Forme indeterminate

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Studiare il comportamento della funzione*

$$f(x) = \left(\frac{\cos x + x}{\cos x} \right)^{\frac{\cos x}{x}}, \tag{1}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione

La funzione è definita per

$$\frac{\cos x + x}{\cos x} > 0, \quad x \neq 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

La disequazione

$$\frac{\cos x + x}{\cos x} > 0 \tag{3}$$

può essere risolta solo per via numerica, per cui la lasciamo inespressa. In ogni caso, se

$$x_0 \in \mathbb{R} \mid \cos x_0 + x_0 = 0, \tag{4}$$

si ha

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{\cos x + x}{\cos x} \right)^{\frac{\cos x}{x}} = +\infty \tag{5}$$

Determiniamo il comportamento in un intorno di $x = 0$:

$$\lambda = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x + x}{\cos x} \right)^{\frac{\cos x}{x}} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{\cos x} \right)^{\frac{\cos x}{x}} = 1^{\infty}, \tag{6}$$

che si riconduce a un limite notevole, ponendo

$$t = \frac{x}{\cos x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{7}$$

Più precisamente

$$\lambda = \lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e \tag{8}$$

Ne consegue che $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Inoltre

$$\lambda' = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x + x}{\cos x} \right)^{\frac{\cos x}{x}} = \infty^0 \tag{9}$$

Scriviamo

$$\lambda' = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} e^{\ln\left(\frac{\cos x + x}{\cos x} \right)^{\frac{\cos x}{x}}} \tag{10}$$

Quindi calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{\cos x + x}{\cos x} \right)^{\frac{\cos x}{x}} &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} \ln \left(\frac{\cos x + x}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{\cos x} \right)}{\frac{x}{\cos x}} \end{aligned} \tag{11}$$

Utilizzando la sostituzione precedente

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{\cos x}\right)}{\frac{x}{\cos x}} = \lim_{|t| \to +\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

Allo stesso modo:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = 1 \tag{12}$$

Per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\cos x + x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} \tag{13}$$

Questa volta poniamo

$$\tau = \frac{\cos x}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{14}$$

cosicché

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} = \lim_{\tau \to 0} \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)^{\tau} = 1 \tag{15}$$

In maniera analoga

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} = 1 \tag{16}$$

In fig. 1 riportiamo il grafico della funzione assegnata.

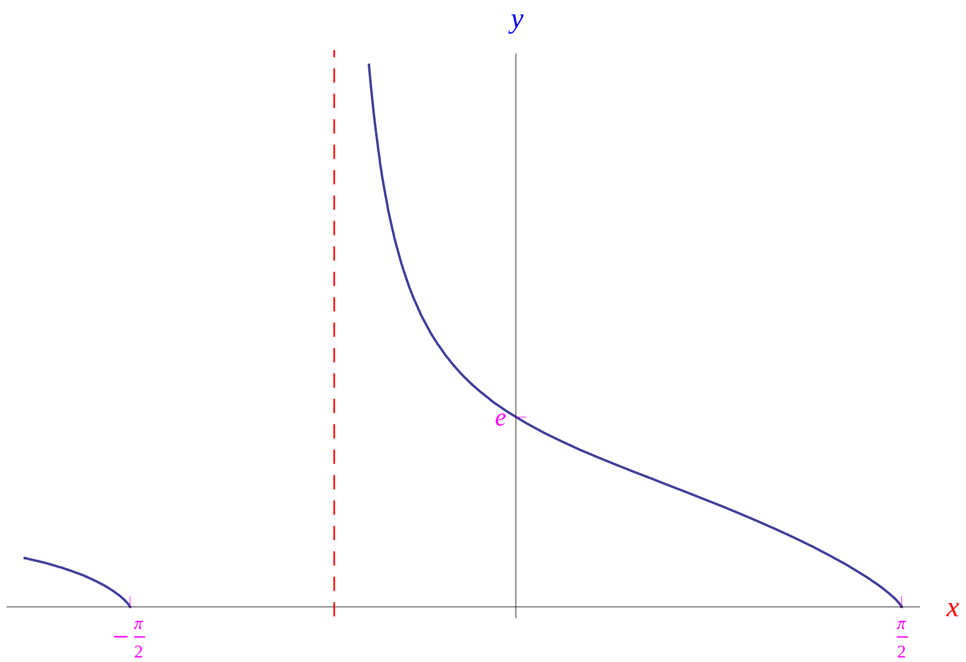

Figura 1: Andamento della funzione (1) in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.