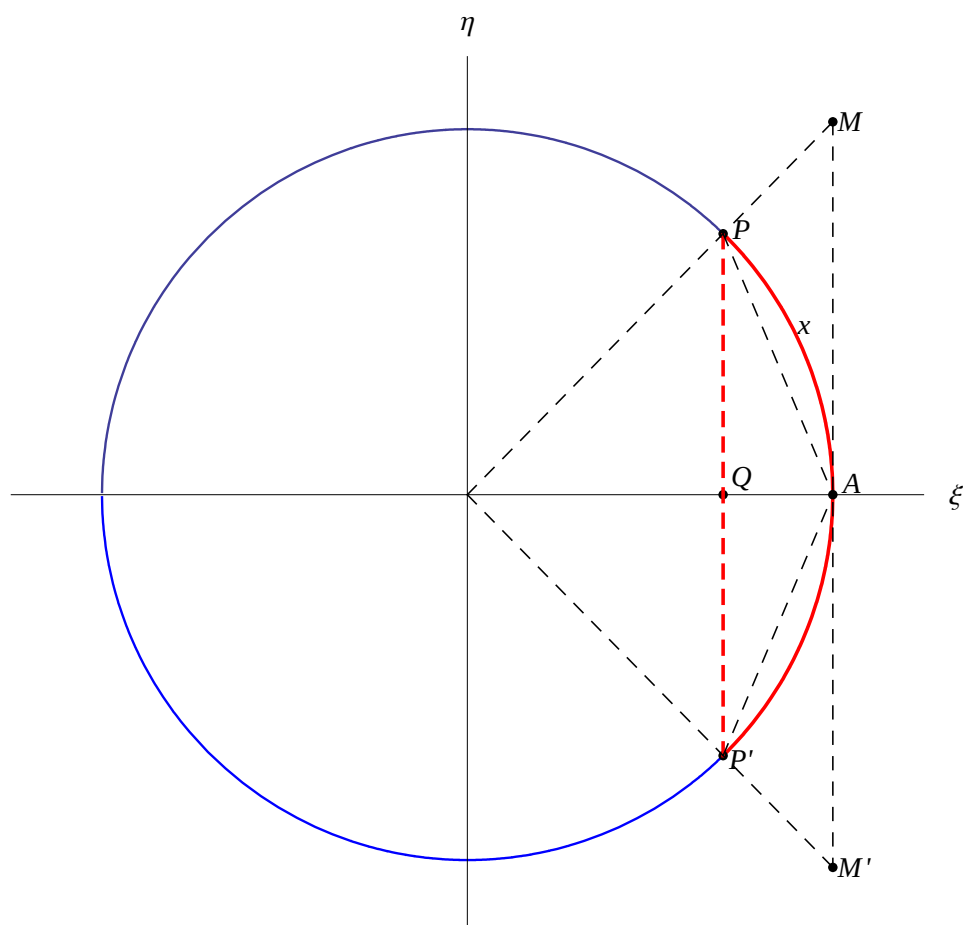


# Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx = \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Marcello Colozzo



Il calcolo del limite di una funzione che si presenta in forma indeterminata, è spesso riconducibile ai cosiddetti *limiti fondamentali*.

### Proposizione 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (1)$$

**Dimostrazione.** Osserviamo innanzitutto che la funzione  $\frac{\sin x}{x}$  è definita in  $X = \mathbb{R} - \{0\}$ , e per  $x \rightarrow 0$  si presenta nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ . Per rimuovere l'indeterminazione iniziamo con il dimostrare che

$$|\sin x| < |x|, \quad \forall x \in X \quad (2)$$

La (2) è banale per  $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ , poichè:

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$$

Quindi occorre dimostrarla per  $|x| < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ . La funzione  $\sin x$  è dispari, per cui possiamo limitarci a  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Nel piano cartesiano fissiamo un riferimento ortogonale  $\mathcal{R}(\Omega\xi\eta)$  e quindi la circonferenza trigonometrica  $C : \xi^2 + \eta^2 = 1$ , come illustrato in fig. 1. Il punto  $A(1,0)$  è

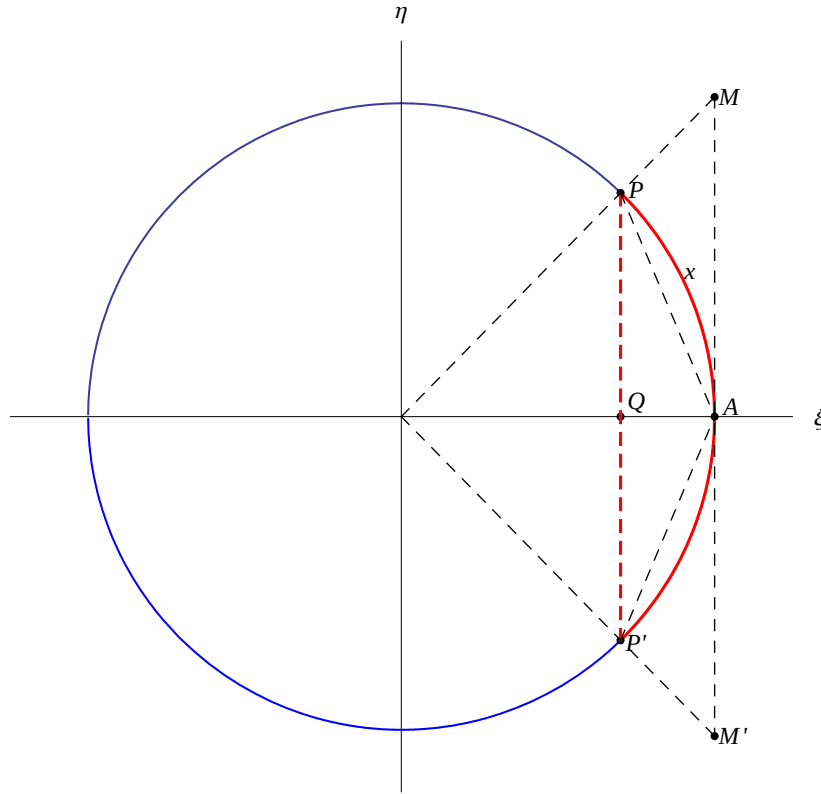


Figura 1: Circonferenza trigonometrica.

l'origine dell'arco la cui misura in radianti è  $x$ . Quindi:

$$\sin x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \overline{PQ}$$

Sia  $P'$  il simmetrico del punto  $P$  rispetto all'asse  $\xi$ . Se  $S$  è il quadrilatero  $\Omega PAP'$  e  $S'$  il settore circolare  $\Omega PAP'$ , si ha:

$$S \subset S' \implies \text{area}(S) < \text{area}(S') \quad (3)$$

L'area di  $S$  è  $\frac{1}{2} \cdot \overline{\Omega A} \cdot \overline{PP'} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \underset{\overline{\Omega A}=1}{=} \frac{1}{2} \underbrace{\overline{PP'}}_{=2 \sin x} = \sin x$ . L'area del settore circolare è  $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \overline{\Omega A}^2 = x$ , onde per la (3):

$$\sin x < x$$

Inoltre:

$$\tan x = \frac{\overline{AM}}{\overline{\Omega A}} = \overline{AM},$$

per cui detto  $S''$  il triangolo  $\Omega MM'$ , si ha:

$$S \subset S' \subset S'' \implies \text{area}(S) < \text{area}(S') < \text{area}(S'') \quad (4)$$

Ma  $\text{area} S'' = \tan x$ , onde:

$$\sin x < x < \tan x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Dividendo per  $\sin x$  e tenendo conto che  $\sin x > 0$  in  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \implies 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Da quanto detto in precedenza, in forza della parità  $(-1)$  della funzione  $\sin x$ , tale doppia disuguaglianza è valida anche per  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , quindi:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

onde per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

■

**Osservazione 2** La disequazione  $|\sin x| < |x|$  può essere risolta per via grafica, tracciando i grafici di  $|\sin x|$  e  $|x|$ , come illustrato in fig. 2

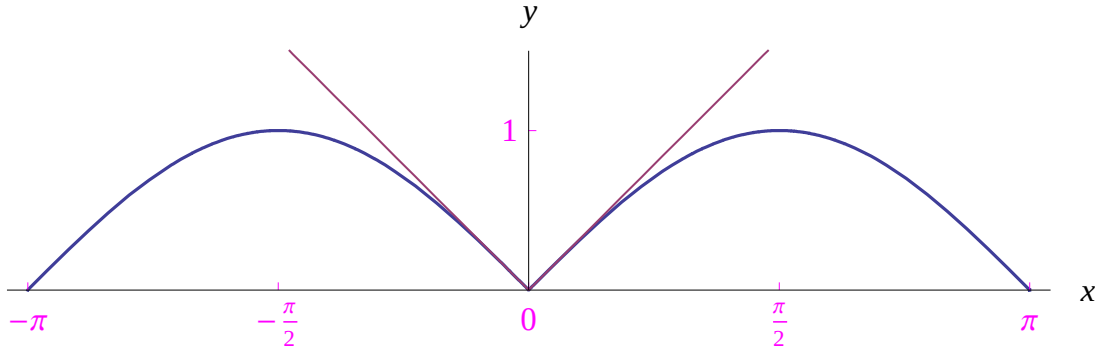


Figura 2: Risulta  $|\sin x| < |x|, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

---

**Osservazione 3** *Nel corso della dimostrazione abbiamo visto che  $\sin x < x$ . Ciò implica:*

$$2 \sin x < 2x \iff \overline{P'P} < \widehat{P'P},$$

*che esprime la nota proprietà secondo cui l'arco sotteso da una corda ha una lunghezza maggiore della corda medesima. Inoltre:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{2x} = 1 \implies \lim_{\widehat{P'P} \rightarrow 0} \frac{\overline{P'P}}{\widehat{P'P}} = 1 \quad (5)$$

*Come vedremo più avanti (Infinitesimi ed infiniti), la (5) esprime la seguente proprietà: per  $\widehat{P'P} \rightarrow 0$ , l'arco di circonferenza  $\widehat{P'P}$  e la corda  $\overline{P'P}$  tendono a 0 con la stessa rapidità.*

Il codice *Mathematica* per la generazione di grafici e animazioni .gif è prelevabile da questa [risorsa online](#).