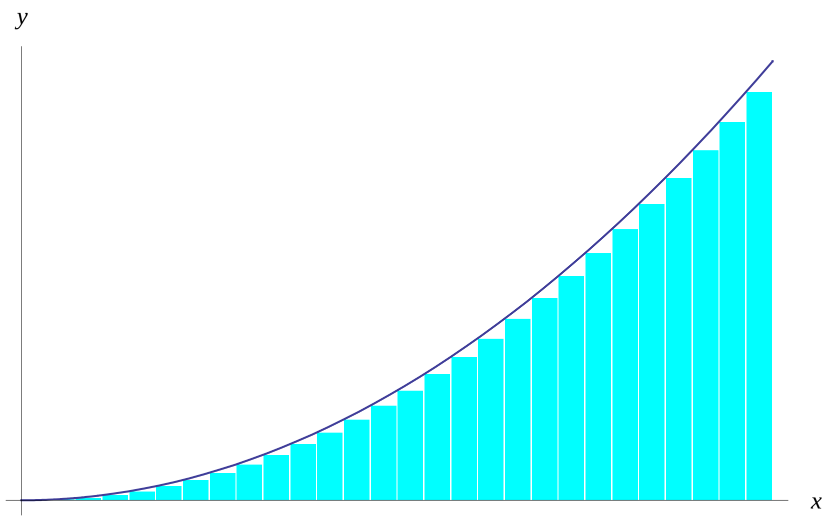
SCIENTIA – http://www.scientiajournal.org/
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Quaderni di Matematica – 2015

Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info

Calcolo del limite del somme integrali

Marcello Colozzo



Indice

1 Calcolo del limite delle somme integrali

Nell'ebook precedente abbiamo graficato in funzione di n, l'andamento delle somme integrali

$$\sigma_D = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k), \tag{1}$$

relative alla funzione $f(x) = \sin 4x + \frac{1}{3}x^2 - 2x + 5$ per $x \in [0, 5]$. Più precisamente, abbiamo riportato l'andamento della successione reale $\{\sigma_{\mathcal{D}}\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ i cui singoli termini $\sigma_{\mathcal{D}}(n)$ sono stati calcolati numericamente attraverso un C.A.S. (acronimo di Computer Algebra System). L'andamento del *grafico* di $\{\sigma_{\mathcal{D}}\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$, i.e. del luogo dei punti:

$$\Gamma_{\sigma_{\mathcal{D}}} = \left\{ (n, \sigma_{\mathcal{D}}) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}, \ \sigma_{\mathcal{D}} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \right\},$$

mostra:

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_{\mathcal{D}}(n) = \mu(T),$$

essendo $\mu(T)$ l'area del rettangoloide T di base $[a, b]$ relativo a f. A questo punto ci si può chiedere se sia possibile determinare l'espressione analitica del termine *n-esimo* $\sigma_{\mathcal{D}}(n)$. La risposta è in generale negativa, poichè anche nel caso di funzioni semplici il calcolo di $\sigma_{\mathcal{D}}(n)$ è abbastanza laborioso. Le difficoltà possono essere ridotte scegliendo particolari partizioni di $[a, b]$, e prendendo in maniera opportuna i punti ξ_k. In alcuni casi (funzioni lineari, potenza di esponente reale, esponenziali) è preferibile utilizzare una equipartizione o una partizione con progressione geometrica.

1.1 Equipartizione

Si tratta di una particolare partizione in cui l'ampiezza dei singoli intervalli è costante. In parole povere, l'intervallo $[a, b]$ viene suddiviso in n intervalli aventi la stessa ambiezza:

$$\delta_k = \frac{b - a}{n}, \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n), \tag{2}$$

per un assegnato $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Denotando con $\mathcal{D}_e(x_0, x_1, ..., x_n)$ una equipartizione di $[a, b]$, si ha che la sua norma è:

$$\delta = \max_{k \in \{0, ..., n\}} (\delta_k) = \delta_k$$

Per evidenziare la dipendenza da n, ridefiniamo la norma di $\mathcal{D}_e(x_0, x_1, ..., x_n)$ in δ_n:

$$\delta_n = \frac{b - a}{n} \tag{3}$$

Osserviamo che mentre esistono infinite partizioni $\mathcal{D}(x_0, x_1, ..., x_n)$ di $[a, b]$ con norma δ_n, esiste una ed una sola equipartizione di norma δ_n. In altri termini, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ individua univocamente l'equiaprtizione di $[a, b]$. L'ascissa del k-esimo punto è dato da:

$$x_k = a + k\delta_n, \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

Se f è una qualunque funzione continua in $[a, b]$, le relative somme integrali sono:

$$\sigma_{\mathcal{D}_e} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{=\delta_n}$$

Cioè

$$\sigma_{\mathcal{D}}(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k),$$

che è il termine *n-esimo* di $\{\sigma_{\mathcal{D}_e}\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$. Ma $n = \frac{b-a}{\delta_n}$, per cui abbiamo la successione composta il cui termine *n-esimo* è $\sigma_{\mathcal{D}_e}[n(\delta_n)]$. Quindi:

$$\lim_{\delta_n\to 0}\sigma_{\mathcal{D}_e}[n(\delta_n)] = \lim_{n\to+\infty}\sigma_{\mathcal{D}_e}(n),$$

onde

$$\lim_{\delta_n\to 0}\sigma_{\mathcal{D}_e}[n(\delta_n)] = (b-a)\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)}{n} \tag{4}$$

Per definizione di integrale:

$$\lim_{\delta_n\to 0}\sigma_{\mathcal{D}_e}[n(\delta_n)] = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ne consegue che la (4) si scrive:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)}{n}$$

Come vedremo più avanti, tale risultato esprime il **teorema della media**, giacchè il secondo membro è la media aritmetica dei valori assunti dalla funzione nell'intervallo $[a,b]$.

1.2 Partizione con progressione geometrica

In alcuni casi per ottenere $\sigma_{\mathcal{D}}(n)$ è preferibile ricorrere a una partizione con progressione geometrica. Più precisamente, l'intervallo $[a,b]$ viene suddiviso nei punti di ascissa:

$$x_k = aq^k \quad (k = 0,1,2,...,n), \tag{5}$$

che compongono una progressione geometrica di ragione q che denotiamo con $\mathcal{D}_q(x_0,x_1,...,x_n)$. Deve essere $x_n = b$, per cui $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. In fig. 1 riportiamo un esempio di partizione con progressione geometrica dell'intervallo $[1,5]$.

L'ampiezza del *k-esimo* intervallo è:

$$\delta_k = x_{k+1} - x_k = a\left(q^{k+1} - q^k\right)$$

La norma di $\mathcal{D}_q$ è:

$$\delta = \max(\delta_k) = a\left(q^n - q^{n-1}\right)$$

Per un'assegnata funzione f continua in $[a,b]$, la somma integrale è:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{D}q} &= a\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left(q^{k+1} - q^k\right) \\ &= a\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right]\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left(\frac{b}{a}\right)^{k/n}\end{aligned} \tag{6}$$

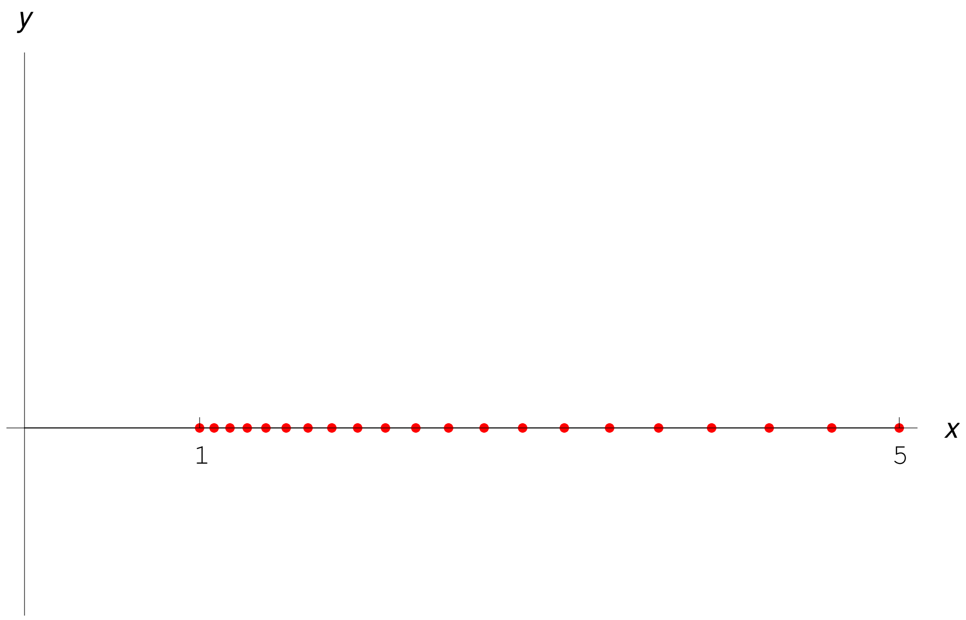


Figura 1: Partizione con progressione geometrica di $[1, 5]$. Qui è $n = 20$, per cui $q = \sqrt[20]{5}$.

1.3 Esempi numerici

Il calcolo di $\sigma_{\mathcal{D}}(n)$ è immediato nel caso della seguente funzione:

$$f(x) = 1 + x, \qquad x \in [1, 10] \tag{7}$$

Eseguiamo una equipartizione $\mathcal{D}_e(x_0, ..., x_n)$ di $[1, 10]$:

$$x_k = 1 + k\delta_n, \quad \text{con } \delta_n = \frac{9}{n}$$

Assumendo $\xi_k = x_k$, riesce $\sigma_{\mathcal{D}_e} = s_{\mathcal{D}_e}$, giacchè x_k è manifestamente punto di minimo di f nell'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$. Esplicitiamo tale somma integrale:

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{D}_e} &= \frac{9}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1 + x_k) \\ &= \frac{9}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2 + k\frac{9}{n}\right) \\ &= \frac{9}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}2 + \frac{9}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\right) \\ &= 18 + \frac{81}{n^2}\underbrace{(0 + 1 + 2 + ... + n - 1)}_{=\frac{n(n-1)}{2}}, \end{aligned}$$

cioè:

$$s_{\mathcal{D}_e} = \frac{117}{2} - \frac{81}{n}$$

Ne consegue che la successione reale $\{s_{\mathcal{D}_e}\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ converge per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} s_{\mathcal{D}_e} = \frac{117}{2},$$

onde

$$\mu\left(T\right)=\frac{117}{2},$$

dove T è il rettangoloide di base $[a,b]$ relativo a $f\left(x\right)=1+x$:

$$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leq x\leq 10, \quad 0\leq y\leq 1+x\right\}$$

In fig. 2 è illustrato il plurirettangolo inscritto a T per $n=28$.

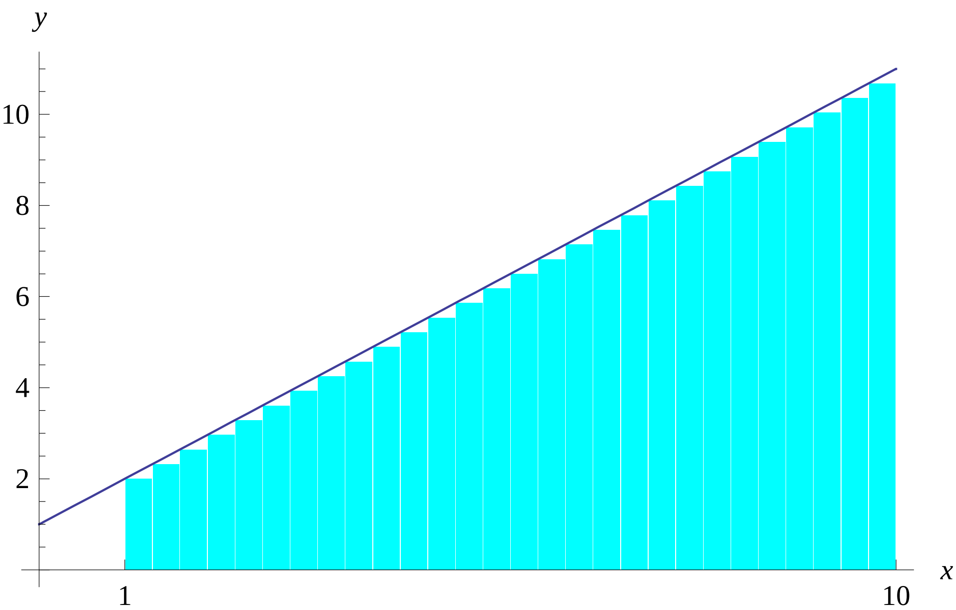


Figura 2: Equipartizione dell'intervallo $[1,10]$ con $n=10$ e relativo plurirettangolo inscritto in T.

In fig. 2 è graficata la successione $\{s_{\mathcal{D}_e}\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$.

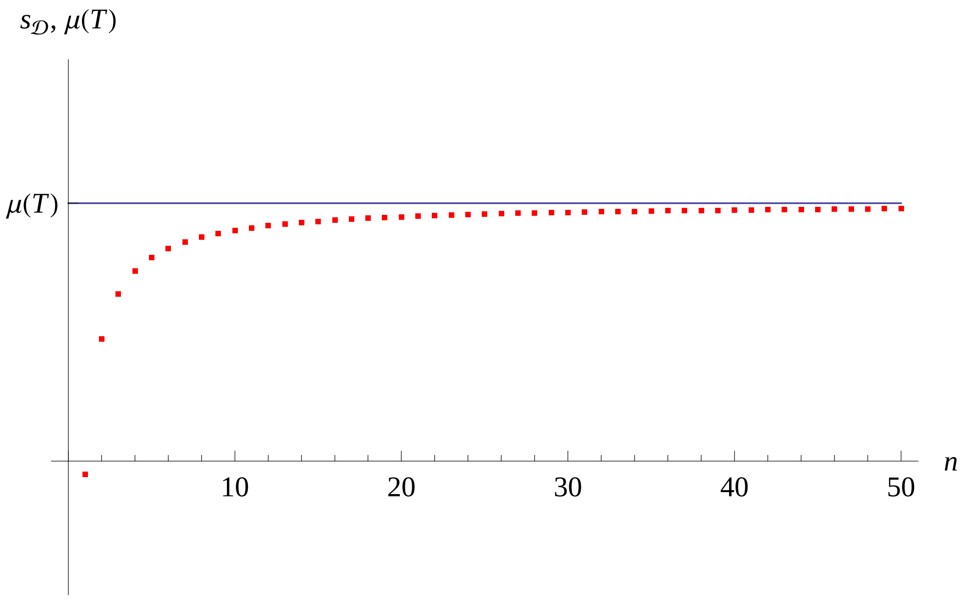


Figura 3: Andamento della successione $\{s_{De}\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$. È visibile la convergenza verso $\mu\left(T\right)=\frac{117}{2}$, dove T è il rettangoloide di base $[1,10]$ relativo a $f\left(x\right)=1+x$.

***

Determiniamo l'area del triangolo curvilineo limitato dall'arco di parabola $y = x^2$, dall'asse x e dalla retta $x = b > 0$.

Svolgimento.

Tale triangolo è il rettangoloide di base $[0, b]$ relativo alla funzione $f(x) = x^2$. Eseguiamo una equipartizione $\mathcal{D}_e(x_0, ..., x_n)$ di $[0, b]$, per cui $\delta_n = \frac{b}{n}$, mentre le ascisse dei punti sono $x_k = k\frac{b}{n}$ $(k = 0, 1, ..., n)$. Quindi:

$$\sigma_{\mathcal{D}_e} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\delta_n = \frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$$

Ponendo $\xi_k = x_k$, segue che $f(x_k) = \min_{[x_k, x_{k+1}]} f$, per cui la somma precedente si scrive:

$$s_{\mathcal{D}_e} = \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \tag{8}$$

Per determinare la sommatoria, iniziamo con osservare che $\Sigma_{k=0}^{n-1}k^2 = \Sigma_{k=1}^{n-1}k^2$. Come è noto:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ponendo $m = n - 1$, si ha:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

onde

$$s_{\mathcal{D}_e} = \frac{b^3(n-1)(2n-1)}{n^2} = b^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

Ne consegue che la successione reale $\{s_{\mathcal{D}_e}\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ converge per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} s_{\mathcal{D}} = \frac{b^3}{3}$$

Quindi l'area richiesta è:

$$\mu(T) = \frac{b^3}{3},$$

In fig. 2 è illustrato il plurirettangolo inscritto a T per $n = 28$. In fig. 5 è è graficata la successione $\{s_{\mathcal{D}_e}\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$.

***

Calcolando il limite delle somme integrali, troviamo l'area del rettangoloide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x) = e^x$.

Svolgimento.

Eseguendo la solita equipartizione di $[a, b]$:

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, 2, ..., n),$$

riesce:

$$\sigma_{\mathcal{D}_e} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$$

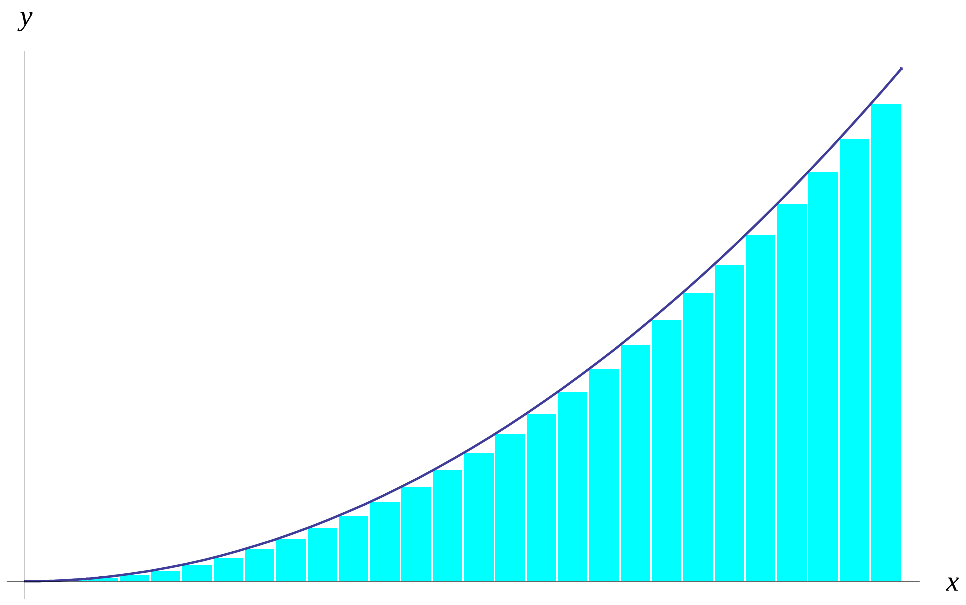


Figura 4: Equipartizione dell'intervallo $[0, b]$ con $n = 28$ e relativo plurirettangolo inscritto in T, essendo quest'ultimo il rettangoloide di base $[0, b]$ relativo a $f(x) = x^2$.

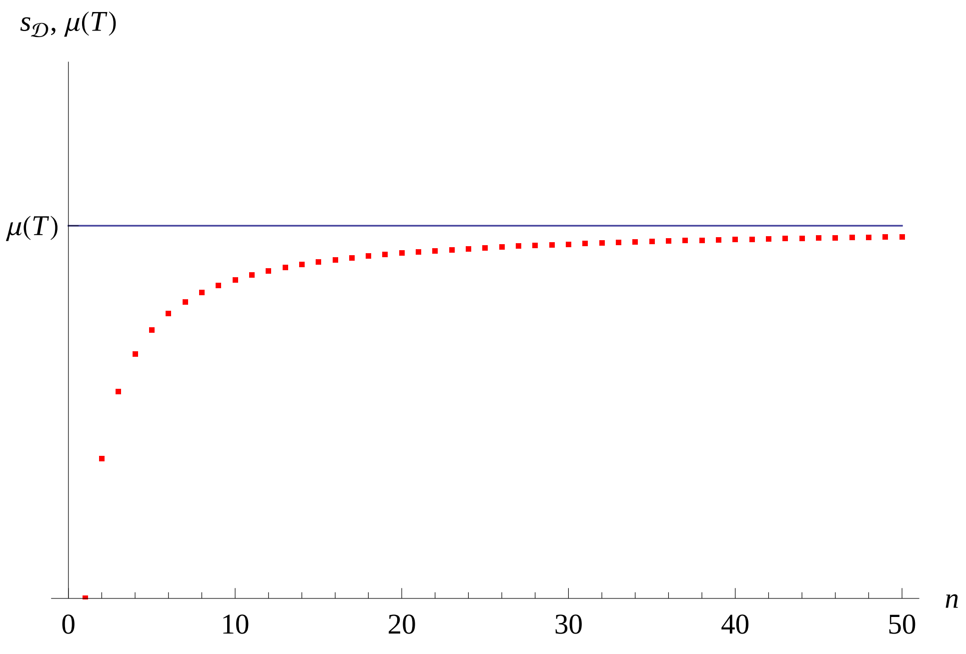


Figura 5: Andamento della successione $\{s_{De}\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$. È visibile la convergenza verso $\mu(T) = \frac{b^3}{3}$.

Ponendo $\xi_k = x_k$, segue che $f(x_k) = \min_{[x_k, x_{k+1}]} f$, per cui la somma precedente si scrive:

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{D}_e} &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{a+k\frac{b-a}{n}} \\ &= \frac{b-a}{n} e^a \sum_{k=0}^{n-1} e^{k\frac{b-a}{n}} \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte la sommatoria:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{k\frac{b-a}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^k,$$

cioè una progressione geometrica di ragione $q = e^{\frac{b-a}{n}}$, per cui:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{k\frac{b-a}{n}} = \frac{q^n - 1}{q} = \frac{e^{b-a} - 1}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1}$$

Quindi la somma integrale diventa:

$$s_{\mathcal{D}_e} = \frac{b-a}{n} e^a \frac{e^{b-a} - 1}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} = e^a \left(e^{b-a} - 1\right) \frac{\delta_n}{e^{\delta_n} - 1},$$

essendo $\delta_n = \frac{b-a}{n}$ l'ampiezza della partizione. L'area richiesta è:

$$\mu(T) = \lim_{\delta_n \to 0} s_{\mathcal{D}} = e^a \left(e^{b-a} - 1\right) \lim_{\delta_n \to 0} \frac{\delta_n}{e^{\delta_n} - 1}$$

Il limite è:

$$\lim_{\delta_n \to 0} \frac{\delta_n}{e^{\delta_n} - 1} = \frac{0}{0} \stackrel{\mathrm{H}}{=} \lim_{\delta_n \to 0} \frac{1}{e^{\delta_n}} = 1,$$

per cui:

$$\mu(T) = e^b - e^a$$

In fig. 6 è illustrato il plurirettangolo inscritto a T per $n = 28$. In fig. 7 è è graficata la successione $\{s_{\mathcal{D}_e}\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$.

Calcolando il limite delle somme integrali, troviamo l'area del rettangoloide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x) = x^2$.

Svolgimento.

In questo caso eseguiamo una partizione con progressione geometrica $\mathcal{D}_q(x_0, x_1, ..., x_n)$:

$$x_k = aq^k, \quad (k = 0, 1, ..., n)$$

La generica somma integrale è:

$$\sigma_{\mathcal{D}_e} = a \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \left(q^{k+1} - q^k\right)$$

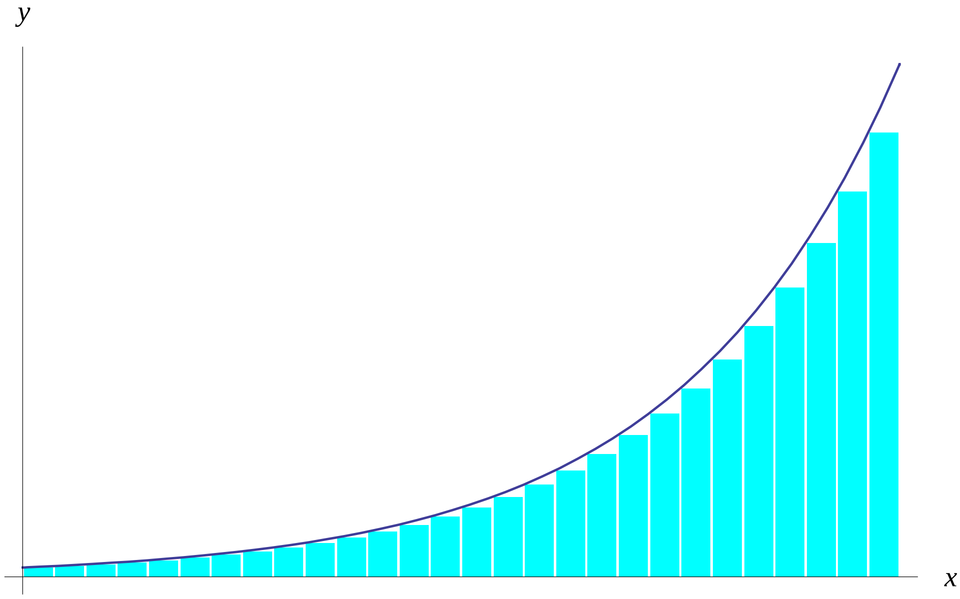


Figura 6: Equipartizione dell'intervallo $[a, b]$ con $n = 28$ e relativo plurirettangolo inscritto in T, essendo quest'ultimo il rettangoloide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x) = e^x$.

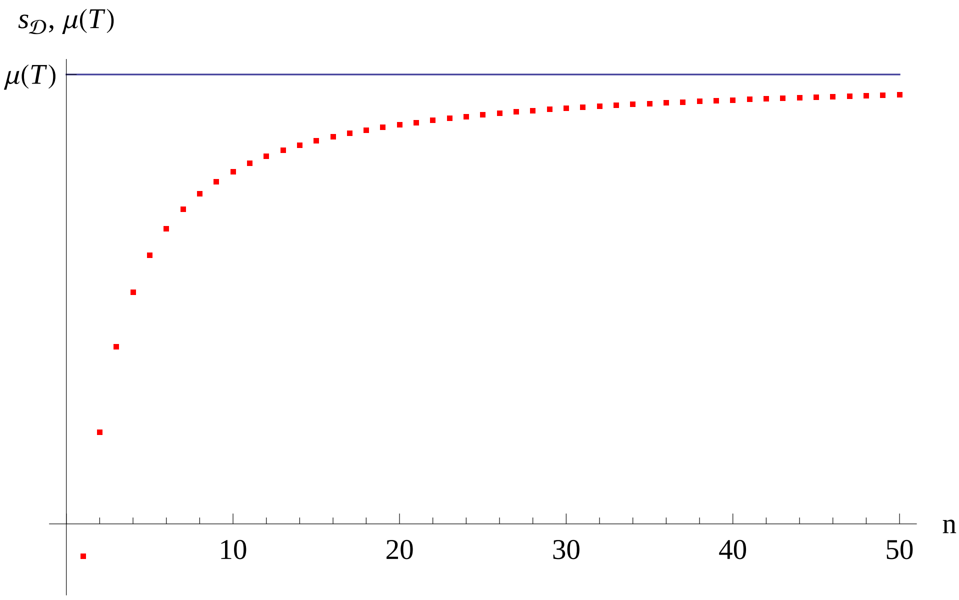


Figura 7: Andamento della successione $\{s_{D_e}\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$. È visibile la convergenza verso $\mu(T) = e^b - e^a$.

Al solito poniamo $\xi_k = x_k$:

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{D}_e} &= a\sum_{k=0}^{n-1} f\left(aq^k\right)\left(q^{k+1}-q^k\right) \\ &= a\sum_{k=0}^{n-1} a^2q^{2k}\left(q^{k+1}-q^k\right) \\ &= a^3\sum_{k=0}^{n-1} q^{2k}\left(q^{k+1}-q^k\right) \\ &= a^3\left(q-1\right)\sum_{k=0}^{n-1} q^{3k} \end{aligned}$$

La sommatoria a secondo membro esprime una progressione geometrica di ragione $q' = q^3$, per cui:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^{3k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(q'\right)^k = \frac{\left(q'\right)^n - 1}{q'} = \frac{q^{3n}-1}{q^3-1}$$

Sostituendo nell'equazione precedente e ricordando che $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$:

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{D}} &= a^3\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)\frac{\frac{b^3}{a^3}-1}{\sqrt[n]{\frac{b^3}{a^3}}-1} \\ &= \left(b^3-a^3\right)\frac{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1}{\sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^3}-1} \end{aligned}$$

Eseguendo l'operazione di passaggio al limite per $\delta \to 0$, dove δ è l'ampiezza della partizione, si ha:

$$\lim_{\delta\to 0} s_{\mathcal{D}_e} = \lim_{n\to+\infty} s_{\mathcal{D}_e} = \left(b^3-a^3\right)\lambda,$$

dove

$$\lambda \underset{t=\frac{b}{a}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{t^{\frac{3}{n}}-1} = \frac{0}{0}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $m = \frac{1}{n}$:

$$\lambda = \lim_{m\to 0^+} \frac{t^{m-1}}{t^m-1} = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{m\to 0^+} t^{-2m} = \frac{1}{3}$$

Ne consegue

$$\lim_{\delta\to 0} s_{\mathcal{D}_e} = \frac{b^3-a^3}{3}$$

In fig. 8 è illustrato il plurirettangolo inscritto a T per $n = 28$. In fig. 9 è è graficata la successione $\left\{s_{\mathcal{D}_e}\right\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$.

***

Calcolando il limite delle somme integrali, troviamo l'area del trapezio curvilineo limitato dall'iperbole $y = 1/x$, dall'asse x, e dai segmenti di retta $x = a$ e $x = b$, dove $b > a > 0$.

Svolgimento

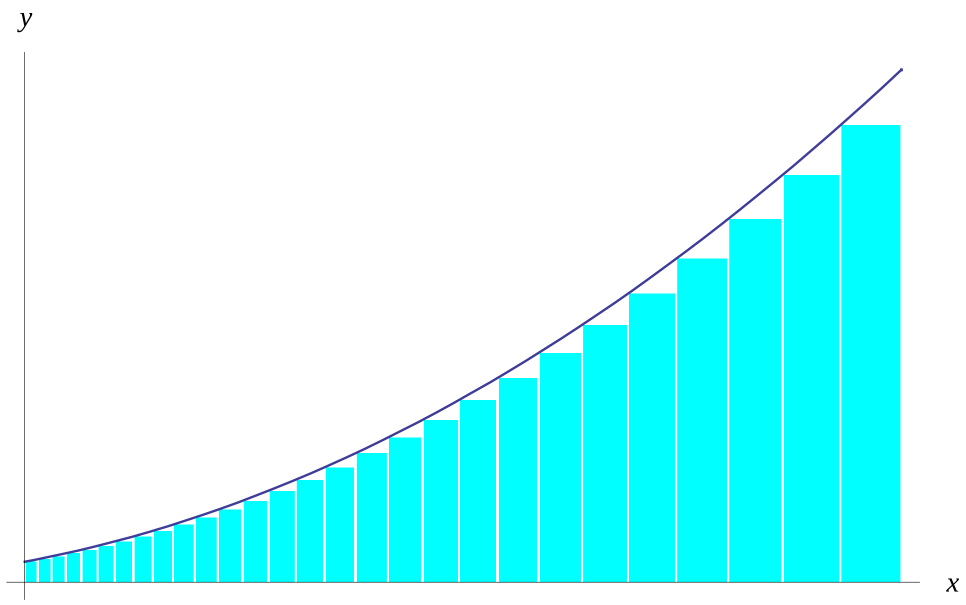


Figura 8: Partizione con progressione geometrica dell'intervallo $[a, b]$ con $n = 28$ e relativo plurirettangolo inscritto in T, essendo quest'ultimo il rettangoloide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x) = x^2$.

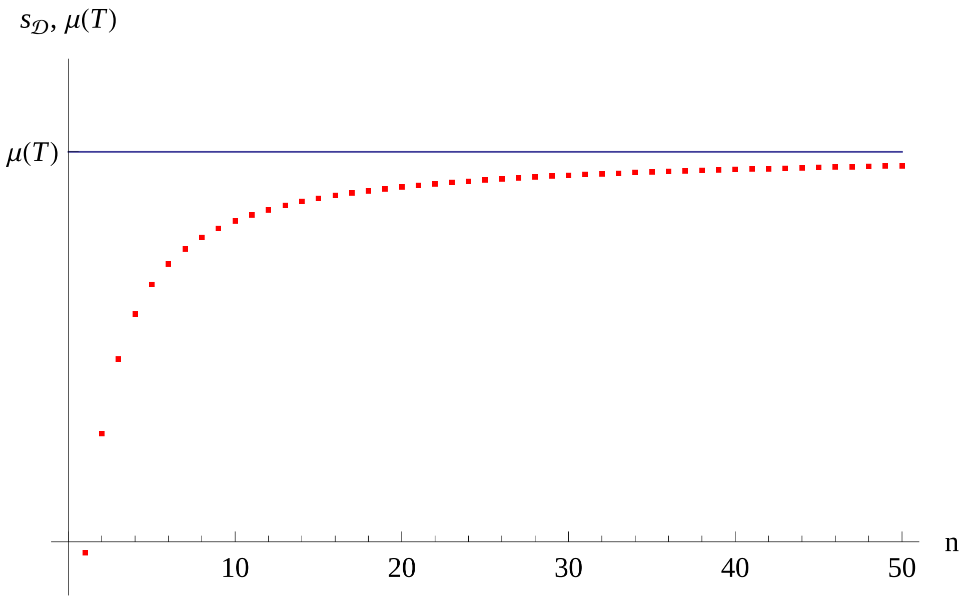


Figura 9: Andamento della successione $\{s_D\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$. È visibile la convergenza verso $\mu(T) = \frac{b^3-a^3}{3}$.

Anche in questo caso conviene eseguire una partizione con progressione geometrica $\mathcal{D}_q\left(x_0, x_1, ..., x_n\right)$:

$$x_k = aq^k, \quad (k = 0, 1, ..., n)$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{D}q} &= a\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right)\left(q^{k+1} - q^k\right) \\ &= a\left(q-1\right)\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right) q^k\end{aligned}$$

Assumendo $\xi_k = x_k$ si ha $f\left(x_k\right) = \max_{[x_k, x_{k+1}]} f$, per cui $\sigma_{\mathcal{D}q} = S_{\mathcal{D}q}$, e dall'equazione precedente segue:

$$S_{\mathcal{D}q}\left(n\right) = n\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right]$$

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} S_{\mathcal{D}q}\left(n\right) \underset{m=\frac{1}{n}}{=} \lim_{m\to 0^+} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^m - 1}{m} = \ln\frac{b}{a},$$

per cui l'area richiesta è:

$$\mu\left(T\right) = \ln\frac{b}{a}$$

In fig. 10 è illustrato il plurirettangolo inscritto a T per $n = 28$. In fig. 11 è è graficata la successione

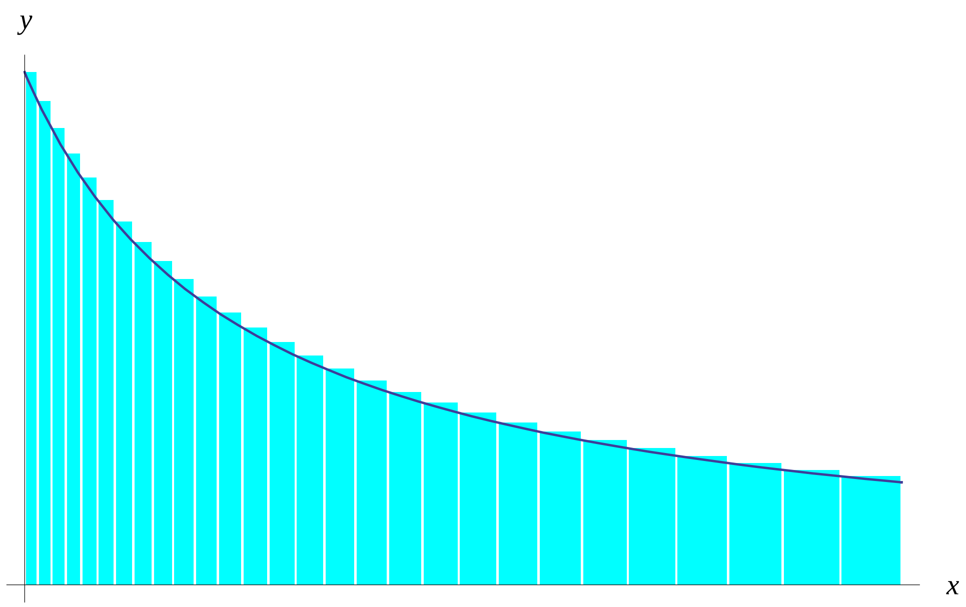


Figura 10: Partizione con progressione geometrica dell'intervallo $[a, b]$ con $n = 28$ e relativo plurirettangolo inscritto in T, essendo quest'ultimo il rettangoloide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f\left(x\right) = \frac{1}{x}$.

$\left\{S_{\mathcal{D}_e}\right\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$.

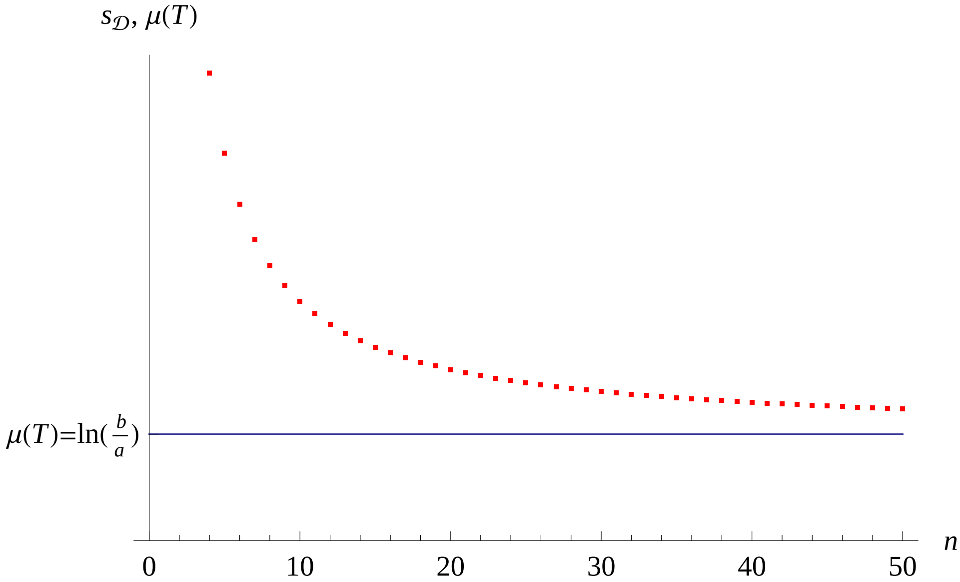


Figura 11: Andamento della successione $\left\{S_{D_q}\right\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$. È visibile la convergenza verso $\mu\left(T\right)=\ln\frac{b}{a}$.