Esempio di curva regolare dotata di rappresentazione parametrica non regolare

Marcello Colozzo

Ancora non abbiamo rigorosamente definito una curva regolare. Tuttavia, l'esercizio seguente mostra che è possibile eseguire una cosiddetta *riparametrizzazione* di una assegnata rappresentazione parametrica, in modo da renderla regolare. Nello specifico, consideriamo la curva piana γ la cui rappresentazione parametrica è data dalla funzione vettoriale

$$\mathbf{x}(t) = \left[\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right]\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\sin t}{t^2}\right)\mathbf{e}_2 \tag{1}$$

le cui funzioni componenti sono

$$x(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right), \ y(t) = \frac{\sin t}{t^2}, \tag{2}$$

onde la funzione vettoriale assegnata è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$. Lo studio del comportamento delle predette funzioni in un intorno di $t = 0$, restituisce manifestamente:

$$\nexists \lim_{t\to 0} x(t), \quad \lim_{t\to 0} y(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } t \to 0^+ \\ -\infty, & \text{se } t \to 0^- \end{cases}$$

Ne consegue che $t = 0$ è una singolarità per la funzione vettoriale assegnata. Proviamo ad eseguire la sostituzione di parametro (*riparametrizzazione* della curva o sostituzione di parametro ammissibile):

$$t \to \theta = \frac{1}{t},$$

per cui abbiamo la funzione vettoriale composta:

$$\boldsymbol{\xi}(\theta) \equiv \mathbf{x}[t(\theta)] = \xi(\theta)\mathbf{e}_1 + \eta(\theta)\mathbf{e}_2, \quad \xi(\theta) = x[t(\theta)], \ \eta(\theta) = y[t(\theta)]$$

Tuttavia per semplicità di notazione, riscriviamo

$$\mathbf{x}(\theta) = x(\theta)\mathbf{e}_1 + y(\theta)\mathbf{e}_2 \tag{3}$$

dove

$$x(\theta) = \sin\theta, \quad y(\theta) = \theta^2 \sin\left(\frac{1}{\theta}\right) \tag{4}$$

Studiamo il comportamento della funzione scalare $y(\theta)$ in un intorno di $\theta = 0$ È manifestamente:

$$\lim_{\theta\to 0} y(\theta) = \lim_{\theta\to 0}\left[\theta^2 \sin\left(\frac{1}{\theta}\right)\right] = 0$$

Cioè $\theta = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile, per cui possiamo prolungare la funzione, scrivendo:

$$y(\theta) = \begin{cases} \theta^2 \sin\left(\frac{1}{\theta}\right), & \text{se } \theta \neq 0 \\ 0, & \text{se } \theta = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Studiamo il comportamento della derivata prima di $y(\theta)$. Abbiamo

$$y'(\theta) = 2\theta \sin\left(\frac{1}{\theta}\right) - \cos\left(\frac{1}{\theta}\right), \quad \text{se } \theta \neq 0$$

Anziché eseguire il limite per $\theta \to 0$, applichiamo la definizione di derivata:

$$y'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{y(h) - y(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \left[h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \right] = 0$$

onde

$$y'(\theta) = \begin{cases} 2\theta \sin\left(\frac{1}{\theta}\right) - \cos\left(\frac{1}{\theta}\right), & \text{se } \theta \neq 0 \\ 0, & \text{se } \theta = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Ciò può essere visto graficamente dalla fig.1, in cui vediamo che il grafico della $y(\theta)$ è un'oscillazione sinusoidale di argomento θ^{-1}, modulata dalle parabole $y = \pm\theta^2$. La retta tangente a γ in $\theta = 0$ è (per definizione) la posizione limite, per $\theta \to 0$, della retta secante a γ per i punti $(0,0)$ e $(\theta, y(\theta))$. Per $\theta \to 0$ la predetta secante tende alla tangente comune alle due parabole $y = \pm\theta^2$ in $\theta = 0$, cioè all'asse x.

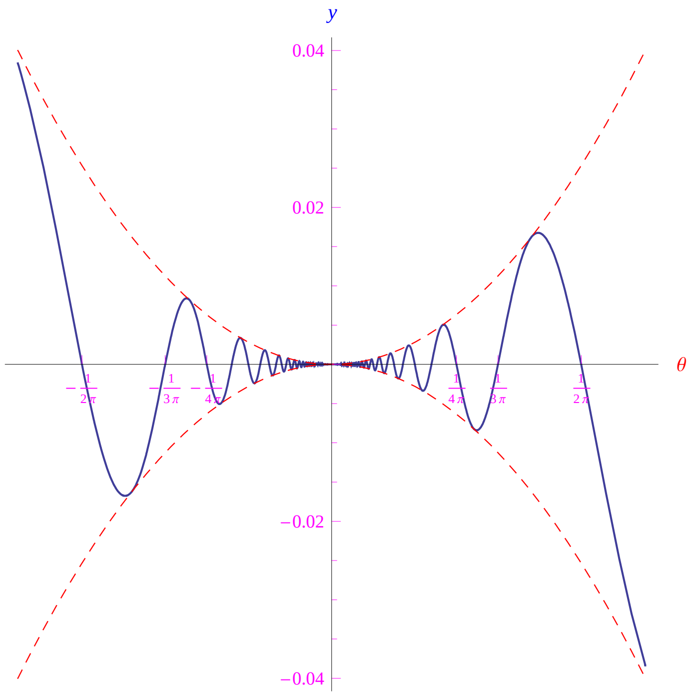

Figura 1: Andamento del grafico della funzione (5).

Tutto ciò implica che la regolarità della rappresentazione parametrica

$$\mathbf{x}(\theta) = (\sin\theta)\,\mathbf{e}_1 + \theta^2 \sin\left(\frac{1}{\theta}\right)\mathbf{e}_2, \quad \theta \in (-\infty, +\infty) \tag{7}$$

Notiamo incidentalmente che la riparametrizzazione eseguita non ha fatto altro che *spostare* la singolarità da $t = 0$ a $\theta = \infty$. Infatti, le nuove funzioni componenti sono non regolari all'infinito, ma ciò non pone ovviamente problemi al finito. In ultimo, per tracciare la curva passiamo alla rappresentazione cartesiana, eliminando cioè il parametro θ. Dopo semplici passaggi otteniamo

$$\gamma : y = g(x), \tag{8}$$

dove

$$g(x) = (\arcsin x)^2 \sin\left(\frac{1}{\arcsin x}\right), \tag{9}$$

riuscendo

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0,$$

per cui riscriviamo

$$g(x) = \begin{cases} (\arcsin x)^2 \sin\left(\frac{1}{\arcsin x}\right), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \quad \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Trattasi, dunque di una funzione continua su tutto l'asse reale, ed è ivi dotata di derivata continua. Il grafico è riportato in fig. 2.

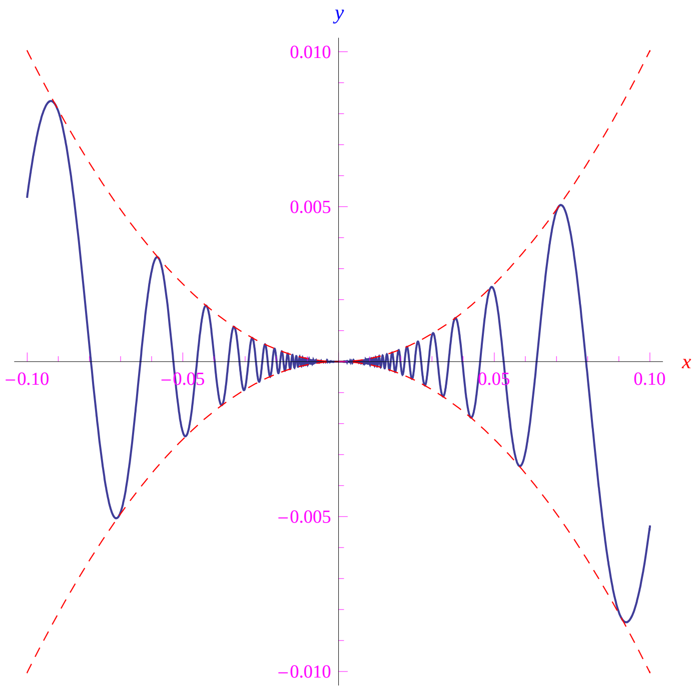

Figura 2: Andamento della curva γ di rappresentazione parametrica (1).

Vedremo tuttavia più avanti, che la rappresentazione parametrica non è regolare, poiché si annullano entrambe le derivate per $\theta = 0$.