi l'insieme di definizione è:

$$X = X_1 \cap X_2 \cap X_3 = (-\infty, -a] \cup (a, +\infty)$$

Ciò implica che il limite (1) è in realtà un limite destro:

$$\lambda(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f_a(x)$$

Per rimuovere la forma di indeterminazione sviluppiamo l'espressione analitica della funzione come segue:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x^2(x - a)}{\sqrt{x(x - a)} + \sqrt{x^2 - a^2}} &= \frac{\sqrt{(x - a)(x + a)} + x^2(x - a)}{\sqrt{x(x - a)} + \sqrt{(x - a)(x + a)}} \\ &= \frac{\sqrt{x - a}(\sqrt{x + a} + x^2\sqrt{x - a})}{\sqrt{x - a}(\sqrt{x} + \sqrt{x + a})} \\ &= \frac{\sqrt{x + a} + x^2\sqrt{x - a}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + a}}, \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}\lambda(a) &= \frac{\sqrt{2a} + a^2 \cdot 0}{\sqrt{2a} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) \\ &= 2 - \sqrt{2},\end{aligned}$$

cioè $\lambda(a)$ è indipendente da a .

Esercizio 6 Calcolare:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

Soluzione. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= - \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Esercizio 7 Calcolare:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 - x^2}}{\sqrt[3]{1 - x^3}} = \frac{0}{0}$$

Soluzione. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{1+x}{1+x+x^2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

Esercizio 8 Calcolare:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{5x - 1}} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2(3 + \sqrt{5x - 1})}{9 - 5x + 1} \\ &= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)(3 + \sqrt{5x - 1})}{2 - x} \\ &= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 2} (2+x)(3 + \sqrt{5x - 1}) \\ &= \frac{24}{5}\end{aligned}$$

Esercizio 9 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3} - 2} = \frac{0}{0}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3} + 2}{\sqrt{x^2+3} + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3} + 2)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} + 2}{(x+1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \frac{2+2}{2(2\sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 10 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2 - \sqrt{x-4}}{x^2 - 64} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{2 - \sqrt{x-4}}{x^2 - 64} \cdot \frac{2 + \sqrt{x-4}}{2 + \sqrt{x-4}} \right) \\ &= - \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{(x-8)(x+8)(2 + \sqrt{x-4})} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{(x+8)(2 + \sqrt{x-4})} \\ &= - \frac{1}{64}\end{aligned}$$

Esercizio 11 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5+x}}{3 + \sqrt{5+x}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5-x}}{1 + \sqrt{5-x}} \right) \\ &= - \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 + \sqrt{5-x}}{3 + \sqrt{5+x}} \\ &= - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Esercizio 12 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{2\sqrt{x} + x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Soluzione. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{\sqrt{x}} + 1} = \frac{1 + 0^+}{0^+ + 1} \\ &= 1\end{aligned}$$

Esercizio 13 Calcolare:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{4x - 1} + \sqrt{x + 1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Soluzione. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 - \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x} \left(\sqrt{4 - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(3 - \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{4 - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = +\infty\end{aligned}$$

Esercizio 14 Calcolare:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \div \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + 1} = 0 \cdot \infty$$

Soluzione. Separiamo i due casi: $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{|x|=x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= (+\infty) \cdot (1 + 0^+) = +\infty\end{aligned}$$

Per $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} \\ &= - \lim_{|x|=-x} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= - (+\infty) (1 + 0^+) = -\infty\end{aligned}$$