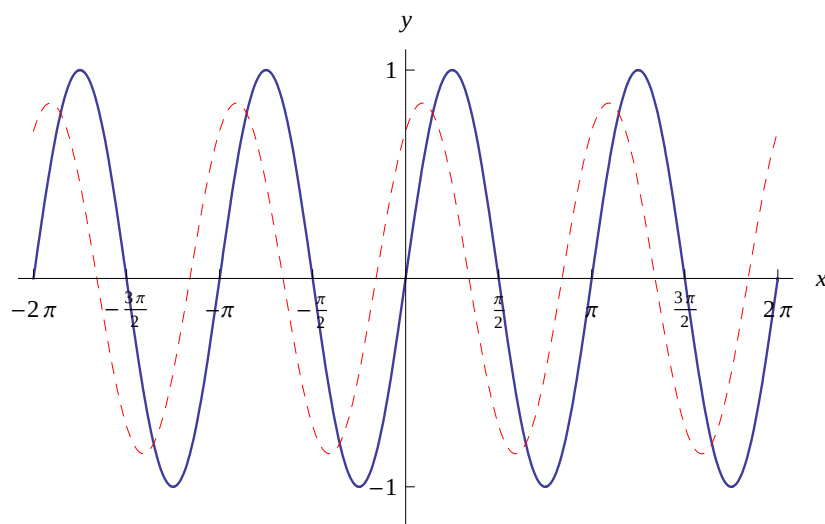


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx = \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

imite del rapporto incrementale relativo alla
funzione $f(x) = \sin^2 x$ e di punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$

Marcello Colozzo



Calcoliamo il limite del rapporto incrementale relativo alla funzione $f(x) = \sin^2 x$ e di punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$.

Il rapporto incrementale è:

$$\frac{\sin^2 x - \sin^2 x_0}{x - x_0}$$

Eseguendo il limite per $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin^2 x - \sin^2 x_0}{x - x_0} = \frac{0}{0}$$

Per rimuovere l'indeterminazione espandiamo il numeratore:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sin x - \sin x_0)(\sin x + \sin x_0)}{x - x_0}$$

Il termine che produce l'indeterminazione è $\sin x - \sin x_0$ che può essere sviluppato con le formule di prostaferesi:

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right) \cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right),$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sin x - \sin x_0)(\sin x + \sin x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{2 \sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right) \cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right)}{x - x_0} (\sin x + \sin x_0) \right]$$

A questo punto eseguiamo il cambio di variabile $x - x_0 = h$, onde:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin^2 x - \sin^2 x_0}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{2 \sin \left(\frac{h}{2} \right) \cos \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)}{h} [\sin(x_0 + h) + \sin x_0] \right\} \\ &= \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \cos \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)}_{\cos x_0} \cdot \left\{ \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} [\sin(x_0 + h) + \sin x_0]}_{=2 \sin x_0} \right\} \\ &= 2 \sin x_0 \cos x_0 \\ &= \sin 2x_0 \end{aligned}$$

In figura riportiamo il grafico di $\sin 2x$ confrontato con il rapporto incrementale di $f(x) = \sin^2 x$ per $h = 1$.

