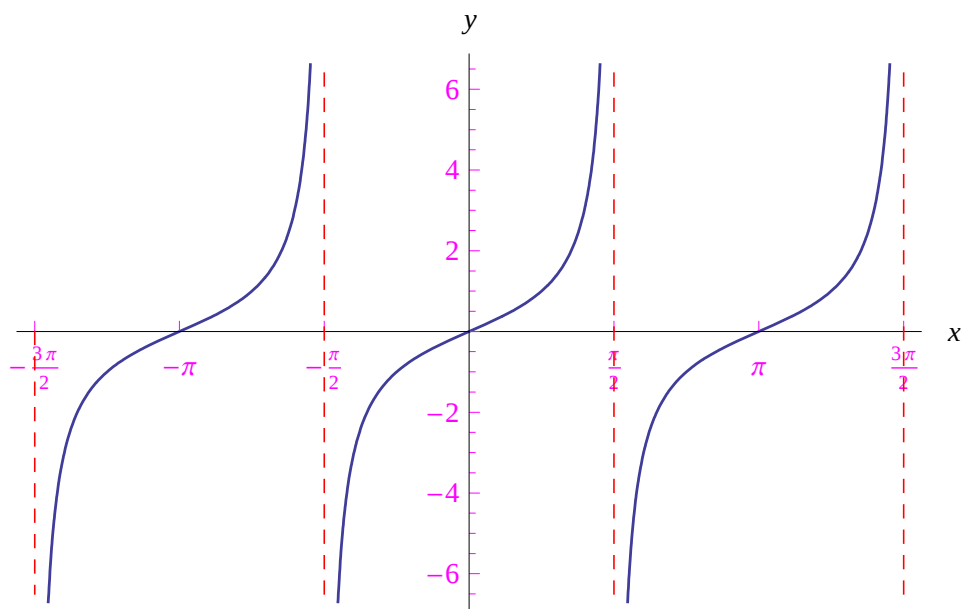


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx = \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Limiti di alcune funzioni elementari (parte seconda)

Marcello Colozzo



1 Limiti di alcune funzioni elementari (parte 2)

Proseguiamo nel lavoro iniziato con l'[handbook precedente](#).

1.1 Funzioni trigonometriche

In un [handbook precedente](#) abbiamo visto che la funzione $\sin x$ è non regolare per $x \rightarrow \pm\infty$. In generale, tutte le funzioni periodiche il cui insieme di definizione ha $+\infty$ e $-\infty$ come punti di accumulazione, non sono regolari per $x \rightarrow \pm\infty$. Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 1 Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è **periodica** se esiste un numero reale $T > 0$ tale che:

- $x \in X \implies \forall k \in \mathbb{Z}, (x + kT) \in X$
- $\forall x \in X, f(x + kT) = f(x), \forall k \in \mathbb{Z}$

Il numero reale $T > 0$ è il **periodo fondamentale** (o semplicemente il **periodo**) della funzione.

Osservazione 2 Se $X = \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \tau_n = nT$, è un periodo. Infatti:

$$f(x + k\tau_n) = f(x + k'T) = f(x),$$

dove $\mathbb{Z} \ni k' = kn, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Osservazione 3 Una funzione costante è periodica e ogni $T \in (0, +\infty)$ è un periodo fondamentale. Infatti, posto $f(x) = c$, si ha:

$$\forall T \in (0, +\infty), \forall k \in \mathbb{Z}, f(x + kT) = c = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Se l'insieme di definizione X è illimitato superiormente e inferiormente, ci poniamo il problema di studiare la regolarità di f nei punti di accumulazione all'infinito $+\infty$ e $-\infty$. Ma in virtù della periodicità, per $x \rightarrow \pm\infty$, la funzione assume infinite volte tutti i valori $f(x) \in f(\mathbb{R})$. Nell'ipotesi in cui f non sia una funzione costante¹, si ha:

$$\begin{aligned} \nexists l \in \mathbb{R} \mid \forall J_\varepsilon(l), \exists I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \implies f(x) \in J_\varepsilon(l) \\ \implies \nexists l \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \end{aligned}$$

Alla stessa conclusione si perviene nel limite per $x \rightarrow -\infty$.

Osservazione 4 Per esprimere il comportamento non regolare delle funzioni periodiche, alcuni software di computer algebra utilizzano una notazione simbolica del tipo (nel caso della funzione $\sin x$):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x = [-1, 1],$$

per indicare appunto che per $x \rightarrow \pm\infty$, la funzione $\sin x$ assume infinite volte tutti i valori appartenenti al suo codominio, cioè l'intervallo compatto $[-1, 1]$. In fig. 1 è riportata la notazione utilizzata da Mathematica.

¹In tal caso è $f(\mathbb{R}) = \{c\}$, onde la funzione assume infinite volte il valore c , ed è regolare per $x \rightarrow \pm\infty$, avendosi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$$

```
In[1]:= Limit[Sin[x], x -> ∞]
Out[1]:= Interval[{-1, 1}]
```

Figura 1: Nella cella di input chiediamo a Mathematica di calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$. La cella di output visualizza il risultato e cioè l'intervallo chiuso $[-1, 1]$.

Le funzioni $\tan x$ e $\cot x$ (periodo fondamentale $T = \pi$) hanno punti di accumulazione al finito non appartenenti all'insieme di definizione.

- $\tan x$ è definita in:

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

Il grafico è riportato in fig. 2.

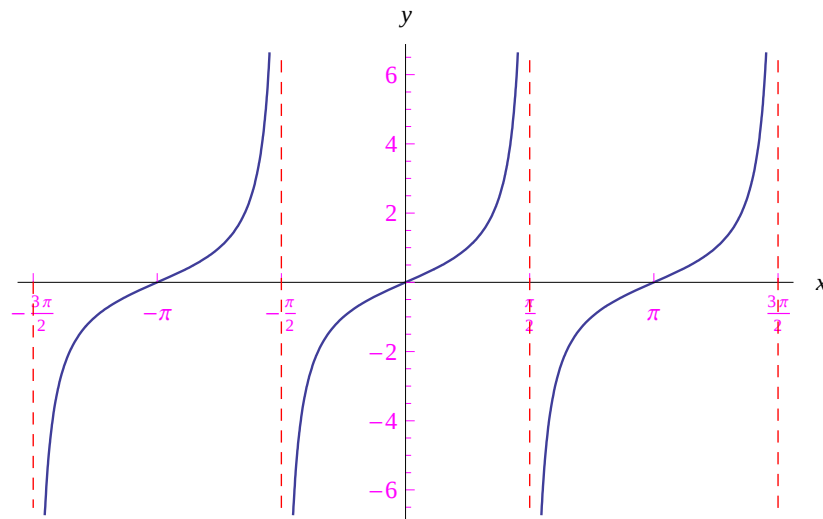


Figura 2: Diagramma cartesiano di $\tan x$ nell'intervallo $[-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad (1)$$

Tenendo conto della periodicità:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} \tan x = -\infty \quad (2)$$

- $\cot x$ è definita in:

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$$

Il grafico è riportato in fig. 3.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x = -\infty \quad (3)$$

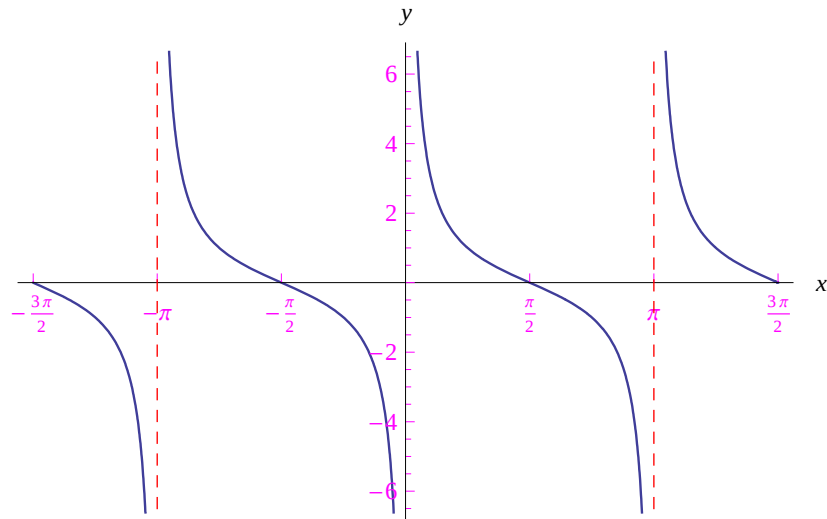


Figura 3: Diagramma cartesiano di $\cot x$ nell'intervallo $[-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

Tenendo conto della periodicità:

$$\lim_{x \rightarrow k\pi^+} \cot x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow k\pi^-} \cot x = -\infty \quad (4)$$

Le funzioni trigonometriche inverse $\arcsin x$ e $\arccos x$ sono definite in $[-1, 1]$, pertanto non esistono punti di accumulazione non appartenenti all'insieme di definizione. I grafici di tali funzioni sono riportati nelle figg. 4-5.

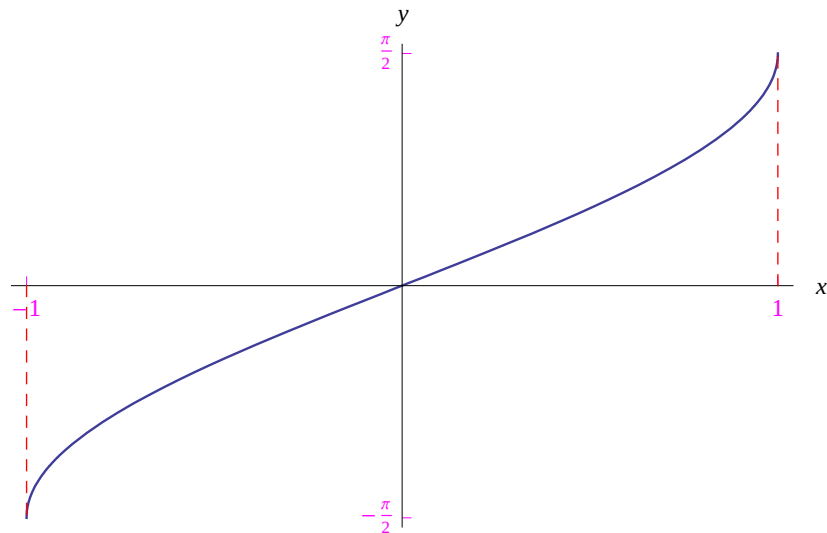


Figura 4: Diagramma cartesiano di $\arcsin x$.

1.2 Funzioni trigonometriche inverse

Il grafico della funzione $\arctan x$ è riportato in fig. 6.

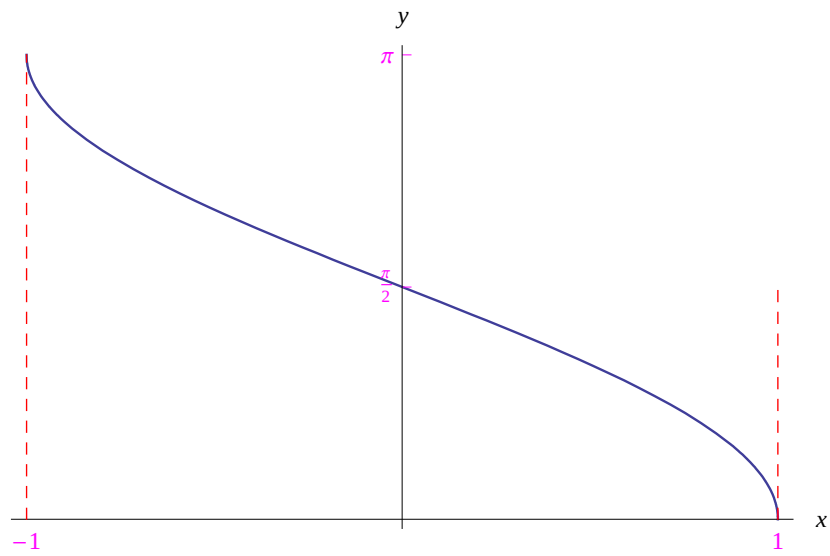


Figura 5: Diagramma cartesiano di $\arccos x$.

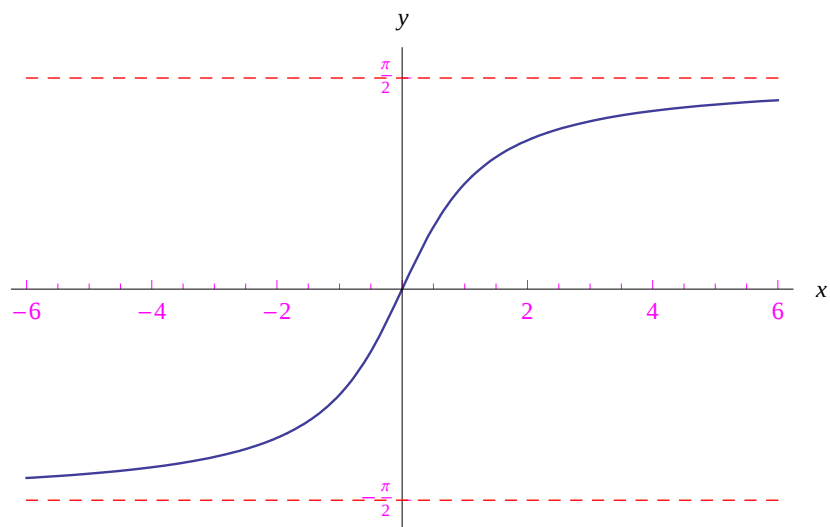


Figura 6: Diagramma cartesiano di $\arctan x$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad (5)$$

Il grafico della funzione $\operatorname{arccot} x$ è riportato in fig. 7.

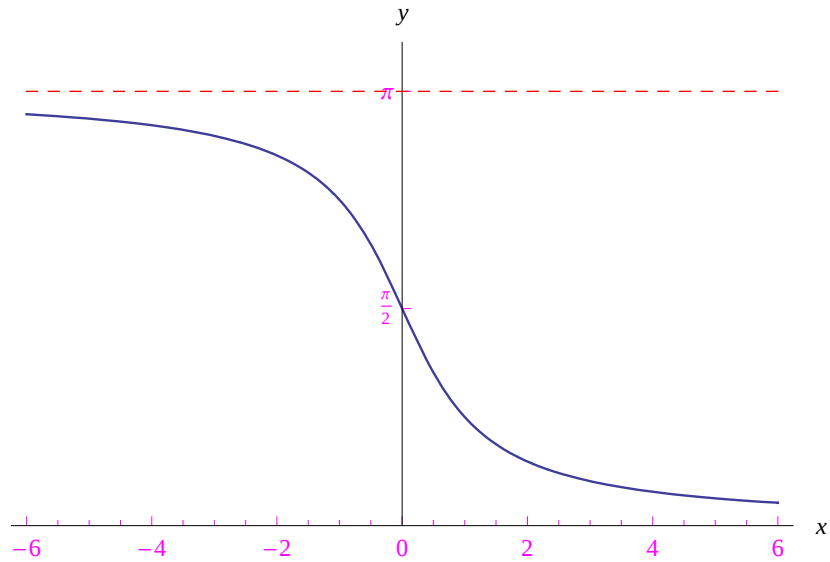


Figura 7: Diagramma cartesiano di $\operatorname{arccot} x$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi^- \quad (6)$$