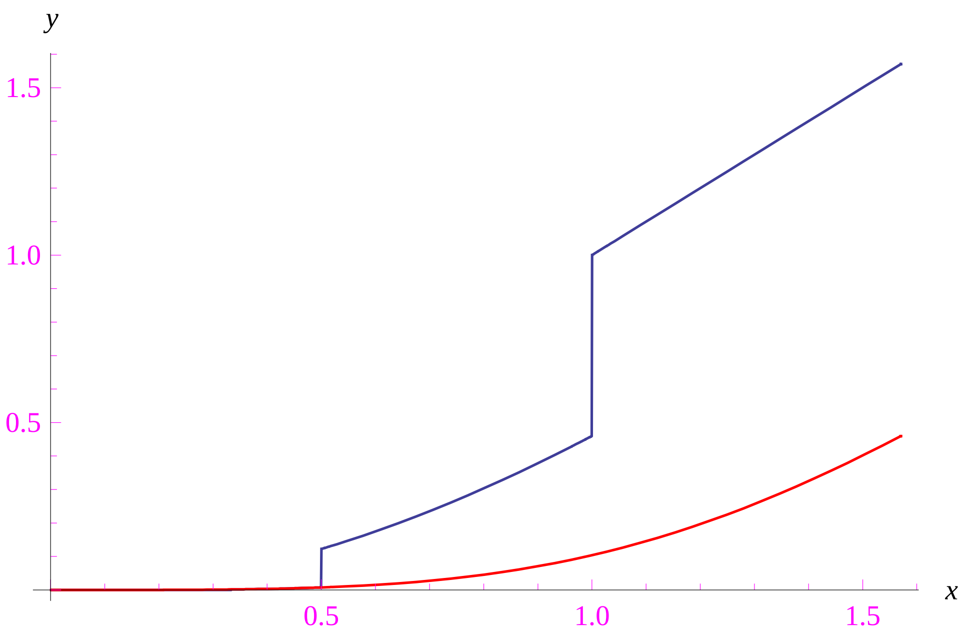
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Limite di una funzione ricorsiva

Marcello Colozzo



Assegnata la funzione

$$f(x) = 1 - \cos x, \tag{1}$$

abbiamo visto che denotando con $f_n(x)$ la composizione *n-esima* di f con se stessa:

$$f_n(x) = f(f(\dots f(x))), \tag{2}$$

si ha:

$$\lim_{x\to 0} g_n(x) = 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0|\}, \tag{3}$$

dove

$$g_n(x) \stackrel{def}{=} \frac{f_n(x)}{x^2} \tag{4}$$

Ci poniamo ora il seguente problema:

Problema 1 *Qual è il comportamento di $g_n(x)$ per $x \to 0$ se il numero n delle iterazioni tende a $+\infty$?*

Iniziamo con l'osservare che nella (4) l'intero naturale n svolge il ruolo di parametro, nel senso che per un assegnato n (eventualmente per $n \to +\infty$), noi studiamo il comportamento di $g_n(x)$ nel limite per $x \to 0$. Da un punto di vista formale, possiamo tentare di risolvere il problema proposto assumendo n come variabile indipendente, considerare cioè la funzione reale $g(x,n)$ definita in A:

$$A = \{(x,n) \mid -\infty < x < +\infty, \ \ n = 0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$$

per poi eseguire l'operazione di passaggio al limite:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ n\to+\infty}} g(x,n) \tag{5}$$

Più precisamente, assumiamo

$$n = n(x) \mid \lim_{x\to 0} n(x) = +\infty, \tag{6}$$

ad esempio:

$$n(x) = \left[\frac{1}{x}\right], \tag{7}$$

dove $[.]$ denota la parte intera di un numero reale. Quindi abbiamo il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} h(x),$$

dove

$$h(x) = g\left(x, \left[\frac{1}{x}\right]\right)$$

Abbiamo già studiato la funzione (7) in questa dispensa. Inoltre, rinunciando al tentativo di risolvere analiticamente il problema posto, proviamo con l'approccio computazionale, ottenendo il grafico di fig. 1.

Da tale grafico vediamo che

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

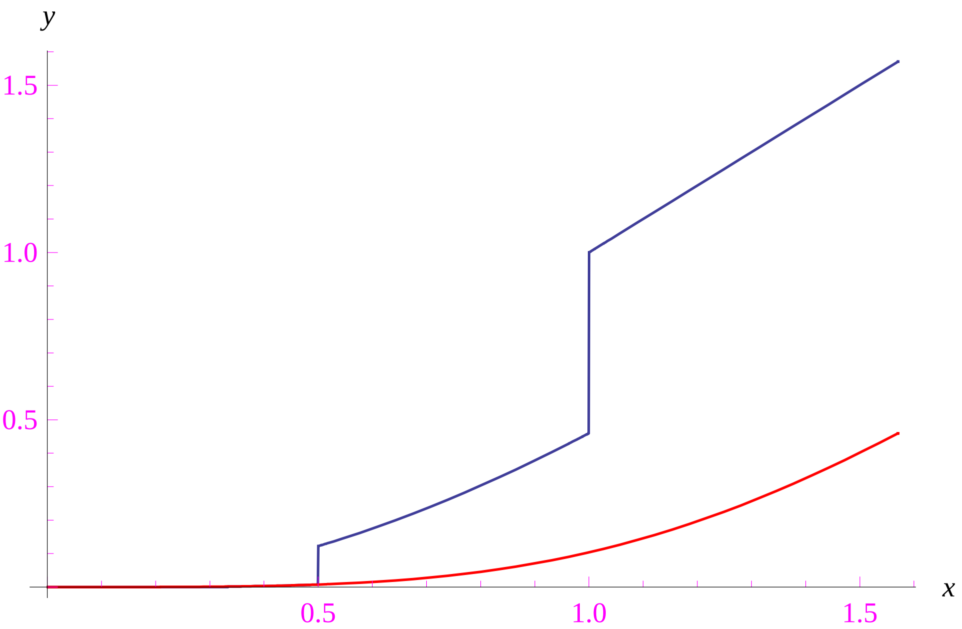


Figura 1: La funzione $h(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$. Il grafico è confrontato con quello della iterata $g_2(x)$ (curva continua).