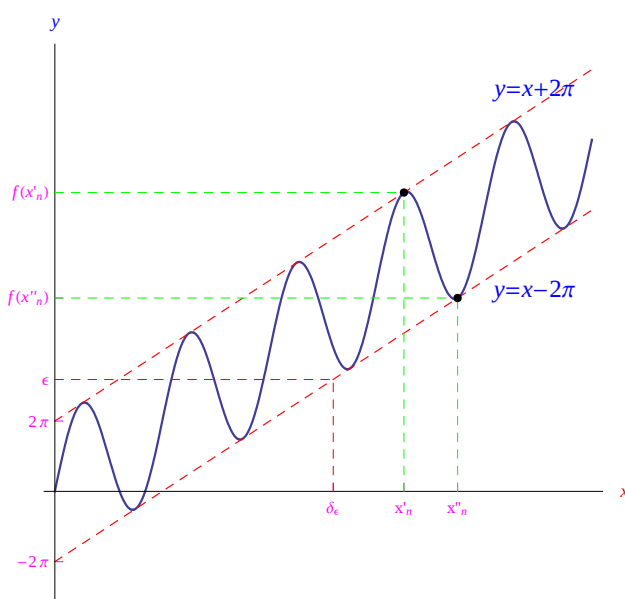


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx = \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Appunti di Analisi matematica 1

Marcello Colozzo



Indice

I	Funzioni – limiti – continuità	1
1	Generalità sulle funzioni	2
1.1	Definizione di funzione	2
1.1.1	Successioni univocamente definite. Successioni ricorsivamente definite	3
1.1.2	Grafico di una funzione reale di una variabile reale	4
1.1.3	Restrizione e prolungamento di una funzione	15
1.1.4	Segno e zeri di una funzione. Valore assoluto	18
1.1.5	Parità di una funzione. Simmetrie	19
1.1.6	Funzioni periodiche	21
1.1.7	Funzioni monotone	23
1.1.8	Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive	25
1.1.9	Composizione di applicazioni	27
1.1.10	Applicazione inversa. Equazioni	32
1.1.11	Operazioni razionali sulle funzioni reali	34
1.1.12	Estremi di una funzione reale	37
1.2	Le funzioni elementari	39
1.2.1	La funzione lineare	39
1.2.2	La funzione potenza di esponente reale	40
1.2.3	La funzione polinomio	51
1.2.4	La funzione esponenziale	58
1.2.5	La funzione logaritmo	61
1.2.6	La funzione parte intera	65
1.2.7	Le funzioni circolari	65
1.2.8	Invertibilità locale delle funzioni circolari	92
1.2.9	Identità fondamentali	98
1.2.10	Identità notevoli	103
2	Limite di una funzione reale di variabile reale	105
2.1	Introduzione	105
2.1.1	Punti di accumulazione. Punti isolati. Punti di aderenza Teorema di Bolzano-Weierstrass	106
2.1.2	Derivato di un insieme. Insiemi compatti	106
2.2	Definizione di limite	107
2.2.1	Un esperimento con la calcolatrice	107
2.2.2	Definizione di convergenza	108
2.2.3	Definizione di divergenza	115
2.2.4	Regolarità di una funzione. Teorema di unicità del limite	119
2.3	Osservazioni ed esempi	122
2.3.1	Funzioni definitivamente limitate e convergenti. Funzioni che tendono a un limite l per valo	

2.3.2	Convergenza in modulo	135
2.3.3	Funzioni divergenti in modulo	138
2.3.4	Il limite quale punto di aderenza per il codominio di una funzione . . .	138
2.3.5	Criteri di regolarità per restrizione	140
2.4	Limite sinistro e limite destro	142
2.5	Teoremi sui limiti	149
2.6	Criteri di regolarità per confronto	150
2.7	Operazioni sui limiti	155
2.7.1	Estensione del dominio di validità del teorema 7 - Forme indeterminate	156
2.7.2	Osservazioni importanti	161
2.8	Le funzioni continue	163
2.8.1	Definizione di continuità	163
2.8.2	Teoremi sulle funzioni continue	166
2.9	Punti di discontinuità	168
2.9.1	Discontinuità di prima specie	169
2.9.2	Discontinuità di seconda specie	170
2.9.3	Funzioni generalmente continue	172
2.10	Limiti di alcune funzioni elementari	182
2.10.1	Potenza di esponente reale	182
2.10.2	Polinomi	186
2.10.3	Funzione esponenziale	189
2.10.4	Funzione logaritmo	189
2.10.5	Funzioni trigonometriche	191
2.10.6	Funzioni trigonometriche inverse	194
2.10.7	Funzioni iperboliche e iperboliche inverse	197
2.11	Le forme indeterminate 0^0 , 1^∞ , ∞^0	201
2.12	Limiti di successioni	203
2.12.1	Successioni convergenti	203
2.12.2	Successioni divergenti	204
2.12.3	Successioni indeterminate (o non regolari)	206
2.13	Limiti fondamentali	206
2.14	Infinitesimi ed infiniti	239
2.14.1	Definizioni	239
2.14.2	Infinitesimi confrontabili. Il concetto di ordine	240
2.14.3	Infiniti confrontabili. Il concetto di ordine	244
2.14.4	Principio di sostituzione degli infinitesimi [infiniti]	248
2.14.5	Infinitesimi ed infiniti non dotati di ordine	252
2.14.6	Parte principale di un infinitesimo	261
2.14.7	Parte principale di un infinito	265
2.14.8	Proprietà e teoremi	270
2.14.9	Calcolo di limiti con il Principio di sostituzione degli infinitesimi [infiniti]	277

II Derivazione di una funzione reale di una variabile reale 281

3 Limite del rapporto incrementale 282

3.1	Definizioni e proprietà	282
-----	-----------------------------------	-----

4	Interpretazione geometrica della derivata	287
4.1	La nozione di retta tangente al grafico di una funzione	287
5	Funzioni non derivabili	289
5.1	Rapporto incrementale non regolare	289
6	Interpretazione geometrica della derivata (parte seconda)	298
6.1	Punti di flesso a tangente verticale. Punti angolosi. Cuspidi	298
7	Applicazioni. La derivata nell'ambiente di calcolo <i>Mathematica</i>	305
7.1	Routine	305
III	Applicazioni del calcolo differenziale	309
8	Funzioni monotone	310
8.1	Funzioni crescenti e decrescenti in un punto. Funzioni monotone in un intervallo	310
9	Proprietà della derivata di una funzione	314
9.1	Derivabilità di una funzione e continuità della derivata	314
9.2	Conseguenze del teorema di L'Hospital	317
9.3	Punti estremanti	320
IV	Serie numeriche e serie di funzioni	322
10	Serie numeriche	323
10.1	Definizioni e prime proprietà	323
10.2	Criterio generale di convergenza e suo corollario. La serie armonica	325
10.3	Combinazione lineare di serie	327
10.4	Resto di una serie	328
10.5	Proprietà associativa	329
10.6	Serie a termini di segno costante. La funzione zeta di Riemann	330
10.7	Serie assolutamente convergenti	334
10.8	Proprietà commutativa	335
10.9	Criteri di convergenza assoluta	335
10.10	Criteri di convergenza non assoluta	343
10.10.1	Teoremi preliminari	343
11	Serie di funzioni	345
11.1	Convergenza puntuale e convergenza uniforme	345
11.2	Teorema del limite e teorema della continuità per le serie di funzioni	348
11.3	Teorema di derivazione per serie	351
11.4	Teorema di integrazione per serie	353
11.5	Convergenza totale di una serie di funzioni	356
11.6	Serie di Taylor	358
11.6.1	Serie esponenziale	360
11.6.2	Serie iperboliche	361
11.6.3	Serie logaritmica	362

11.6.4	Serie binomiale	363
11.6.5	Serie dell'arcotangente	364
11.6.6	Serie dell'arcoseno	365
11.6.7	Calcolo di integrali per mezzo di serie	367
V	Esempi aggiuntivi	370
A	Miscellanea	371
A.1	Interpretazione cinematica dei punti di flesso a tangente verticale	371
A.2	Interpretazione cinematica dei punti cuspidali	377
A.3	La notazione di Iverson e il Teorema di Gödel	385
A.4	Suriettività e iniettività	386
A.5	Funzioni asintoticamente periodiche	388
A.6	Formule trigonometriche	394
A.6.1	Formule di addizione e sottrazione	394
A.6.2	Formule di duplicazione	394
A.6.3	Formule di prostaferesi	394
A.6.4	Formule parametriche	395
	Bibliografia	396

Prefazione

In queste dispense si danno per scontate la parte introduttiva all'Analisi matematica (la cosiddetta *Analisi 0*). Il libro è corredato da una nutrita raccolta di esercizi e problemi completamente risolti sin nei minimi dettagli. Le soluzioni sono state controllate più volte con l'ausilio del software **Mathematica**.

Molti esercizi sono riportati nei capitoli che riguardano la teoria. Ma la maggior parte di essi è riportata nella seconda parte, denominata “Esercizi”, in modo da rendere più ordinato il materiale. Anche gli esercizi sono raccolti in capitoli, e al termine di ciascun capitolo è riportata una serie di esercizi di riepilogo.

Parte I

Funzioni – limiti – continuità

Capitolo 1

Generalità sulle funzioni

1.1 Definizione di funzione

Siano X e Y due insiemi qualsiasi.

Definizione 1 Un'applicazione di X in Y è una legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa univocamente un elemento $y \in Y$.

Indicando con f tale applicazione, scriviamo:

$$f : X \rightarrow Y, \quad (1.1)$$

e diremo che f è una **funzione definita in X e a valori in Y** . Al posto della (1.1) si usa spesso la notazione simbolica:

$$f : X \rightarrow Y \quad (1.2)$$

$x \mapsto y, \quad \forall x \in X$

definizione
di
funzione

Per quanto detto, a un generico $x \in X$ corrisponde univocamente un elemento $y \in Y$. Per esprimere ciò, scriviamo:

$$y = f(x), \quad (1.3)$$

dove $f(x)$ è il **valore assunto dalla funzione f in x** .

Dalla univocità della corrispondenza (1.1) segue:

$$\exists (x_1, y_1) \in X \times Y \mid y_1 = f(x_1) \implies \nexists y_2 \in Y - \{y_1\} \mid y_2 = f(x_1)$$

In altri termini, a un assegnato $x_1 \in X$, non possono corrispondere più valori di $y \in Y$. Una funzione definita in questo modo, si dice **a un sol valore** o **monodroma**. Di contro, si possono definire funzioni **a più valori** o **polidrome**. In questi appunti, consideriamo esclusivamente funzioni a un sol valore.

Per quanto visto, una funzione $f : X \rightarrow Y$ è un'applicazione di X in Y , nel senso della definizione 1. Resta poi definito il seguente sottoinsieme di Y :

$$f(Y) \stackrel{def}{=} \{y \in Y \mid y = f(x), \quad \forall x \in X\} \subseteq Y,$$

che si chiama **immagine di X mediante f** . In una sezione successiva (§ 1.1.8) studieremo alcune proprietà delle applicazioni dal punto di vista della teoria degli insiemi.

Osservazione 1 Il caso speciale $X = Y = \emptyset$ definisce la **funzione vuota**:

$$f_{\emptyset} : \emptyset \rightarrow \emptyset$$

In Analisi matematica 1 siamo interessati alle applicazioni (i.e. funzioni) $f : X \rightarrow Y$ con $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$, dove $\mathbb{R}$ è il campo reale. Per quanto visto, X è l'insieme di definizione di f (o **campo di esistenza** o **dominio**). L'immagine di X attraverso f , cioè $f(X)$ è il **codominio** della funzione f .

Nel formalismo della topologia, $f : X \rightarrow Y$ è una *trasformazione* del sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ nel sottoinsieme $f(X)$ di $\mathbb{R}$.

Esempio 1 Sia f la funzione che associa a ogni numero reale x il suo quadrato x^2 . Cioè:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

poichè è $X = \mathbb{R}$. Il codominio di f è $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$. Infatti risulta $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ne concludiamo che la legge (1.4) trasforma $\mathbb{R}$ in $[0, +\infty)$.

1.1.1 Successioni univocamente definite. Successioni ricorsivamente definite

Nella sezione precedente abbiamo definito il concetto di funzione reale di una variabile reale, quale applicazione tra due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che abbiamo denotato con X e Y :

$$f : X \rightarrow Y$$

Un caso particolare di funzione reale di una variabile reale è quello in cui $X = \mathbb{N}$, dove $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ è l'insieme degli interi naturali. Una tale funzione è detta *successione*. Più precisamente:

Definizione 2 Assegnato $Y \subseteq \mathbb{R}$, dicesi **successione di elementi di Y** , una funzione:

$$y : \mathbb{N} \rightarrow Y \quad n \mapsto y(n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

La numerabilità di $\mathbb{N}$ implica la numerabilità del codominio di y , cioè dell'insieme $y(\mathbb{N})$. Infatti:

$$y(\mathbb{N}) = \{y(0), y(1), y(2), \dots, y(n), \dots\}$$

Siccome la variabile indipendente è l'intero naturale n , è preferibile denotare con y_n il valore $y(n)$, che si chiama *termine n -esimo* della successione. Si utilizza, poi, la notazione compatta:

$$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

che può essere ulteriormente snellita:

$$\{y_n\}$$

Esercizio 1 Determinare il codominio della successione il cui termine n -esimo è $y_n = (-1)^n$.

Svolgimento.

Esplicitiamo i singoli termini:

$$y_0 = 1, \quad y_1 = -1, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = -1, \dots,$$

onde $y(\mathbb{N}) = \{-1, 1\}$. Ne concludiamo che $\{(-1)^n\}$ è una successione di elementi di $\{-1, 1\}$.

L'univocità della corrispondenza (1.5) implica che la successione di elementi di Y che abbiamo denotato con $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è univocamente definita. Di contro, esistono successioni *ricorsivamente definite*, nel senso che sono assegnati i primi p termini:

$$y_0, y_1, \dots, y_p,$$

e, per ogni $n > p$, il termine n -esimo dipende dai precedenti:

$$y_n(y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-p}),$$

Un esempio è dato dalla **successione di Fibonacci**, i cui primi due termini¹ sono:

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1$$

Per ogni $n > 1$:

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \quad (1.6)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + y_0 = 1 + 0 = 1 \\ y_3 &= y_2 + y_1 = 1 + 1 = 2 \\ y_4 &= y_3 + y_2 = 2 + 1 = 3 \\ y_5 &= y_4 + y_3 = 3 + 2 = 5 \\ y_6 &= y_5 + y_4 = 5 + 3 = 8 \\ &\dots \end{aligned}$$

Cioè, il codominio della successione di Fibonacci è:

$$y(\mathbb{N}) = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\} \subset \mathbb{N}$$

1.1.2 Grafico di una funzione reale di una variabile reale

Sia f una funzione reale di una variabile reale definita in X .

Definizione 3 Dicesi **grafico** o **diagramma cartesiano** della funzione f , il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, \quad y = f(x)\} \quad (1.7)$$

Fissiamo, in un piano, un riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(Oxy)$. Sull'asse x riportiamo l'insieme di definizione X , mentre sull'asse y il valore assunto da f nel generico punto $x \in X$, cioè il numero reale $f(x)$. Al variare di x in X , il punto del piano $P(x, f(x))$ descrive un luogo geometrico che è, appunto, il grafico Γ_f dato dalla (1.7). Cioè:

$$P(x, f(x)) \in \Gamma_f, \quad \forall x \in X$$

In altri termini, Γ_f è il luogo di equazione $y = f(x)$. È facile convincersi che X è la proiezione ortogonale di Γ_f sull'asse x , mentre il codominio di f , cioè l'insieme $f(X)$, è la proiezione ortogonale di Γ_f sull'asse y . Ad esempio, consideriamo la funzione:

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2, \quad \forall x \in X \quad (1.8)$$

dove $X = [-1, 1]$. Il grafico della funzione (1.8) è:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, \quad y = x^2\},$$

cioè l'arco di parabola avente il vertice nell'origine e di estremi $A(-1, 1)$ e $B(1, 1)$ come illustrato in fig. 1.1.

¹Denominati *numeri di Fibonacci*.

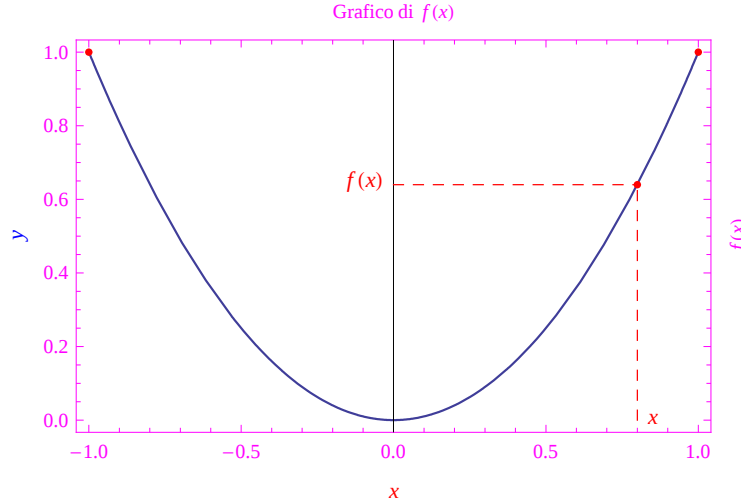


Figura 1.1: Grafico della funzione (1.8)

Comunque assegniamo una funzione reale di una variabile reale $f : X \rightarrow Y$, resta univocamente definito il suo grafico Γ_f e viceversa. In simboli:

$$f \longleftrightarrow \Gamma_f, \quad (1.9)$$

per cui l'equazione cartesiana di Γ_f , cioè $y = f(x)$, è utilizzata per individuare la funzione medesima, in forza della corrispondenza biunivoca (1.9). Il numero reale $x \in X$ si dice **variabile indipendente**, mentre il valore assunto da f , ovvero il numero reale $y \in Y$ è la **variabile dipendente**. Alternativamente, possiamo dire che y è *funzione di x* .

Siccome consideriamo funzioni monodrome, cioè a un sol valore, segue che ogni retta verticale $x = x_0$ (con $x_0 \in X$) interseca in uno e un solo punto il grafico di f . Precisamente:

$$\exists! P_0(x_0, f(x_0)) \mid P_0 = \Gamma_f \cap r_0, \quad \forall x_0 \in X,$$

dove $r_0 : x = x_0$.

Il diagramma di una funzione svolge un ruolo fondamentale nelle scienze applicate. Si pensi, ad esempio, ad una grandezza fisica $\mathcal{G}$ che varia in funzione del tempo t secondo una legge data da una funzione reale della variabile reale t :

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.10)$$

È chiaro che la possibilità di tracciare il grafico della funzione (1.10) ci dà la possibilità di avere una visione dell'andamento della grandezza $\mathcal{G}$.

Di seguito riportiamo alcuni esempi di funzioni reali di una variabile reale.

Esempio 2 Funzione costante

Assegnato un numero reale $c \neq 0$, la funzione costante è:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto c, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.11)$$

cioè:

$$f(x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

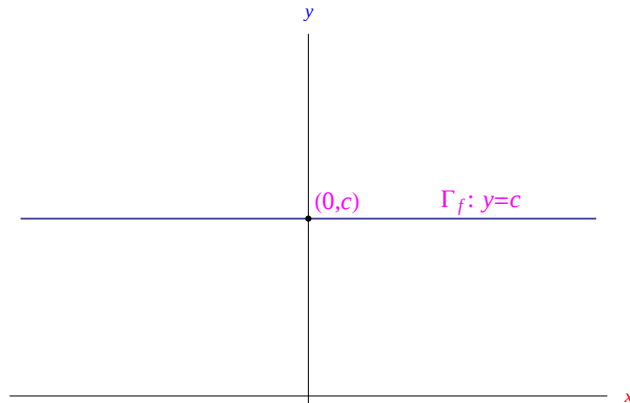


Figura 1.2: Grafico della funzione costante $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$.

Il grafico è:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, y = c\}$$

Quindi Γ_f è la retta di equazione $y = c$, cioè la retta parallela all'asse x e passante per il punto $(0, c)$, come mostrato in fig. 1.2.

Γ_f si proietta ortogonalmente sull'asse x nell'insieme di definizione $X = \mathbb{R}$ e sull'asse y nel codominio della funzione, cioè $f(\mathbb{R}) = \{c\}$.

Funzione identicamente nulla

È un caso particolare della funzione costante, avendosi:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.12)$$

cioè:

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il grafico è:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, y = 0\},$$

cioè l'asse x come mostrato in fig. 1.3 Il codominio è $f(\mathbb{R}) = \{0\}$ che è la proiezione

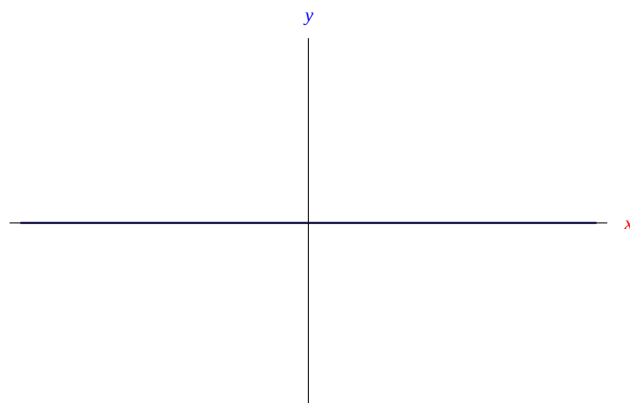


Figura 1.3: Grafico della funzione identicamente nulla.

ortogonale dell'asse x (grafico di f) sull'asse y .

Funzione identica

È definita da:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.13)$$

cioè associa a ogni $x \in \mathbb{R}$, il numero reale x :

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il grafico è:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \quad y = x\},$$

cioè la retta di equazione $y = x$, ovvero la bisettrice del primo e terzo quadrante che si proietta ortogonalmente sull'asse x nell'insieme di definizione $X = \mathbb{R}$ e sull'asse y nel codominio della funzione $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ come mostrato in fig. 1.3.

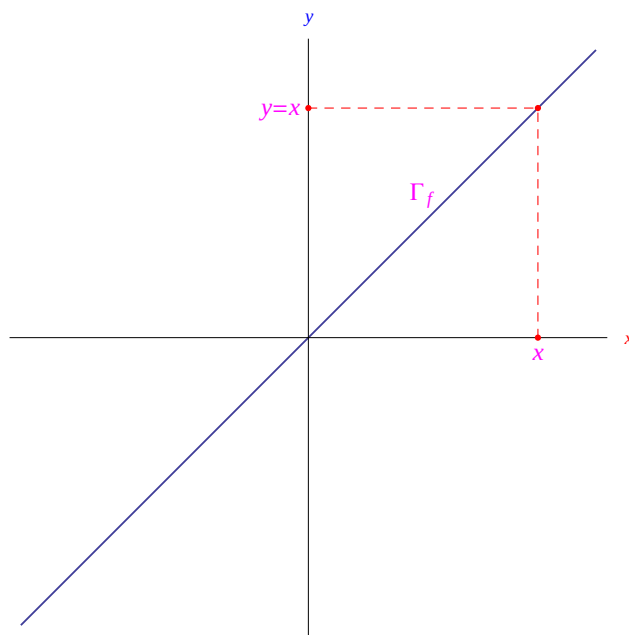


Figura 1.4: Grafico della funzione identica

Funzione valore assoluto

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

cioè associa a ogni $x \in \mathbb{R}$, il numero reale non negativo $|x|$:

$$f(x) = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.15)$$

Tenendo conto della definizione di valore assoluto di un numero reale, si ha:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Il grafico è:

$$\begin{aligned} \Gamma_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \quad y = |x|\} \\ &= r_+ \cup r_-, \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} r_+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, y = x\} \\ r_- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x \leq 0, y = -x\} \end{aligned}$$

In altri termini, r_+ e r_- sono rispettivamente le semirette bisettrici del primo e quarto quadrante. Il grafico della funzione valore assoluto è l'unione di tali semirette. Il grafico si proietta ortogonalmente sull'asse x nell'insieme di definizione della funzione $X = \mathbb{R}$ e sull'asse y nel suo codominio $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ come mostrato in fig. 1.5.

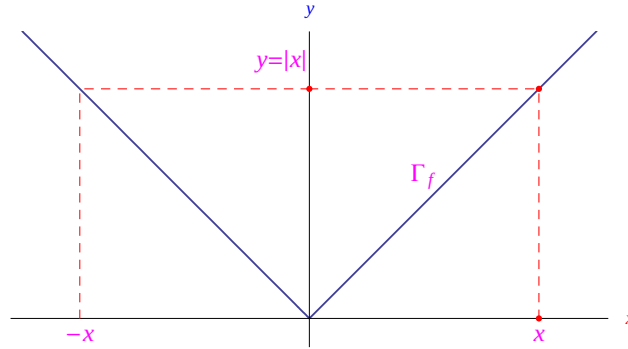


Figura 1.5: Il grafico della funzione valore assoluto è dato dall'unione delle semirette r_+ e r_- che sono, rispettivamente le semirette bisettrici del primo e quarto quadrante.

La fig. 1.6 riassume i grafici delle funzioni appena viste.

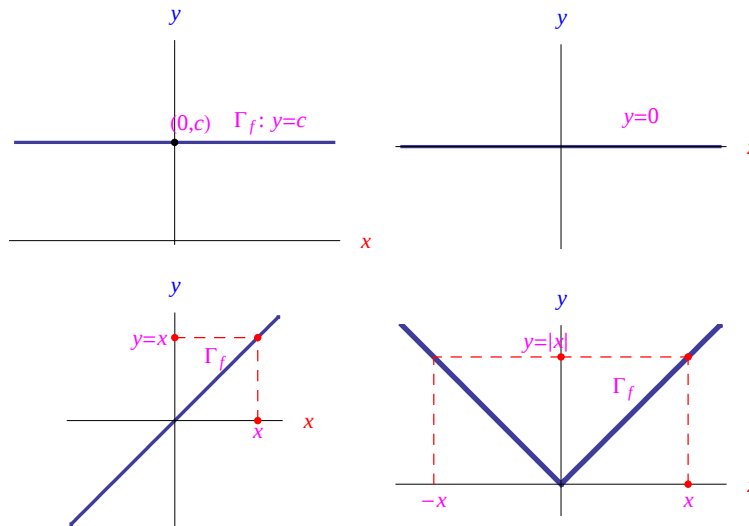


Figura 1.6: Grafici della funzione costante, della funzione identicamente nulla, della funzione identica e della funzione valore assoluto.

Funzione gradino unitario (o di Heaviside o unit step)

È così definita:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Per definizione di grafico:

$$\Gamma_\theta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, y = \theta(x)\}$$

Tenendo conto della (1.17):

$$\begin{aligned}\Gamma_\theta &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, y = 1\} \\ &\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < 0, y = 0\} \\ &= r_1 \cup r_2,\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}r_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, y = 1\} \\ r_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < 0, y = 0\}\end{aligned}$$

Cioè Γ_θ è l'unione della semiretta $y = 1$ di origine $(0, 1)$ e del semiasse negativo x privato dell'origine. Γ_θ si proietta sull'asse x in $X = \mathbb{R}$ e sull'asse y in $\theta(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$, come mostrato in fig. 1.7.

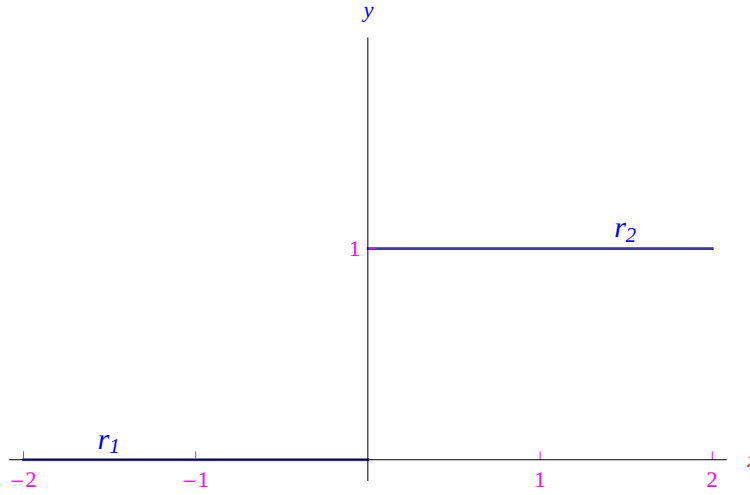


Figura 1.7: Il grafico della funzione gradino unitario è dato dall'unione delle due semirette r_1 e r_2 .

La funzione gradino unitario si generalizza nel seguente modo. Assegnato $x_0 \in \mathbb{R}$ definiamo:

$$\theta(x - x_0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq x_0 \\ 0, & \text{se } x < x_0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Il grafico è $\Gamma_\theta = r_1 \cup r_2$, essendo:

$$r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \leq x < +\infty, y = 1\}$$

e:

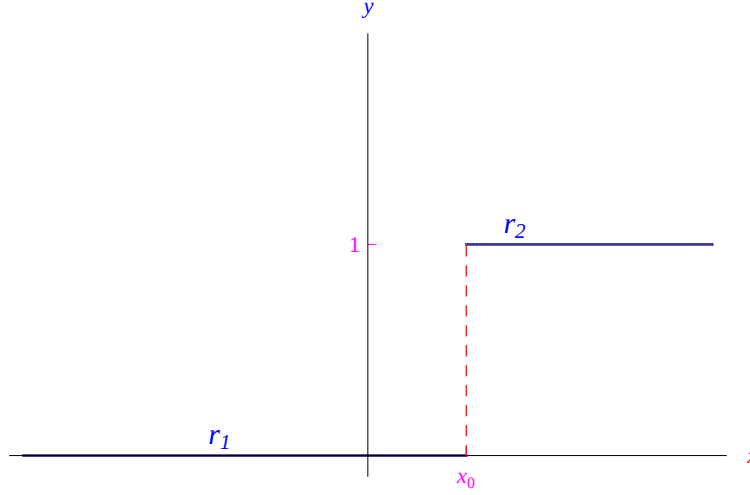
$$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < x_0, y = 0\}$$

Ne concludiamo che Γ_θ è l'unione della semiretta $y = 1$ di origine il punto $(x_0, 1)$ e della semiretta $y = 0$ (con $x < x_0$) di origine il punto $(x_0, 0)$ e privata di tale punto, come illustrato in fig. 1.8.

Funzione signum

È così definita:

$$\operatorname{sgn} x = \theta(x) - \theta(-x) \quad (1.19)$$


 Figura 1.8: Grafico della funzione gradino unitario $\theta(x - x_0)$.

Esplicitiamo la (1.19):

$$\begin{aligned} x > 0 &\implies_{x=|x|} \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} |x| = \theta(|x|) - \theta(-|x|) = 1 - 0 = 1 \\ x = 0 &\implies \operatorname{sgn} 0 = \theta(0) - \theta(0) = 0 \\ x < 0 &\implies_{x=-|x|} \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn}(-|x|) = \theta(-|x|) - \theta(|x|) = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Dalla (1.20) possiamo dedurre l'origine del nome dato alla funzione *signum*, dove “*signum*” sta per “segno”. Infatti, tale funzione agisce alla stregua di un operatore, il quale applicato a un numero reale x restituisce $+1$ se $x > 0$, 0 , se $x = 0$ e -1 se $x < 0$. Utilizzando la terminologia informatica, $\operatorname{sgn} x$ restituisce gli stati logici $+1, 0, -1$ che definiscono il segno del numero reale x . In altri termini, la funzione *signum* esegue un'estrazione del segno di $x \in \mathbb{R}$.

Un altro modo di scrivere $\operatorname{sgn} x$ consiste nell'utilizzare la **notazione di Iverson**. Si tratta di una notazione implementata dalle parentesi (di Iverson) definite da una legge di corrispondenza tra l'insieme delle proposizioni associate a un assegnato sistema formale e i valori binari $0, 1$. Precisamente, sia Π l'insieme delle proposizioni $\mathcal{P}$ associate a un sistema formale Σ :

$$[\cdot] : \Pi \rightarrow \mathbb{N} \quad (1.21)$$

$$\mathcal{P} \longrightarrow [\mathcal{P}], \quad \forall \mathcal{P} \in \Pi$$

Si osservi che la legge di corrispondenza (1.21) è una funzione, per come l'abbiamo definita in una sezione precedente. Risulta:

$$[\mathcal{P}] = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{P} \text{ è vera} \\ 0, & \text{se } \mathcal{P} \text{ è falsa} \end{cases} \quad (1.22)$$

Pertanto la funzione (1.21) è definita in Π e il suo codominio è $[\cdot](\Pi) = \{0, 1\}$. Utilizzando la terminologia informatica, diremo che $[\mathcal{P}]$ occupa uno degli stati logici **True** o **False**. Ad

esempio:

$$[x > 0] = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e:

$$[x < 0] = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

A questo punto possiamo scrivere:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} [x > 0] - [x < 0], & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Esaminiamo un'ulteriore modalità di scrittura della funzione signum. È facile convincersi che:

$$x = |x| \operatorname{sgn} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi:

$$\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (1.23)$$

o ciò che è lo stesso

$$\operatorname{sgn} x = \frac{|x|}{x}, \quad (1.24)$$

a patto che $x \neq 0$, per cui l'espressione completa è:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Per concludere, il grafico della funzione signum è:

$$\Gamma_{\operatorname{sgn}} = r_+ \cup r_- \cup \{(0, 0)\},$$

dove r_+ è la semiretta $y = 1$ e $x > 0$ privata dell'origine, mentre r_- è la semiretta $y = -1$ e $x < 0$, privata dell'origine. Il grafico è riportato in fig. 1.9.

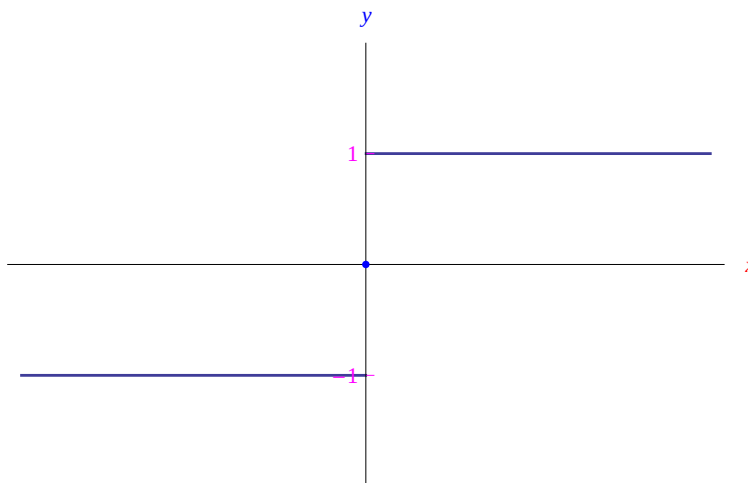


Figura 1.9: Grafico della funzione $\operatorname{sgn} x$

In fig. 1.10 riportiamo i grafici delle funzioni appena viste.

L'esempio seguente merita più attenzione, data l'importanza della funzione:

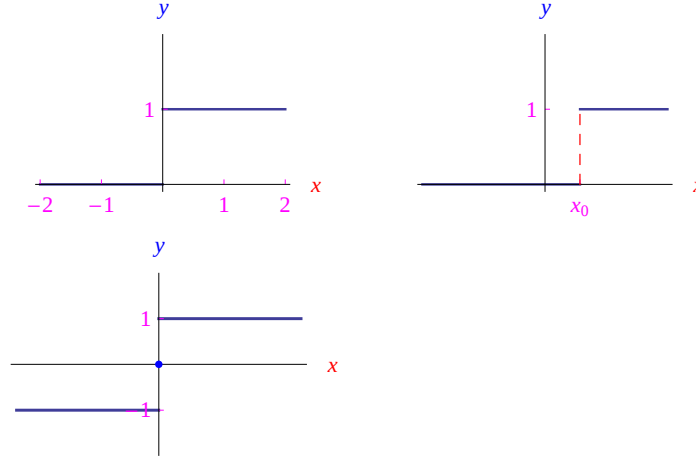


Figura 1.10: A partire da sinistra (in alto), abbiamo i grafici della funzione *unitstep*, *unistep generalizzata*, *signum*.

Funzione parte intera di x

Rammentiamo la definizione di parte intera di un numero reale. Assegnato un qualunque $x \in \mathbb{R}$, scriviamone la rappresentazione decimale:

$$x = \pm p, c_1 c_2 c_3, \dots,$$

dove $p \in \mathbb{N}$, $c_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $\forall k \in \{1, 2, \dots\}$. Poniamo per definizione:

$$[x] \stackrel{def}{=} \pm p \quad (1.25)$$

Cioè denotiamo con $[x]$ la parte intera di $x \in \mathbb{R}$. Ciò premesso, la **funzione parte intera di x** è:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto [x], \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.26)$$

Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si ha:

$$\begin{aligned} x \in [n-1, n) &\implies [x] = n-1 \\ x \in (-n, -n+1] &\implies [x] = -n+1 \end{aligned}$$

Esplicitiamo alcuni valori di n :

$$\begin{aligned} n=1 &\implies \begin{cases} x \in [0, 1) \implies [x] = 0 \\ x \in (-1, 0] \implies [x] = 0 \end{cases} \\ n=2 &\implies \begin{cases} x \in [1, 2) \implies [x] = 1 \\ x \in (-2, -1] \implies [x] = -1 \end{cases} \\ n=3 &\implies \begin{cases} x \in [2, 3) \implies [x] = 2 \\ x \in (-3, -2] \implies [x] = -2 \end{cases} \\ &\dots, \end{aligned}$$

da cui segue il grafico è:

$$\Gamma_{[x]} = \Gamma_0 \cup \Gamma' \cup \Gamma'',$$

dove:

$$\Gamma_0 =]-1, 1[\times \{0\},$$

cioè il segmento aperto di estremi $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

$$\Gamma' = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [n, n+1) \times \{n\},$$

mentre

$$\Gamma'' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (-(n+1), -n] \times \{-n\}$$

Cioè $\Gamma_{[x]}$ è l'unione di un numero infinito di segmenti. Precisamente il segmento aperto $(-1, 1)$, infiniti segmenti semiaperti a destra e infiniti segmenti semiaperti a sinistra. Ripor-
tiamo il grafico di $[x]$ in fig.1.11 che si proietta sull'asse x nell'insieme di definizione della
funzione $X = \mathbb{R}$ e sull'asse y nel codominio $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$.

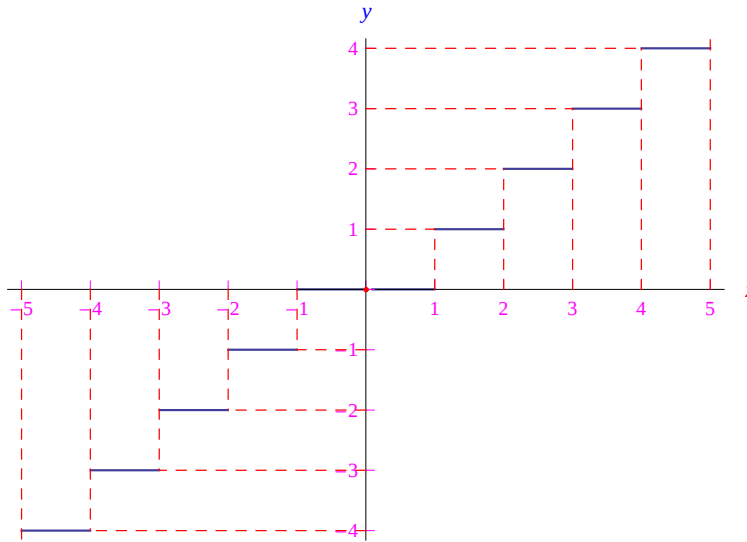


Figura 1.11: Grafico della funzione *parte intera di x*.

La funzione parte intera è utilizzata in molti linguaggi di programmazione ed è implementata in molti sistemi di computer algebra (C.A.S.). In Mathematica, ad esempio, è data da `IntegerPart[]`. La funzione built-in che viene invocata dal comando `Floor[]` riproduce gli stessi risultati di `IntegerPart[]` solo per $x > 0$. In fig. 1.12 riportiamo il grafico della funzione `Floor[]`.

Fattoriale di n

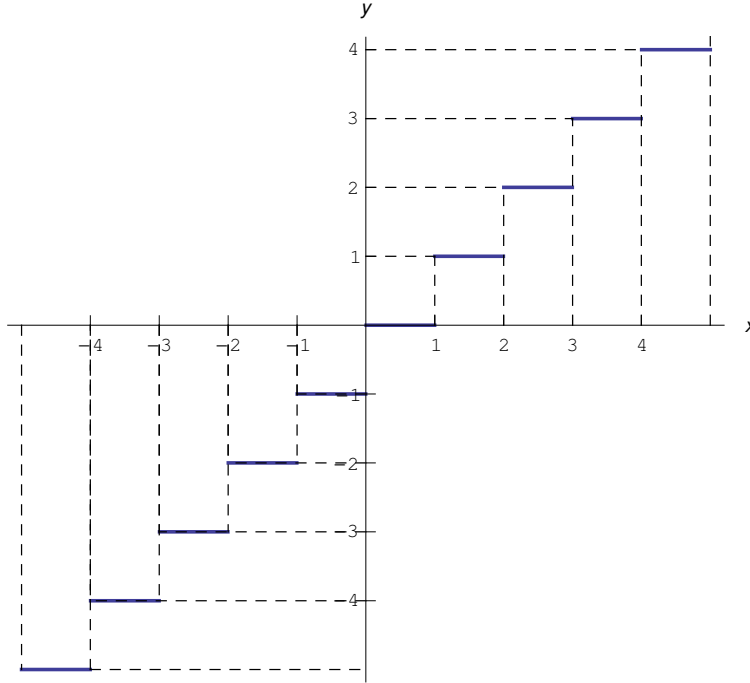
Questo è un argomento di Calcolo combinatorio, ma trattandosi di una [successione ricorsivamente definita](#), vale la pena trattarlo in questa sezione.

Definizione 4 Assegnato un qualunque intero positivo n , si chiama **fattoriale di n** (o n fattoriale) e si denota con $n!$, il prodotto dei primi n interi. Cioè:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

Tale definizione si estende a $n = 0$, ponendo:

$$0! \stackrel{def}{=} 1$$


 Figura 1.12: Grafico della funzione $\text{Floor}[x]$.

Il fattoriale di n è una successione di elementi di $\mathbb{N}$:

$$y : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad n \mapsto n!, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.27)$$

Come anticipato, è una successione ricorsivamente definita, giacchè:

$$y_n = n y_{n-1}, \quad (1.28)$$

avendo denotato con y_n il termine n -esimo della (1.27), ovvero

$$y_n = n! = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots 1}_{=(n-1)!}$$

Quindi, la (1.27) è definita dalla legge di ricorrenza:

$$\begin{cases} y_n = n y_{n-1} \\ y_0 = 1, \quad y_1 = 1 \end{cases} \quad (1.29)$$

In fig. 1.13 riportiamo il grafico della successione (1.27).

Esercizio 2 Tracciare il grafico della funzione:

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow |[x]|! \quad (1.30)$$

Soluzione.

Come vedremo più avanti, la (1.30) è una **funzione composta**. Assegnato $x \in \mathbb{R}$ si determina la parte intera $[x]$, dopodichè il suo valore assoluto, quindi il fattoriale. Abbiamo per $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

$$x \in [n-1, n) \implies [x] = n-1 \implies |[x]|! = |n-1|!$$

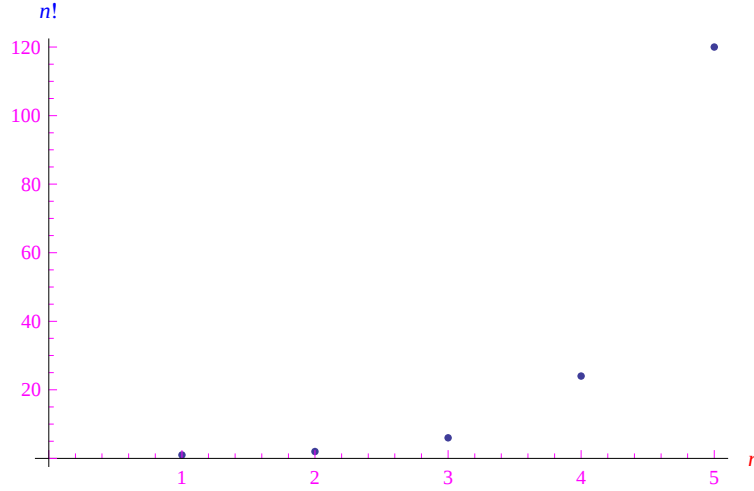


Figura 1.13: Andamento di $n!$ in funzione di n . Si noti la rapida crescita di $n!$

In maniera simile:

$$x \in (-n, -n + 1] \implies [x] = -n + 1 \implies |[x]|! = |-n + 1|!$$

Esplicitiamo alcuni valori di n :

$$\begin{aligned} n = 1 &\implies \begin{cases} x \in [0, 1) \implies |[x]|! = 0! = 1 \\ x \in (-1, 0] \implies |[x]|! = 0! = 1 \end{cases} \\ n = 2 &\implies \begin{cases} x \in [1, 2) \implies |[x]|! = 1! = 1 \\ x \in (-2, -1] \implies |[x]|! = |-1|! = 1 \end{cases} \\ n = 3 &\implies \begin{cases} x \in [2, 3) \implies |[x]|! = 2! = 2 \\ x \in (-3, -2] \implies |[x]|! = |-2|! = 2 \end{cases} \\ n = 4 &\implies \begin{cases} x \in [3, 4) \implies |[x]|! = 3! = 6 \\ x \in (-4, -3] \implies |[x]|! = |-3|! = 6 \end{cases} \\ &\dots, \end{aligned}$$

A questo punto siamo in grado di tracciare il grafico per $x \in [-4, 4]$, che è riportato in fig. (1.14).

1.1.3 Restrizione e prolungamento di una funzione

Sia data la funzione reale:

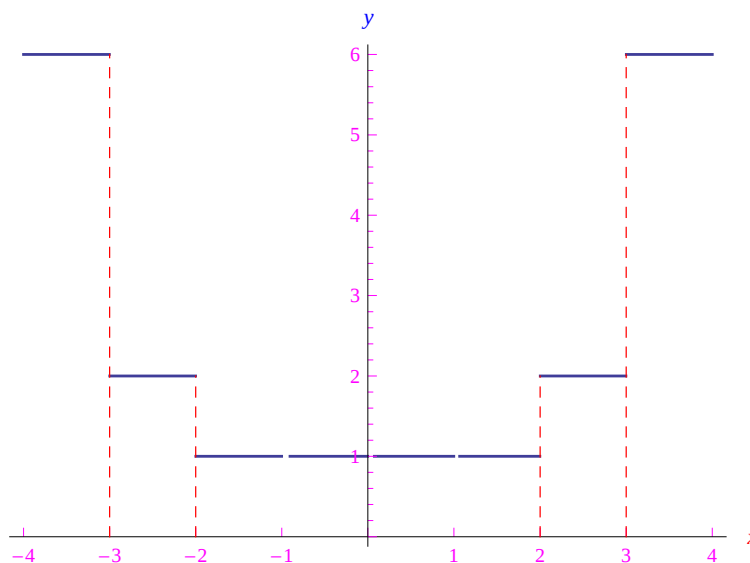
$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.31)$$

$$x \mapsto f(x), \quad \forall x \in X$$

Assegnati $A, B \neq \emptyset$ tali che $A \subseteq X$ e $B \supseteq X$, consideriamo le funzioni:

$$\begin{aligned} f_A : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x), \quad \forall x \in A \\ g : B &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto g(x), \quad \forall x \in B \end{aligned} \quad (1.32)$$

dove g è tale che $g(x) = f(x), \quad \forall x \in X$.

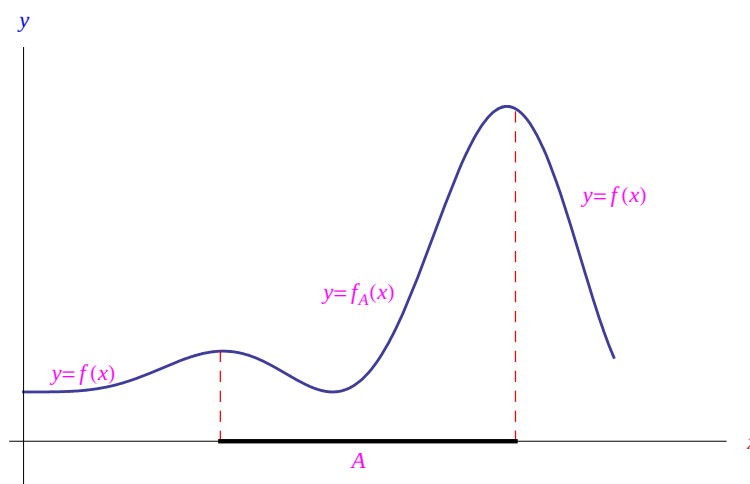

 Figura 1.14: Grafico della funzione $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow |[x]|!$

Definizione 5 f_A si chiama **restrizione di f ad A** , mentre g si chiama **un prolungamento di f su B** .

Il grafico di f_A è:

$$\Gamma_{f_A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y = f(x)\} \subseteq \Gamma_f,$$

dove Γ_f è il grafico di f . Il codominio di f_A è $f_A(A) \subseteq \mathbb{R}$. Per non appesantire la notazione scriviamo $f(A)$. È chiaro che $f(A) \subseteq f(X)$. La definizione appena vista è illustrata in fig. 1.15


 Figura 1.15: f_A è la restrizione della funzione f all'insieme A (nello specifico un intervallo contenuto in X).

Mentre la restrizione è manifestamente unica, i prolungamenti di f su $B \supset X$ sono infiniti, come illustrato in fig. 1.16.

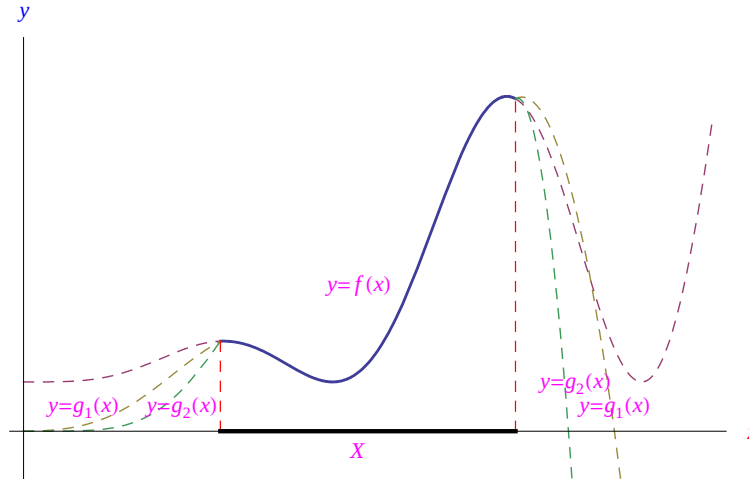


Figura 1.16: f_A è la restrizione della funzione f all'insieme A (nello specifico un intervallo contenuto in X).

Esempio 3 Sia data la funzione:

$$f(x) = x^2,$$

definita in $X = \mathbb{R}$. Assegnato $A = [-1, 1]$ la restrizione di f ad A è:

$$f_A(x) = x^2, \quad \forall x \in A$$

Il grafico di f è la parabola $\Gamma_f : y = x^2$, mentre il grafico di f_A è l'arco di parabola $\Gamma_{f_A} : y = f_A(x)$ di estremi $P_1(-1, 1)$ e $P_2(1, 1)$. Consideriamo, ora la funzione:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 1] \\ |x^3|, & x \notin [-1, 1] \end{cases}, \quad (1.33)$$

il cui grafico è riportato in fig. 1.17. Ne concludiamo che f e $f_1 \neq f$ hanno la stessa

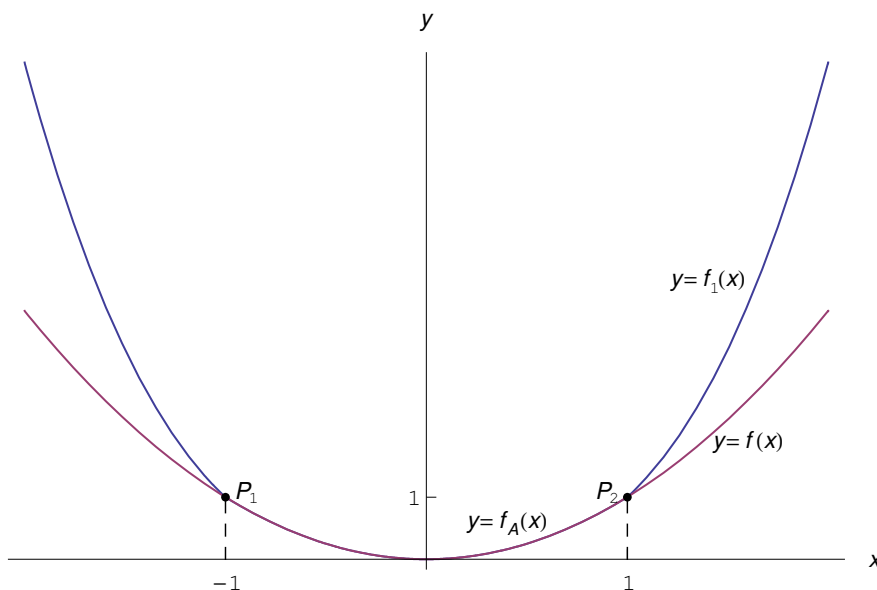


Figura 1.17: Le funzioni f e $f_1 \neq f$ hanno la stessa restrizione ad $A = [-1, 1]$.

restrizione ad A .

1.1.4 Segno e zeri di una funzione. Valore assoluto

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$ e $X' \subseteq X$ tale che $X' \neq \emptyset$.

Definizione 6

$$f \text{ è } \textbf{positiva} \text{ in } X' \iff (f(x) > 0, \forall x \in X') \quad (1.34)$$

$$f \text{ è } \textbf{negativa} \text{ in } X' \iff (f(x) < 0, \forall x \in X') \quad (1.35)$$

$$f \text{ è } \textbf{non negativa} \text{ in } X' \iff (f(x) \geq 0, \forall x \in X') \quad (1.36)$$

$$f \text{ è } \textbf{non positiva} \text{ in } X' \iff (f(x) \leq 0, \forall x \in X') \quad (1.37)$$

Definizione 7

$$f \text{ ha } \textbf{segno costante} \text{ in } X' \iff (f \text{ è ivi positiva o negativa}) \quad (1.38)$$

Definizione 8

$$x_0 \in X \text{ è uno } \textbf{zero} \text{ di } f \iff (f(x_0) = 0) \quad (1.39)$$

Se x_0 è uno zero di f , si ha $P_0(x_0, 0) \in \Gamma_f \cap x$, cioè il grafico della funzione interseca l'asse x nel punto $P_0(x_0, 0)$.

Osservazione 2 Se f ha segno costante in X' è ivi priva di zeri, i.e. il grafico della restrizione di f a X' non interseca l'asse x .

Definizione 9

$$f \text{ è } \textbf{identicamente nulla} \text{ in } X' \iff (f(x) = 0, \forall x \in X') \quad (1.40)$$

Cioè se ogni punto di X' è uno zero di f .

Definizione 10

$$\forall \quad f : X \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \exists! \quad |f| : X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x), \forall x \in X \quad \quad x \mapsto |f(x)|, \forall x \in X$$

In altri termini, a ogni funzione f possiamo associare la funzione non negativa $|f|$ che si chiama **valore assoluto** di f .

Riguardo al grafico di $|f|$, osserviamo che detto A il sottoinsieme di X in cui f è non negativa:

$$A = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\},$$

si ha che il grafico di f è l'unione di due insiemi di punti del piano euclideo:

$$\Gamma_f = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

dove

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y = f(x)\},$$

e

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X - A, y = f(x)\}$$

Da ciò segue che il grafico di $\Gamma_{|f|}$ di $|f|$ è:

$$\Gamma_{|f|} = \Gamma_1 \cup \Gamma'_2,$$

dove:

$$\Gamma'_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X - A, y = -f(x)\},$$

per cui Γ'_2 è il simmetrico di Γ_2 rispetto all'asse x .

Esempio 4 Il grafico della funzione $f(x) = x^3$ è:

$$\Gamma_f = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

dove:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, y = x^3\}$$

e:

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x \leq 0, y = x^3\},$$

Il grafico di $|f|$ è:

$$\Gamma_{|f|} = \Gamma_1 \cup \Gamma'_2,$$

dove:

$$\Gamma'_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x \leq 0, y = -x^3\},$$

da cui vediamo che i grafici delle funzioni $f(x) = x^3$ e $|f(x)| = |x^3|$ hanno gli andamenti riportati in fig. 1.18.

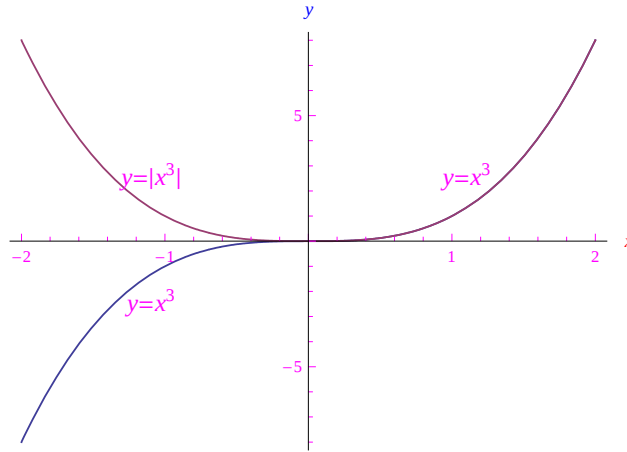


Figura 1.18: Andamento del grafico di $f(x) = x^3$ e $|f(x)| = |x^3|$, da cui vediamo che l'arco di diagramma di $|f|$ contenuto nel semipiano $x < 0$ è il simmetrico del corrispondente arco di diagramma di f rispetto all'asse x .

1.1.5 Parità di una funzione. Simmetrie

In questo paragrafo definiamo la cosiddetta *parità* di una funzione. Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 11 *Assegnate le funzioni:*

$$f_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2 : X_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dicesi **somma di** f_1 e f_2 , e si indica con $f_1 + f_2$, la funzione:

$$f_1 + f_2 : X_1 \cap X_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che $f_1 + f_2 : x \in X_1 \cap X_2 \rightarrow f_1(x) + f_2(x)$.

Ciò premesso:

Definizione 12 *Sia f una funzione definita in un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ tale che $-x \in X$, $\forall x \in X$. Diciamo che la funzione è **pari** se*

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in X \tag{1.41}$$

È invece **dispari** se:

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in X \tag{1.42}$$

Tra le funzioni studiate nei paragrafi precedenti, troviamo che la funzione costante $f(x) = c$ è pari:

$$f(-x) = c = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ è pari, avendosi:

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione identica $f(x) = x$ è dispari:

$$f(-x) = -x = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Definizione 13 *Una funzione ha **parità definita** se è pari o dispari.*

Un esempio di funzione che non ha parità definita è la funzione di Heaviside, già incontrata in precedenza e che qui riscriviamo:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

per cui:

$$\theta(-x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -x \geq 0 \\ 0, & \text{se } -x < 0 \end{cases}$$

Cioè:

$$\theta(-x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 0 \\ 0, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Quindi $\theta(x) \neq \theta(-x)$. Una funzione che non ha parità definita si esprime come somma (nel senso della definizione 11) di una funzione pari e di una funzione dispari a patto che l'insieme di definizione sia del tipo $X = [-a, a]$. Precisamente:

$$f(x) = f_p(x) + f_d(x),$$

dove

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_d(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

È facile convincersi che f_p è pari, mentre f_d è dispari. Ad esempio, nel caso della funzione di Heaviside:

$$\theta_p(x) = \frac{\theta(x) + \theta(-x)}{2} = \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

mentre:

$$\theta_d(x) = \frac{\theta(x) - \theta(-x)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Concludiamo questo paragrafo osservando che il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y , mentre il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine del sistema di assi cartesiani e, conseguentemente, passa per tale punto (cfr. fig. 1.19).

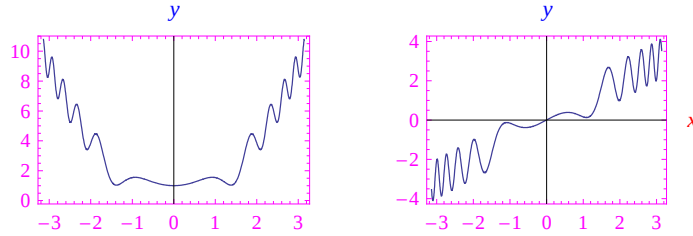


Figura 1.19: La parità (± 1) di una funzione si traduce in una simmetria del grafico rispetto al sistema di riferimento cartesiano: mentre il grafico di una funzione pari (parità $(+1)$) è simmetrico rispetto all'asse y , il grafico di una funzione dispari (parità (-1)) è simmetrico rispetto all'origine.

1.1.6 Funzioni periodiche

Definizione 14

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ è } \textbf{periodica} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists T > 0 \mid \forall x \in X, \quad f(x) = f(x + kT), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.43)$$

Il numero reale $T > 0$ è il **periodo** della funzione.

La definizione (1.43) implica che l'insieme di definizione $X \subseteq \mathbb{R}$ è illimitato sia superiormente, sia inferiormente², giacchè $\forall x \in X, (x + kT) \in X, \forall k \in \mathbb{Z}$.

In alcune applicazioni (la **serie di Fourier**) il numero reale T che verifica la proprietà (1.43) si chiama **periodo fondamentale** della funzione. Tale denominazione deriva dal fatto che $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, nT$ è ancora un periodo della funzione.

Tuttavia nel seguito, quando parliamo di periodo, ci riferiamo al periodo fondamentale.

Risulta

$$f(X) = f(A),$$

²Tipicamente, nelle applicazioni X è illimitato solo superiormente. Si pensi ad una grandezza periodica che sia funzione del tempo t , per cui abbiamo una funzione periodica $f(t)$. In questo caso l'insieme di definizione è $[0, +\infty)$.

dove $A = X \cap [0, T)$. Cioè l'immagine di X tramite f coincide con l'immagine di A tramite f . Quest'ultima è il codominio della [restrizione](#) di f all'insieme A , ovvero della funzione $f_A : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Il diagramma cartesiano di una funzione f definita in X illimitato e periodica di periodo T , è l'unione di un numero infinito di archi ciascuno dei quali è il grafico della restrizione f_A traslato lungo l'asse x con traslazione di ampiezza $|k|T$, dove $k \in \mathbb{Z}$. Per $k > 0$ la traslazione è nel verso delle x crescenti, mentre per $k < 0$ è nel verso delle x decrescenti. Cioè:

$$\Gamma = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma_k,$$

essendo $\Gamma_k : y = f_A(x)$ traslato lungo l'asse x di $|k|T$. Precisamente:

$$\Gamma_k : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [kT, (k+1)T), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Abbiamo, dunque, una successione di archi di curva $\{\Gamma_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Esplicitando i singoli termini:

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \Gamma_{-|n|} : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [-|n|T, (-|n|+1)T) \\ & \dots \\ & \Gamma_{-2} : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [-2T, -T) \\ & \Gamma_{-1} : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [-T, 0) \\ & \Gamma_0 : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [0, T) \\ & \Gamma_1 : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [T, 2T) \\ & \Gamma_2 : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [2T, 3T) \\ & \dots \\ & \Gamma_n : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [nT, (n+1)T) \\ & \dots \end{aligned}$$

Ad esempio, Γ_2 è la curva $y : f_A(x)$ traslata nella direzione dell'asse x con una traslazione di ampiezza 2 nel verso delle x crescenti, mentre Γ_{-2} è la curva $y : f_A(x)$ traslata nella direzione dell'asse x con una traslazione di ampiezza 2 nel verso delle x decrescenti, come illustrato in fig. [1.20](#).

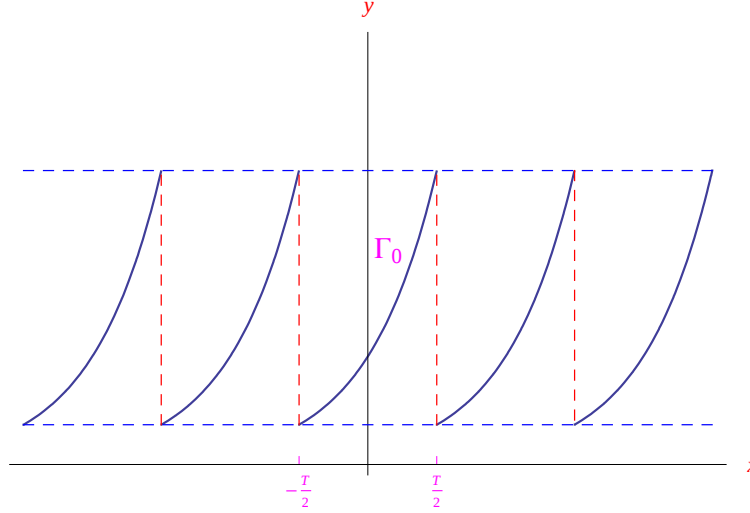


Figura 1.20: Il grafico di una funzione periodica si compone di infiniti archi, ciascuno dei quali ottenuto da Γ_0 per traslazione nella direzione dell'asse x .

1.1.7 Funzioni monotone

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 15 f è **crescente** in X se:

$$\forall x', x'' \in X \mid x' < x'' \implies f(x') \leq f(x'') \quad (1.44)$$

f è **decescente** in X se:

$$\forall x', x'' \in X \mid x' < x'' \implies f(x') \geq f(x'') \quad (1.45)$$

Definizione 16 Assegnato $X \subseteq \mathbb{R}$, denotiamo con $\mathcal{F}_X$ l'insieme delle funzioni definite in X . Cioè:

$$\mathcal{F}_X = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{R}\} \quad (1.46)$$

Sia

$$\mathcal{F}_X^* = \{f \in \mathcal{F}_X \mid f \text{ è crescente o decrescente}\} \quad (1.47)$$

Chiamiamo $\mathcal{F}_X^*$ **classe delle funzioni monotone** in X .

In altri termini, una funzione è monotona in X se è ivi crescente o decrescente. Se le disuguaglianze (1.44)-(1.45) valgono in senso stretto, cioè se:

$$\begin{aligned} x' < x'' &\implies f(x') < f(x''), \quad \forall x', x'' \in X \\ x' < x'' &\implies f(x') > f(x''), \quad \forall x', x'' \in X, \end{aligned} \quad (1.48)$$

diremo che f è **strettamente crescente** in X se è verificata la prima delle (1.48), **strettamente decrescente** se è verificata la seconda. Le funzioni strettamente crescenti/decrescenti in X , compongono la classe delle funzioni **strettamente monotone**:

$$\mathcal{F}_X'^* = \{f \in \mathcal{F}_X \mid f \text{ è strettamente monotona}\} \quad (1.49)$$

La monotonia di una funzione così definita, risulta essere una proprietà globale che, però, può essere definita anche localmente. Più precisamente, nel caso di una funzione crescente:

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ è localmente crescente} \Bigg) \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists X' \subset X \mid f_{X'} \text{ è crescente},$$

essendo $f_{X'}$ la **restrizione** di f a X' . In fig. 1.21 riportiamo il grafico di una funzione decrescente, mentre in fig. 1.22 è illustrato il grafico di una funzione strettamente crescente.

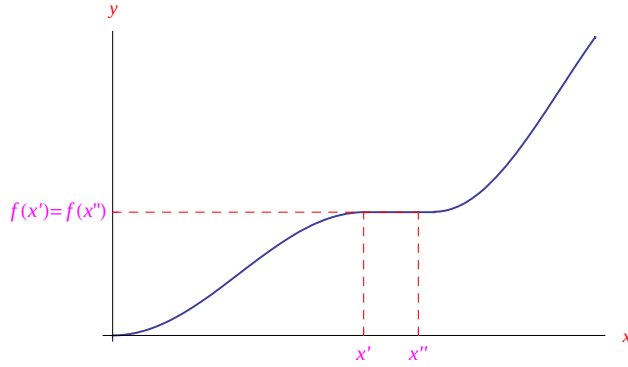


Figura 1.21: Grafico di una funzione decrescente, ma non in senso stretto. Infatti, nei punti x' e x'' è $f(x') = f(x'')$.

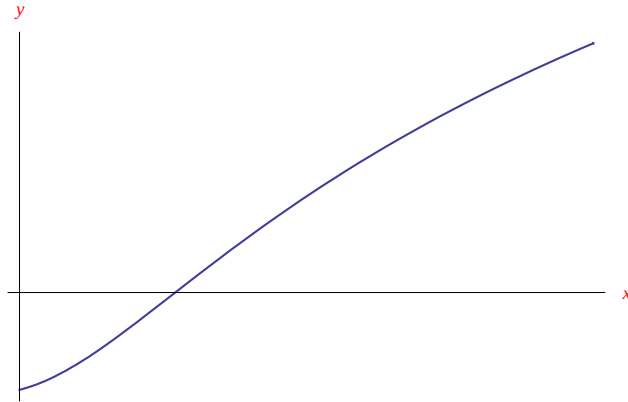


Figura 1.22: Grafico di una funzione strettamente crescente.

Premettiamo ora la seguente definizione

Definizione 17 Sia $A \neq \emptyset$. Gli insiemi non vuoti $A_1, A_2, \dots, A_n$ costituiscono una **partizione** di A se:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = A$$

$$\overset{\circ}{A}_k \cap \overset{\circ}{A}_{k'} = \emptyset, \text{ per } k, k' \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ con } k \neq k',$$

dove il simbolo $\circ$ denota la parte interna dell'insieme vuoto. Nel caso di un intervallo chiuso $[a, b]$, tale simbolo restituisce l'intervallo aperto (a, b) .

Eseguiamo una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ attraverso $n + 1$ punti:

$$x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$$

Precisamente:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Si tratta di una partizione, poiché:

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, b] = [a, b]$$

$$\forall k, k' \in \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ con } k \neq k', \quad (x_k, x_{k+1}) \cap (x_{k'}, x_{k'+1}) = \emptyset$$

Ciò premesso, sussiste la seguente definizione:

Definizione 18 f è **monotona a tratti** nell'intervallo limitato $[a, b]$ se esiste una partizione di $[a, b]$:

$$[a, b] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}],$$

tale che f è localmente monotona in $[x_k, x_{k+1}]$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Osservazione 3 La definizione precedente rimane valida anche per un intervallo aperto (a, b) limitato.

Definizione 19 f è monotona a tratti in un intervallo illimitato X se è localmente monotona in ogni intervallo limitato $I \subset X$.

1.1.8 Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive

Nel paragrafo 1.1 abbiamo definito la nozione di **funzione** quale applicazione tra due insiemi qualsiasi non vuoti X e Y :

$$f : X \rightarrow Y \quad x \mapsto y, \quad \forall x \in X \quad (1.50)$$

Ricordiamo che X l'insieme di definizione o **dominio** della funzione, mentre il seguente sottoinsieme di Y :

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\},$$

è il codominio di f , detto anche **immagine di X mediante f** , a volte denotata con il simbolo $\text{Im } f$. Ciò premesso, sussistono le seguenti definizioni:

Definizione 20 L'elemento $y \in f(X)$ che corrisponde a x , si dice **immagine di x mediante f** .

Definizione 21 Assegnato $y \in f(X)$ consideriamo il sottoinsieme di X :

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid y = f(x)\} \subseteq X, \quad (1.51)$$

che si chiama **anti-immagine** o **immagine inversa di y mediante f** . L'insieme (1.51) è chiamato anche **fibra di f su y** .

Definizione 22 Le applicazioni $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ si dicono uguali e si scrive $f = g$ se:

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in X$$

Definizione 23 L'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è **iniettiva** se

$$x' \neq x'' \implies f(x') \neq f(x'') \quad (1.52)$$

Cioè, f è iniettiva se elementi distinti di X hanno immagini distinte. Si noti che la (1.52) è equivalente a:

$$f(x') = f(x'') \implies x' = x'' \quad (1.53)$$

Osservazione 4 Se f è iniettiva, comunque prendiamo $y \in f(X)$, $f^{-1}(y)$ è costituito da uno e un solo elemento.

Definizione 24 L'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è **suriettiva** se $f(X) = Y$, cioè se:

$$y \in Y \implies \exists x \in X \mid y = f(x)$$

Osservazione 5 Se f è suriettiva $f^{-1}(y) \neq \emptyset, \forall y \in Y$.

Definizione 25 Un'applicazione f che sia iniettiva e suriettiva si dice **biiettiva**.

Osservazione 6 Se f è iniettiva, comunque prendiamo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ è costituito da uno e un solo elemento.

Di seguito alcuni esempi di applicazioni.

Esempio 5 Comunque prendiamo un insieme non vuoto X , si chiama **applicazione identica su X** , l'applicazione:

$$I_X : X \rightarrow X \\ x \mapsto x, \quad \forall x \in X \quad (1.54)$$

Abbiamo già incontrato l'applicazione identica quando abbiamo introdotto la nozione di funzione reale di una variabile reale. Precisamente, avevamo definito la funzione identica:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.55)$$

che in tal caso si dice “applicazione identica su $\mathbb{R}$ ”.

La (1.54) è biiettiva giacchè è manifestamente suriettiva e iniettiva.

Esempio 6 Consideriamo l'applicazione:

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ k \mapsto -k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.56)$$

cioè la legge che a ogni intero relativo k , associa il suo opposto. Risulta:

$$h \in \mathbb{Z} \implies \exists (-h) \in \mathbb{Z} \mid f(-h) = -(-h) = h$$

Cioè f è suriettiva. Inoltre:

$$k' \neq k'' \implies -k' \neq -k'' \implies f(k') \neq f(k''),$$

da cui l'iniettività di f . Ne concludiamo che l'applicazione (1.56) è biiettiva.

Esempio 7 Consideriamo l'applicazione:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad (1.57)$$

$$n \mapsto 2n+1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Risulta $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, giacchè è l'insieme dei numeri dispari. Quindi f non è suriettiva.

$$n' \neq n'' \implies f(n') \neq f(n'')$$

Cioè f è iniettiva.

Esempio 8 Consideriamo l'applicazione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.58)$$

$$x \mapsto x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Risulta:

$$f(-x) = f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

per cui f non è iniettiva. Inoltre $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$, onde non è suriettiva.

1.1.9 Composizione di applicazioni

Assegnate le applicazioni f e g :

$$f : x \in X \rightarrow f(x) \quad (1.59)$$

$$g : y \in Y \rightarrow g(y),$$

consideriamo il seguente sottoinsieme di X (eventualmente vuoto):

$$A = \{x \in X \mid f(x) \in Y\} \quad (1.60)$$

Evidentemente:

$$A \neq \emptyset \implies \exists x \in X \mid f(x) \in Y,$$

onde:

$$g : f(x) \in Y \rightarrow g(f(x))$$

In altri termini, se $A \neq \emptyset$, all'elemento $x \in A$ corrisponde, mediante l'applicazione f , l'elemento $f(x) \in Y$ e a quest'ultimo, mediante l'applicazione g , l'elemento $g(f(x))$. In simboli:

$$x \in A \xrightarrow{f} f(x) \in Y \xrightarrow{g} g(f(x))$$

In tal modo, le applicazioni f e g vengono, per così dire, a “concatenarsi”:

$$f : A \rightarrow Y \quad (1.61)$$

$$x \mapsto f(x), \quad \forall x \in A$$

$$g : Y \rightarrow Z \quad (1.62)$$

$$f(x) \mapsto g(f(x)), \quad \forall f(x) \in Y$$

dove l'insieme Z è tale che $Z \supseteq g(Y)$.

Osservazione 7 Nella (1.61) f è in realtà la restrizione di f ad A e, pertanto, andrebbe denotata con f_A . Per non appesantire la notazione, utilizziamo il simbolo usuale f .

Le (1.61) definiscono una terza applicazione:

$$h : A \rightarrow Z \quad x \mapsto g(f(x)), \quad \forall x \in A \quad (1.63)$$

che si chiama **applicazione** (o **funzione**) **composta** e si indica con $g \circ f$:

$$g \circ f : A \rightarrow Z \quad x \mapsto g(f(x)), \quad \forall x \in A \quad (1.64)$$

Quindi:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A$$

Le applicazioni f e g sono le **applicazioni componenti** della funzione composta $g \circ f$. Precisamente, f è la **componente interna** e g è la **componente esterna**. Naturalmente, A è l'insieme di definizione della funzione composta $g \circ f$.

L'operazione di composizione di applicazioni è spesso denominata **prodotto di applicazioni** e si generalizza a n applicazioni $f_1, f_2, \dots, f_n$:

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$$

Ad esempio, per $n = 3$:

$$\begin{aligned} f : x \in X &\rightarrow f(x) \\ g : y \in Y &\rightarrow g(y) \\ h : z \in Z &\rightarrow h(z) \end{aligned} \quad (1.65)$$

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di X e Y (eventualmente vuoti):

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X \mid f(x) \in Y\} \\ B &= \{y \in Y \mid g(y) \in Z\} \end{aligned}$$

Evidentemente:

$$A \neq \emptyset \implies \exists x \in X \mid f(x) \in Y,$$

onde:

$$g : f(x) \in Y \rightarrow g(f(x))$$

Per quanto visto, ciò definisce l'applicazione composta:

$$g \circ f : x \in A \rightarrow g(f(x))$$

Ora supponiamo $B \neq \emptyset$:

$$B \neq \emptyset \implies \exists y \in Y \mid g(y) \in Z,$$

onde:

$$h : g(y) \in Z \rightarrow h(g(y))$$

In tal modo, le applicazioni g e h vengono a “concatenarsi”:

$$g : B \rightarrow Z \quad y \mapsto g(y), \quad \forall y \in B \quad (1.66)$$

$$h : Z \rightarrow W \quad g(y) \mapsto h(g(y)), \quad \forall g(y) \in Z \quad (1.67)$$

dove W è tale che $W \supseteq h(Z)$. Abbiamo dunque la funzione composta:

$$h \circ g : B \rightarrow W$$

$$y \mapsto h(g(y)), \quad \forall y \in B$$

ovvero:

$$(h \circ g)(y) = h(g(y)), \quad \forall y \in B$$

In definitiva:

$$f : A \rightarrow Y$$

$$x \mapsto f(x), \quad \forall x \in A$$

$$g : B \rightarrow Z$$

$$f(x) \mapsto g(f(x)), \quad \forall f(x) \in B$$

$$h : Z \rightarrow W$$

$$g(f(x)) \mapsto h(g(f(x))), \quad \forall g(f(x)) \in Z$$

Abbiamo, dunque, una quarta applicazione:

$$k : A \rightarrow W$$

$$x \mapsto h(g(f(x))), \quad \forall x \in A$$

in cui riconosciamo la funzione composta $h \circ g \circ f$

$$h \circ g \circ f : A \rightarrow W$$

$$x \mapsto h(g(f(x))), \quad \forall x \in A$$

ovvero:

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))), \quad \forall x \in A$$

Proposizione 1 *Il prodotto di applicazioni verifica la proprietà associativa.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, consideriamo il caso $n = 3$, con le applicazioni f, g, h definite in precedenza. Si tratta di dimostrare:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{1.68}$$

Poniamo $G = h \circ g$, per cui:

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (G \circ f)(x) = G(f(x)) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))), \quad \forall x \in A$$

Ma $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, onde:

$$[(h \circ g) \circ f](x) = h[(g \circ f)(x)] = [h \circ (g \circ f)](x), \quad \forall x \in A$$

Cioè l'asserto (1.68). ■

Proposizione 2 *Comunque prendiamo un'applicazione $f : X \rightarrow Y$*

$$f \circ I_X = I_Y \circ f,$$

dove $I_X : X \rightarrow X$ e $I_Y : Y \rightarrow Y$ sono le applicazioni identiche su X e su Y rispettivamente.

Dimostrazione.

$$(f \circ I_X)(x) = f(I_X(x)) = f(x)$$

$$(I_Y \circ f)(x) = I_Y(f(x)) = y = f(x), \quad \forall x \in X,$$

onde $f \circ I_X = I_Y \circ f$. ■

Proposizione 3

$$\exists f \circ g \not\Rightarrow \exists g \circ f$$

Dimostrazione. Assegnate le applicazioni

$$\begin{aligned} f : x \in X &\rightarrow f(x) \\ g : y \in Y &\rightarrow g(y), \end{aligned} \tag{1.69}$$

posto $A = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ e supponendo tale insieme non vuoto, segue l'esistenza dell'applicazione composta:

$$g \circ f : x \in A \longrightarrow g(f(x)) \in Z,$$

dove $Z \supseteq g(Y)$. Per stabilire l'esistenza dell'applicazione composta $f \circ g$, consideriamo l'insieme $B = \{y \in Y \mid g(y) \in X\}$. Se $B \neq \emptyset$:

$$f : g(y) \in X \rightarrow f(g(y)),$$

per cui:

$$y \in B \xrightarrow[g]{} g(y) \in X \xrightarrow[f]{} f(g(y))$$

In tal modo le applicazioni g e f si concatenano:

$$g : B \rightarrow Y \tag{1.70}$$

$$y \rightarrow g(y), \quad \forall y \in B$$

$$f : X \rightarrow Z \tag{1.71}$$

$$g(y) \rightarrow f(g(y)), \quad \forall g(y) \in X$$

Cioè la funzione composta:

$$f \circ g : y \in B \rightarrow f(g(y)) \in Z, \quad \forall y \in B \tag{1.72}$$

Quindi:

$$(f \circ g)(y) = f(g(y))$$

L'esistenza della (1.72) è vincolata alla condizione $B \neq \emptyset$:

$$\exists g \circ f \not\Rightarrow \exists f \circ g$$

Di contro, l'esistenza di $g \circ f$ è legata alla condizione $A \neq \emptyset$. Chiaramente:

$$A \neq \emptyset \not\Rightarrow B \neq \emptyset,$$

onde l'asserto. ■

Infine, sussiste la seguente proposizione:

Proposizione 4 *Data la funzione composta $g(f(x))$, se le funzioni componenti sono monotone, anche la funzione composta è monotona (risultato analogo nel caso della monotonia in senso stretto).*

Più precisamente:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} f \text{ e } g \text{ crescenti} \\ \text{ o decrescenti} \end{array} \right\} &\implies (g(f(x))) \text{ è crescente} \\ \left. \begin{array}{l} f \text{ è crescente} \\ g \text{ è decrescente} \end{array} \right\} &\implies (g(f(x))) \text{ è decrescente} \\ \left. \begin{array}{l} f \text{ è decrescente} \\ g \text{ è crescente} \end{array} \right\} &\implies (g(f(x))) \text{ è crescente} \end{aligned} \tag{1.73}$$

Dimostrazione. Assegnate le applicazioni

$$\begin{aligned} f : x \in X &\rightarrow f(x) \\ g : y \in Y &\rightarrow g(y), \end{aligned} \tag{1.74}$$

posto $A = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ e supponendo tale insieme non vuoto, segue l'esistenza dell'applicazione composta:

$$g \circ f : x \in A \longrightarrow g(f(x)) \in Z,$$

dove $Z \supseteq g(Y)$. Se f e g sono entrambe crescenti:

$$x', x'' \in A, \quad x' > x'' \implies f(x') \geq f(x'') \implies g(f(x')) \geq g(f(x'')),$$

cioè $g(f(x))$ è crescente.

Se f è crescente e g è decrescente:

$$x', x'' \in A, \quad x' > x'' \implies f(x') \geq f(x'') \implies g(f(x')) \leq g(f(x'')),$$

cioè $g(f(x))$ è decrescente.

Se f è decrescente e g è crescente:

$$x', x'' \in A, \quad x' > x'' \implies f(x') \leq f(x'') \implies g(f(x')) \geq g(f(x'')),$$

cioè $g(f(x))$ è crescente. ■

Esercizio 3 Assegnate le applicazioni:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x-1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\longrightarrow y^2, \quad \forall y \in \mathbb{R} \end{aligned},$$

determinare (se è possibile) le applicazioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

Svolgimento.

Risulta banalmente:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R},$$

per cui:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &\longrightarrow g(f(x)), \quad \forall f(x) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Quindi la funzione composta:

$$g \circ f : x \in \mathbb{R} \rightarrow g(f(x)) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cioè:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = (x-1)^2 \tag{1.75}$$

Passiamo alla funzione composta $f \circ g$. A tale scopo osserviamo che:

$$B = \{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R},$$

per cui:

$$f \circ g : y \in \mathbb{R} \rightarrow f(g(y)) \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

avendosi:

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y^2)$$

A questo punto osserviamo che la variabile indipendente è una variabile muta, e come tale possiamo indicarla con un qualunque simbolo:

$$f(y^2) \equiv f(x^2) = x^2 - 1$$

Perciò

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 1, \tag{1.76}$$

che confrontata con la (1.75) porge:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Da tale esercizio vediamo che il prodotto di applicazioni **non è commutativo**.

1.1.10 Applicazione inversa. Equazioni

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione iniettiva:

$$y \in f(X) \implies \exists! x \in X \mid f(x) = y \tag{1.77}$$

In altri termini, a un generico $y \in f(X)$ possiamo associare univocamente un elemento $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Abbiamo, cioè, un'applicazione da $f(X)$ verso X :

$$g : y \in f(X) \rightarrow x \in X \mid f(x) = y, \quad \forall y \in f(X)$$

Chiamiamo g **funzione inversa** della f , e la denotiamo con il simbolo f^{-1} . È evidente che:

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= x, \quad \forall x \in X \\ (f \circ f^{-1})(y) &= y, \quad \forall y \in f(X) \end{aligned}$$

Cioè:

$$f^{-1} \circ f = I_X, \quad f \circ f^{-1} = I_{f(X)},$$

dove $I_X : x \in X \rightarrow x \in X$ e $I_Y : y \in f(X) \rightarrow y \in f(X)$, cioè le applicazioni identiche su X e $f(X)$ rispettivamente. Sussiste la seguente definizione:

Definizione 26 Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice **invertibile** se è dotata di inversa.

È chiaro che se f è invertibile, lo è anche l'inversa f^{-1} , avendosi:

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Focalizziamo la nostra attenzione al caso $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, cioè al caso in cui f è una funzione reale di una variabile reale. È facile convincersi che la monotonia in senso stretto è una condizione sufficiente per l'invertibilità di f . Inoltre, l'inversa di una funzione strettamente monotona conserva la monotonia. Cioè:

Proposizione 5 (**Conservazione della monotonia**)

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è strettamente crescente} \\ [decreciente] \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} f^{-1} \text{ è strettamente crescente} \\ [decreciente] \end{array} \right)$$

L'invertibilità di una funzione reale di una variabile reale ha un'immediata interpretazione geometrica. Assegnata una funzione invertibile f , comunque prendiamo $y_1 \in Y$, la retta orizzontale r_1 passante per il punto $(0, y_1)$ interseca in uno e un sol punto il grafico di f , come illustrato in fig. 1.23. In fig. 1.24 viene, invece, riportato il grafico di una funzione non invertibile.

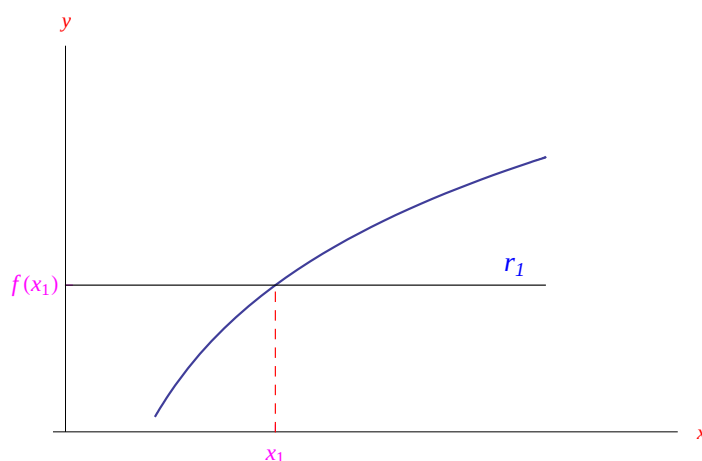


Figura 1.23: La retta $r_1 : y = y_1$ interseca in uno e un sol punto (di ascissa x_1) il grafico di una funzione invertibile.

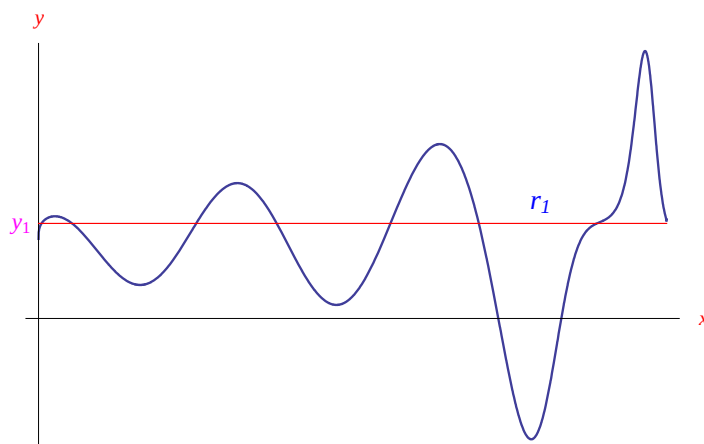


Figura 1.24: Grafico di una funzione non invertibile. La retta $r_1 : y = y_1$ interseca in due punti distinti il grafico di f .

Per quanto visto, f è invertibile se è iniettiva. Nel caso contrario, lo è localmente, cioè:

$$\exists X' \subset X \mid f_{X'} \text{ è invertibile,}$$

dove $f_{X'}$ è la **restrizione** di f ad X' . Diremo, quindi, che f è **localmente invertibile**, e chiamiamo $f_{X'}^{-1}$ l'**inversa locale** di f .

Il problema dello studio dell'invertibilità di una funzione reale di una variabile reale si riconduce a quello della risoluzione di un'equazione sul campo reale. Più in generale, per "equazione sul campo $\mathbb{K}$ ", intendiamo il problema:

Problema 1 (*Problema $\mathcal{P}$*)

Sia f un'applicazione da X verso Y , dove $X, Y \subseteq \mathbb{K}$. Assegnato $y \in \mathbb{K}$, stabilire (e determinare in caso affermativo) se

$$\exists x \in X \mid f(x) = y$$

I casi possibili sono:

1. $\exists x \in X \mid f(x) = y$
2. $\exists! x \in X \mid f(x) = y$
3. $\nexists x \in X \mid f(x) = y$

Nel caso 1 si dice che $\mathcal{P}$ è **compatibile** o, ciò che è lo stesso, l'equazione $f(x) = y$ è **compatibile**, e ogni $x \in X \mid f(x) = y$ è una **soluzione** di $\mathcal{P}$ (o, equivalentemente, dell'equazione).

Nel caso 2 si dice che $\mathcal{P}$ è **compatibile e determinato**, i.e. l'equazione è **compatibile e determinata**.

Nel caso 3 diremo che $\mathcal{P}$ è **incompatibile**, i.e. l'equazione è **incompatibile**.

Nel caso particolare in cui esistono infinite soluzioni, si dirà che $\mathcal{P}$ è **compatibile e indeterminato**, i.e. l'equazione è **compatibile e indeterminata**.

1.1.11 Operazioni razionali sulle funzioni reali

Sia

$$f : X \rightarrow Y \quad x \mapsto f(x), \quad \forall x \in X \quad (1.78)$$

una funzione reale.

Definizione 27 Dicesi **opposta** di f , la funzione:

$$-f : X \rightarrow Y \quad x \mapsto -f(x), \quad \forall x \in X \quad (1.79)$$

Ricordiamo che il grafico di f è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, y = f(x)\}$$

Conseguentemente, il grafico della funzione opposta è:

$$\Gamma_{-f} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, y = -f(x)\},$$

ed è manifestamente simmetrico di Γ_f rispetto all'asse x .

Definizione 28 Dicesi **reciproca** di f , la funzione:

$$\frac{1}{f} : X' \rightarrow Y, \quad (1.80)$$

$$x \mapsto \frac{1}{f(x)}, \quad \forall x \in X$$

essendo $X' = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Cioè, l'insieme di definizione X' della reciproca si ottiene da X privandolo degli zeri di f .

È immediato definire nella classe delle funzioni reali di una variabile reale, le operazioni di **somma**, **prodotto**, **rapporto** (o **quoziente**). Più specificatamente, assegnate le funzioni:

$$f_1 : X \rightarrow Y, \quad f_2 : X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto f_1(x), \quad \forall x \in X \quad x \mapsto f_2(x), \quad \forall x \in X$$

La somma è la funzione:

$$f_1 + f_2 : X_1 \cap X_2 \rightarrow Y, \quad (1.81)$$

$$x \mapsto f_1(x) + f_2(x), \quad \forall x \in X$$

da cui possiamo definire in modo ovvio la differenza, i.e la somma di f_1 con la funzione opposta di f_2 :

$$f_1 - f_2 : X_1 \cap X_2 \rightarrow Y, \quad (1.82)$$

$$x \mapsto f_1(x) - f_2(x), \quad \forall x \in X$$

Il prodotto:

$$f_1 f_2 : X_1 \cap X_2 \rightarrow Y, \quad (1.83)$$

$$x \mapsto f_1(x) \cdot f_2(x), \quad \forall x \in X$$

Il rapporto:

$$\frac{f_1}{f_2} : (X_1 \cap X_2)' \rightarrow Y, \quad (1.84)$$

$$x \mapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad \forall x \in X$$

essendo $(X_1 \cap X_2)' = \{x \in X_1 \cap X_2 \mid f_2(x) \neq 0\}$. Tali definizioni si estendono a un numero finito di funzioni, per ciò che riguarda la somma e il prodotto. Più precisamente, date n funzioni reali:

$$f_k : X \rightarrow Y, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.85)$$

$$x \mapsto f_k(x), \quad \forall x \in X$$

La somma delle n funzioni (1.85) è:

$$\sum_{k=1}^n f_k : \bigcap_{k=1}^n X_k \rightarrow Y, \quad (1.86)$$

$$x \mapsto \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad \forall x \in X$$

Il prodotto delle n funzioni (1.85) è:

$$\prod_{k=1}^n f_k : \bigcap_{k=1}^n X_k \rightarrow Y, \quad (1.87)$$

$$x \mapsto \prod_{k=1}^n f_k(x), \quad \forall x \in X$$

Se $f_k = f, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\prod_{k=1}^n f_k = f^n,$$

cioè la **potenza di f di esponente n** .

Abbiamo il caso particolare in cui uno degli addendi (o dei fattori) è la **funzione costante**, avendosi:

$$\begin{aligned} f + c : X \cap \mathbb{R} &= X \rightarrow Y \\ x &\rightarrow f(x) + c, \quad \forall x \in X \\ cf : X \cap \mathbb{R} &= X \rightarrow Y \\ x &\rightarrow f(x)c, \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

da cui segue la definizione:

Definizione 29 Dicesi **combinazione lineare** delle funzioni (1.85) di coefficienti c_k ($k = 1, 2, \dots, n$) la funzione:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k f_k : \bigcap_{k=1}^n X_k &\rightarrow Y \\ x &\rightarrow \sum_{k=1}^n c_k f_k(x), \quad \forall x \in X \end{aligned} \quad (1.88)$$

Ad una qualunque funzione reale f possiamo associare univocamente la coppia ordinata (f_+, f_-) , dove:

$$f_+ = \frac{f + |f|}{2}, \quad f_- = \frac{f - |f|}{2}$$

Prima di stabilire le proprietà delle funzioni $f_{\pm}$, osserviamo che

$$f = f_+ + f_-,$$

cioè f si decompone nella somma delle funzioni f_1 e f_2 . Poniamo:

$$\begin{aligned} X_+ &= \{x \in X \mid f(x) \geq 0\} \\ X_- &= \{x \in X \mid f(x) \leq 0\}, \end{aligned}$$

risultando $X = X_+ \cup X_-$. In particolare se f è non negativa, si ha $X_- = \emptyset$, e viceversa. Inoltre:

$$\begin{aligned} \forall x \in X_+, |f(x)| &= f(x) \implies f_+(x) = f(x), \quad f_-(x) = 0 \\ \forall x \in X_-, |f(x)| &= -f(x) \implies f_+(x) = 0, \quad f_-(x) = f(x), \end{aligned}$$

o ciò che è lo stesso:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in X_+ \\ 0, & \text{se } x \in X_- \end{cases}, \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{se } x \in X_- \\ 0, & \text{se } x \in X_+ \end{cases}$$

Ciò suggerisce di chiamare le funzioni $f_{\pm}$ rispettivamente la **parte non negativa** e la **parte non positiva** di f . La fig. 1.25 riassume graficamente le definizioni appena viste.

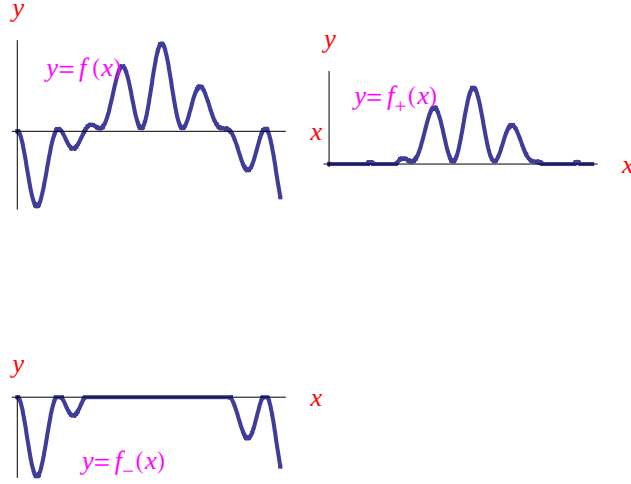


Figura 1.25: Grafici delle funzioni $f(x)$, $f_+(x)$, $f_-(x)$, per un'assegnata funzione $f(x)$.

1.1.12 Estremi di una funzione reale

Sia $f : X \rightarrow Y$ una qualunque funzione reale.

Definizione 30

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è limitata} \\ \text{superiormente} \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} \text{il codominio di } f \\ \text{è limitato superiormente} \end{array} \right)$$

Cioè se:

$$\exists k \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq k, \quad \forall x \in X$$

Evidentemente il numero reale k è un maggiorante dell'insieme numerico $f(X)$. Diremo, dunque, che k è un **maggiorante della funzione** f .

In maniera analoga:

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è limitata} \\ \text{inferiormente} \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} \text{il codominio di } f \\ \text{è limitato inferiormente} \end{array} \right)$$

Cioè se:

$$\exists h \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq h, \quad \forall x \in X$$

Evidentemente il numero reale h è un minorante dell'insieme numerico $f(X)$. Diremo, dunque, che h è un **minorante della funzione** f .

Le nozioni di estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme (note dal corso di Algebra) si applicano all'insieme numerico $f(X)$, per cui restano definiti l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione f che si indicano con i simboli:

$$\begin{aligned} \sup f & \text{ o } \sup_{x \in X} f(x) \\ \inf f & \text{ o } \inf_{x \in X} f(x) \end{aligned} \tag{1.89}$$

Supponiamo che sia verificata la seguente circostanza:

$$\exists \bar{x} \in X \mid f(\bar{x}) = \inf f$$

In tal caso diciamo che f è **dotata di minimo**; il punto $\bar{x} \in X$ si dice un **punto di minimo** per f , mentre $\inf f$ è il minimo di f e si indica con:

$$\min f, \quad \min_{x \in X} f$$

In modo simile si ha:

$$\exists \bar{x}' \in X \mid f(\bar{x}') = \sup f$$

diremo che f è **dotata di massimo**; il punto $\bar{x}' \in X$ si chiama un **punto di massimo** per f e $\sup f$ è il massimo di f e si indica con:

$$\max f, \quad \max_{x \in X} f$$

In fig. 1.26 il grafico di una funzione dotata di minimo e massimo.

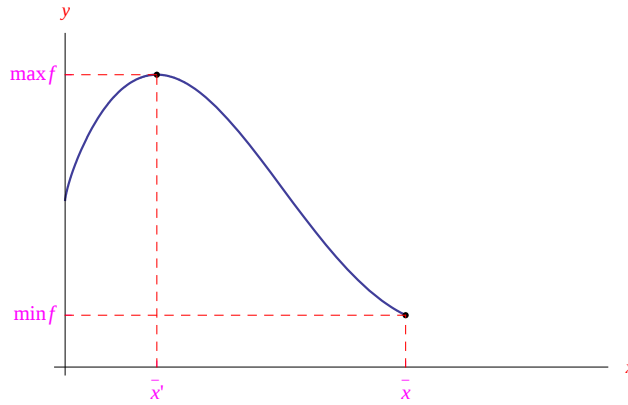


Figura 1.26: Grafici di una funzione dotata di minimo e massimo.

Dalla definizione 30 segue che non è limitata superiormente se e solo se il codominio di f non è limitato superiormente. Cioè:

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \exists x_k \in X \mid f(x_k) > k \quad (1.90)$$

La (1.90) si esprime concisamente con la notazione simbolica:

$$\sup f = +\infty$$

Similmente, la funzione f non è limitata inferiormente se:

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \exists x_h \in X \mid f(x_h) < h$$

e si pone:

$$\inf f = -\infty$$

Ricordiamo che $-\infty$ e $+\infty$ non sono numeri reali ma dei simboli che verificano la proprietà:

$$-\infty < x < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Inoltre l'insieme:

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

si chiama **insieme ampliato dei numeri reali**.

Per una nota proprietà [1]:

$$f \text{ è limitata} \iff |f| \text{ è limitata}$$

Cioè:

$$f \text{ è limitata} \iff \exists \alpha > 0 \mid f(x) \leq \alpha, \quad \forall x \in X$$

Definizione 31 Assegnata la funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, il numero reale non negativo:

$$\Omega(f, X) = \sup_X f - \inf_X f, \quad (1.91)$$

si dice **oscillazione della funzione** Nella (1.91) $\sup_X f$ e $\inf_X f$ denotano rispettivamente l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f in X . È facile mostrare che:

$$\Omega(f, X) = \sup_{x', x'' \in X} |f(x') - f(x'')|$$

Esempio 9 $f(x) \equiv c, \quad c \in \mathbb{R}$. L'oscillazione della funzione è:

$$\Omega(f, \mathbb{R}) = \sup_{\mathbb{R}} f - \inf_{\mathbb{R}} f$$

Ma $\sup_{\mathbb{R}} f = \inf_{\mathbb{R}} f = c$, onde $\Omega(f, \mathbb{R}) = 0$. Cioè, l'oscillazione di una funzione costante è nulla.

1.2 Le funzioni elementari

Di fondamentale importanza per le applicazioni sono le cosiddette **funzioni elementari**, quali particolare funzioni reali di una variabile reale. Più in generale, in Analisi si studiano funzioni dotate di espressione analitica. Con tale locuzione intendiamo il risultato dell'esecuzione di un numero finito di operazioni razionali (§ 1.1.11) sulle funzioni elementari. Risulta, quindi, più appropriata la locuzione **funzioni dotate di espressioni elementari**.

1.2.1 La funzione lineare

Assegnati $a, b \in \mathbb{R}$, dicesi **funzione lineare** la funzione reale:

$$f(x) = ax + b \quad (1.92)$$

La funzione lineare è definita in $X = \mathbb{R}$. Per $b = 0$ si chiama funzione lineare omogenea. Per $a = 0$ è $f(x) = b$, cioè la **funzione costante**. Per $a = 1, b = 0$ è $f(x) = x$, cioè la **funzione identica**. Quindi, la funzione costante e la funzione identica sono casi particolari della funzione lineare.

È facile convincersi che per $a \neq 0$ la funzione lineare è strettamente monotona. Più precisamente, è strettamente crescente per $a > 0$ e strettamente decrescente per $a < 0$. La

monotonia in senso stretto, implica l'invertibilità della funzione lineare. Per determinare l'inversa dobbiamo risolvere l'equazione algebrica nell'incognita x :

$$y = ax + b,$$

da cui segue l'unica soluzione:

$$x = \frac{1}{a}(y - b),$$

cosicchè la funzione inversa è:

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{a}(y - b) \quad (1.93)$$

che è definita in $Y = \mathbb{R}$. Ciò implica che il codominio di f è $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Si noti che la funzione inversa è a sua volta lineare. Il grafico della funzione lineare è il luogo geometrico $y = ax + b$, ovvero una retta di coefficiente angolare a e ordinata all'origine b .

1.2.2 La funzione potenza di esponente reale

Definizione 32 Assegnato $\lambda \in \mathbb{R}$, dicesi **funzione potenza di esponente reale**, la funzione reale:

$$f(x) = x^\lambda \quad (1.94)$$

Per determinare l'insieme di definizione della (1.94) consideriamo:

1. $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
2. $\lambda \in \mathbb{Q}$

dove $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali. Prima di discutere i suddetti casi, assumiamo $\lambda > 0$. Nel caso 1, λ è irrazionale per cui la potenza x^λ ha significato solo per $x \geq 0$. Quindi nel caso 1 l'insieme di definizione è $X = [0, +\infty)$.

Nel caso 2:

$$\lambda \in \mathbb{Q} \implies \exists (n, m) \in \mathbb{N}^2 - \{(0, m)\} \mid \lambda = \frac{m}{n},$$

con m, n primi tra loro. Pertanto:

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned} n \text{ pari} &\implies X = [0, +\infty) \\ n \text{ dispari} &\implies X = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Se $\lambda < 0$:

$$f(x) = x^{-|\lambda|} = \frac{1}{x^{|\lambda|}}, \quad (1.95)$$

Tale relazione ci dice che per ciò che riguarda la ricerca dell'insieme di definizione, il caso $\lambda < 0$ si riduce a quello con $\lambda > 0$ escludendo il punto $x = 0$. Quindi:

$$0 > \lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \implies X = (0, +\infty)$$

Per λ razionale e negativo:

$$f(x) = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}},$$

onde:

$$\begin{aligned} n \text{ pari} &\implies X = (0, +\infty) \\ n \text{ dispari} &\implies X = \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

Per $\lambda = 0$, la funzione si riduce alla funzione costante, giacchè:

$$f(x) = x^0 = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Passiamo ora allo studio della funzione. Escludendo il valore $\lambda = 0$, i casi interessanti sono:

A. $\lambda > 0$

B. $\lambda < 0$

Caso A: funzione potenza di esponente reale positivo

Per quanto precede, l'insieme di definizione è $[0, +\infty)$ se λ è irrazionale o razionale $\lambda = \frac{m}{n}$ con n pari; è $(-\infty, +\infty)$ se $\lambda = \frac{m}{n}$ con n dispari. In altri termini, comunque prendiamo $\lambda > 0$, l'intervallo $X' = [0, +\infty)$ è un sottoinsieme dell'insieme di definizione X . Risulta, allora, conveniente studiare la funzione in X' (ovvero la [restrizione](#) $f_{X'}$ di f a X'). Per λ irrazionale o razionale ($\lambda = \frac{m}{n}$) con n pari, lo studio risulta completo. Viceversa, per λ razionale con n dispari, occorre completare lo studio nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

Ciò premesso, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^\lambda > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty) \\ f(0) &= 0, \end{aligned}$$

cosicchè $\min f = 0$ e $x = 0$ è un punto di minimo. Per stabilire l'invertibilità locale della funzione dobbiamo studiare l'equazione algebrica:

$$y = x^\lambda \tag{1.96}$$

nell'intervallo X' . Per quanto visto è $x^\lambda \geq 0, \forall x \in X'$, onde assegnato $y \geq 0$, la [\(1.96\)](#) ammette l'unica soluzione:

$$x = y^{\frac{1}{\lambda}} \tag{1.97}$$

Viceversa, per $y < 0$, la [\(1.96\)](#) è priva di soluzioni. Ne consegue che il codominio di $f_{X'}$ è $[0, +\infty)$ e quindi l'[inversa locale](#)

$$f_{X'}^{-1}(y) = y^{\frac{1}{\lambda}} \tag{1.98}$$

è definita in $[0, +\infty)$.

Conclusione 1 *L'inversa locale della funzione potenza di esponente $\lambda > 0$ è la funzione potenza di esponente $\frac{1}{\lambda}$.*

Riguardo alla monotonia, la funzione potenza è strettamente crescente in $[0, +\infty)$. Ciò può essere visto se $\lambda \in \mathbb{N} - \{0\}$, ad esempio $\lambda = n$. In tal caso

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n,$$

cioè f è il risultato del prodotto di n fattori ciascuno dei quali è la funzione identica (che è strettamente crescente). Per $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ l'implicazione

$$x' > x'' \implies f(x') > f(x''), \quad x', x'' \in [0, +\infty)$$

è meno immediata, per cui ne omettiamo la dimostrazione.

Conclusione 2 Per $\lambda > 0$ la funzione $f(x) = x^\lambda$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

Nel caso particolare $\lambda = 1$ è $f(x) = x$, cioè la funzione potenza di esponente reale si riduce alla funzione identica. Inoltre, $f(1) = 1, \forall \lambda$. Più specificatamente, per $\lambda \neq 1$ il punto $(1, 1)$ è il punto di intersezione della curva $y = x^\lambda$ con la retta $y = x$:

$$\begin{cases} y = x^\lambda \\ y = x \end{cases} \iff x^\lambda = x$$

Le soluzioni di

$$x^\lambda = x \tag{1.99}$$

sono³ $x = 0$ e $x = 1$, per cui i luoghi geometrici si intersecano nei punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$, come illustrato in fig. 1.27.

Nel caso $\lambda = 1$ i suddetti luoghi sono coincidenti i.e. coincidono con $y = x$ (bisettrice del primo e terzo quadrante).

Il caso $\lambda \neq 1$ si scinde nei sottocasi:

I. $\lambda > 1$

II. $0 < \lambda < 1$ (si ricordi che stiamo considerando il caso $\lambda > 0$)

Caso I Per quanto visto, i luoghi geometrici $y = x^\lambda$ e $y = x$ hanno in comune (per $x \geq 0$) i punti $O(0, 0)$ e $A(1, 1)$. Inoltre, in $[0, +\infty)$ la funzione è non negativa, per cui il grafico di $f_{X'}$ attraversa la seguente regione del piano cartesiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, 0 \leq y < +\infty\} \\ &= [0, +\infty) \times [0, +\infty) \end{aligned}$$

Risulta $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$. dove:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, x < y < +\infty\} \\ \mathcal{R}_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, 0 \leq y < x\} \\ \mathcal{R}_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, y = x\} \end{aligned}$$

³Infatti, per $x = 0$ la (1.99) si riduce all'identità $0 = 0$. Per $x \neq 0$ possiamo dividere primo e secondo membro per x ottenendo:

$$\frac{x^\lambda}{x} = 1 \iff x^{\lambda-1} = 1,$$

da cui $x = 1$.

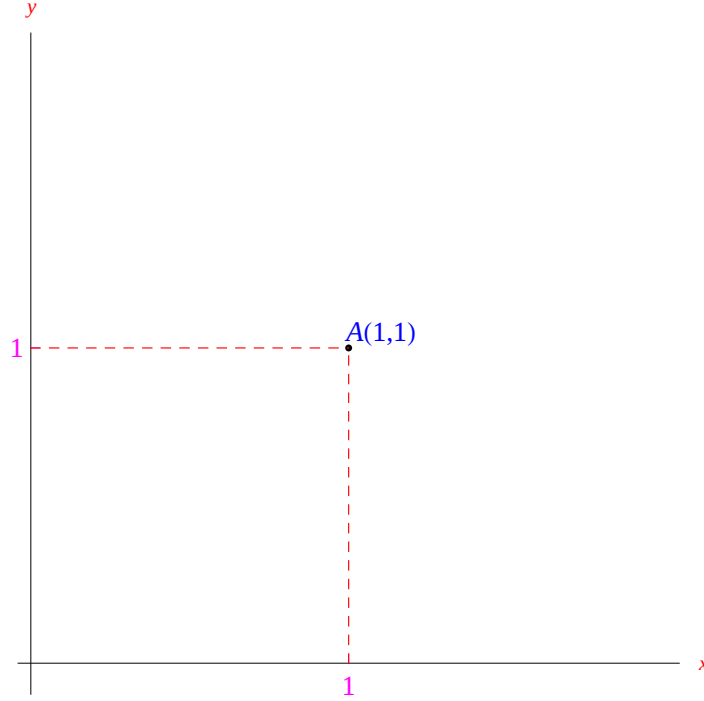


Figura 1.27: Per $\lambda \neq 1$ i luoghi geometrici $y = x^\lambda$ e $y = x$ si intersecano nell'origine delle coordinate e nel punto $A(1,1)$.

Cioè $\mathcal{R}_1$ è la regione situata al disopra della semibisettrice del primo e terzo quadrante; $\mathcal{R}_2$ è la regione situata al disopra dell'asse x e al disotto della suddetta semibisettrice (escludendo quest'ultima). Infine, $\mathcal{R}_3$ è la semibisettrice medesima. Determiniamo i punti $x > 0$ per i quali il luogo geometrico $y = x^\lambda$, ovvero il grafico della restrizione di $f(x) = x^\lambda$ all'intervallo $[0, +\infty)$, è contenuto in $\mathcal{R}_1$. Denotando il suddetto grafico con $\Gamma_{f_{X'}}$:

$$\Gamma_{f_{X'}} \subset \mathcal{R}_1 \iff x^\lambda > x \iff_{x>0} g(x) > 1,$$

dove $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^\alpha$ con $\alpha = \lambda - 1 > 0$. La funzione $g(x)$ è la funzione potenza di esponente $\alpha > 0$ e come tale, è strettamente crescente in $[0, +\infty)$. Inoltre è $g(1) = 1$, onde:

$$g(x) > 1, \quad \forall x > 1$$

Vale a dire:

$$x^\lambda > x, \quad \forall x > 1$$

Ne consegue che per $x > 1$ il grafico $\Gamma_{f_{X'}}$ è contenuto nella regione $\mathcal{R}_1$. Determiniamo ora i punti $x > 0$ per i quali è $\Gamma_{f_{X'}} \subset \mathcal{R}_2$. Deve essere:

$$\Gamma_{f_{X'}} \subset \mathcal{R}_2 \iff x^\lambda < x \iff g(x) < 1,$$

È $g(1) = 1$ e siccome $g(x)$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$ si ha $g(x) < 1, \quad \forall x \in [0, 1)$. per cui:

$$x^\lambda < x, \quad \forall x \in [0, 1)$$

Ciò implica che $\Gamma_{f_{X'}} \subset \mathcal{R}_2$ per $x \in [0, 1)$. In fig. 1.28 riportiamo il grafico $\Gamma_{f_{X'}}$.

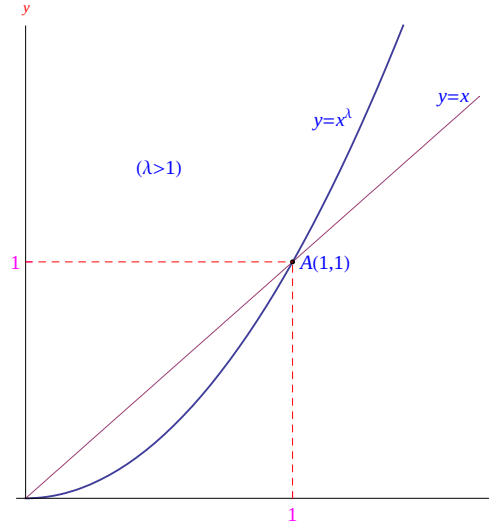


Figura 1.28: Andamento del grafico della restrizione della funzione $f(x) = x^\lambda$ all'intervallo $X' = [0, +\infty)$ nel caso $\lambda > 1$ (curva in grassetto).

Caso II Basta ripetere il procedimento precedente. Ricerchiamo, dunque, i punti $x > 0$ per i quali è $\Gamma_{f_{X'}} \subset \mathcal{R}_1$. Deve essere:

$$x^\lambda > x \iff_{x^\lambda > 0} 1 > x^{\lambda-1} \iff h(x) < 1,$$

dove $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^\beta$ con $\beta = 1 - \lambda > 0$. Ma $h(x)$, essendo una funzione potenza di esponente reale positivo, è strettamente crescente in $[0, +\infty)$ e si ha $h(1) = 1$, onde:

$$h(x) < 1, \quad \forall x \in [0, 1)$$

Cioè:

$$x^\lambda > x, \quad \forall x \in [0, 1)$$

Ne consegue che $\Gamma_{f_{X'}}$ è contenuto in $\mathcal{R}_1$ per $x < 1$. In maniera simile si mostra che $\Gamma_{f_{X'}}$ è contenuto in $\mathcal{R}_2$ per $x > 1$. In sintesi, abbiamo l'andamento riportato in fig. 1.29.

Se $\lambda \in \mathbb{Q} (\implies \lambda = \frac{m}{n})$ con n dispari, la funzione potenza è definita in $\mathbb{R}$, per cui dobbiamo estendere lo studio di funzione all'intervallo $(-\infty, 0)$. A tale scopo studiamo la parità della funzione. Evidentemente, se $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$:

$$f(-x) = (-x)^{\frac{m}{n}} = (-1)^{\frac{m}{n}} f(x) = \begin{cases} +f(x), & \text{se } m \text{ è pari} \\ -f(x) & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases}$$

Cioè $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ è pari per m pari, è dispari per m dispari. Ciò implica che il grafico Γ_f è simmetrico rispetto all'asse y per m pari. È, invece, simmetrico rispetto all'origine per m dispari. Esiste un'ulteriore classificazione indotta dai casi $m > n$ e $m < n$ rispettivamente. Nel primo caso ($m > n$) l'esponente è > 1 , per cui in $[0, +\infty)$ abbiamo un andamento del tipo di quello riportato in fig. 1.28. Conseguentemente, per m pari con $m > n$ abbiamo l'andamento riportato in fig. 1.30.

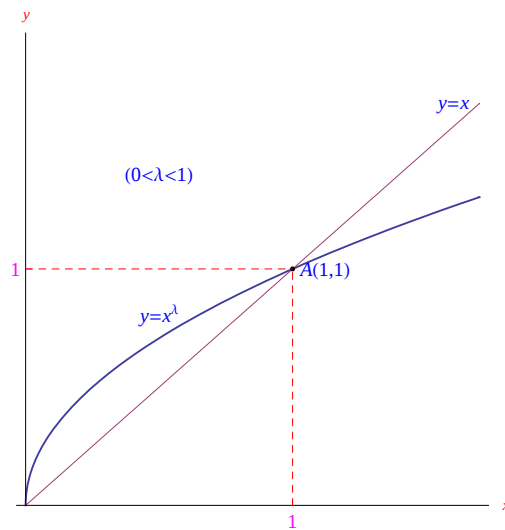


Figura 1.29: Andamento del grafico della restrizione della funzione $f(x) = x^\lambda$ all'intervallo $X' = [0, +\infty)$ nel caso $0 < \lambda < 1$ (curva in grassetto).

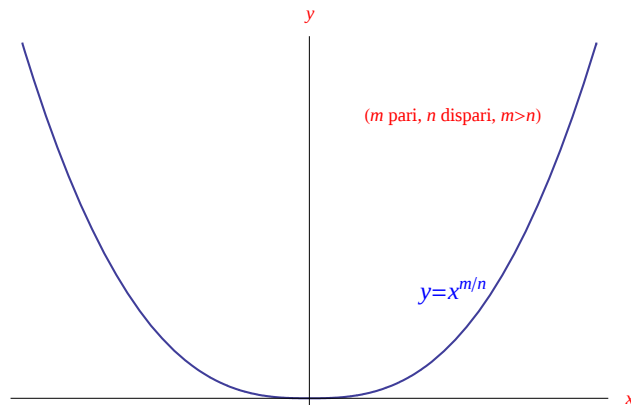


Figura 1.30: Andamento del grafico della funzione $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ con n dispari, m pari e $m > n$.

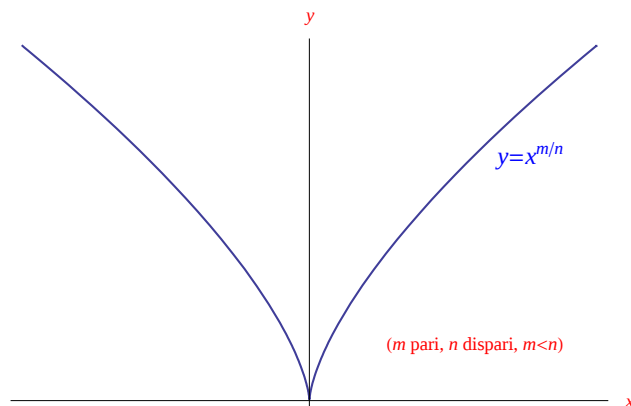


Figura 1.31: Andamento del grafico della della funzione $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ con n dispari, m pari e $m < n$.

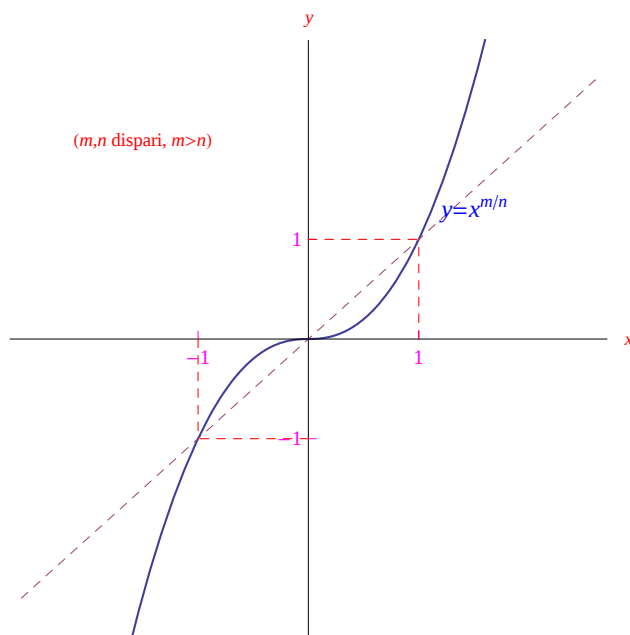


Figura 1.32: Andamento del grafico della funzione $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ con m, n dispari e $m > n$.

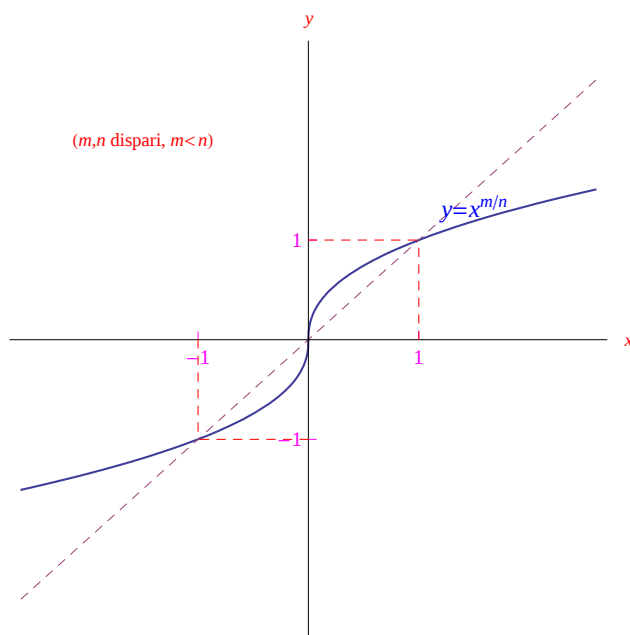


Figura 1.33: Andamento del grafico della funzione $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ con m, n dispari e $m < n$.

Per m pari con $m < n$ abbiamo l'andamento riportato in fig. 1.31.

Nelle figg. 1.32-1.33 riportiamo il caso m, n dispari con $m > n$ e $m < n$ rispettivamente.

Nel caso particolare $n = 1$ abbiamo la funzione potenza di esponente intero positivo $f(x) = x^m$.

Definizione 33 Dicesi **parabola di ordine m** il grafico della funzione potenza di esponente intero positivo, cioè il luogo geometrico di equazione:

$$y = x^m \quad (1.100)$$

I casi geometricamente significativi sono quelli con $m \geq 2$, poichè per $m = 0$ la parabola degenera nella retta $y = 1$ (per $x \in \mathbb{R} - \{0\}$) e per $m = 1$ degenera nella bisettrice $y = x$.

Essendo n dispari e $m > n$, gli unici andamenti possibili sono tutti e soli quelli riportati nelle figg. 1.34-1.35.

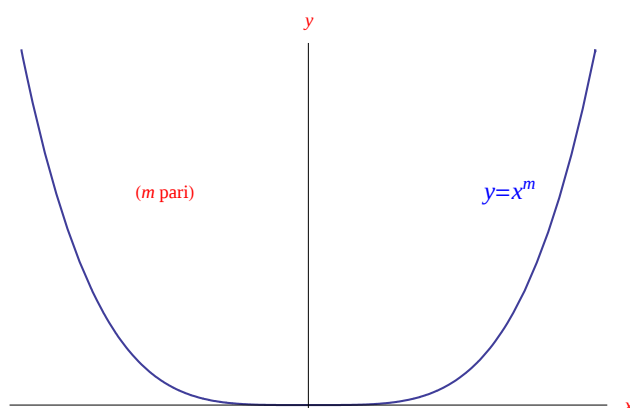


Figura 1.34: Parabola di ordine m (pari).

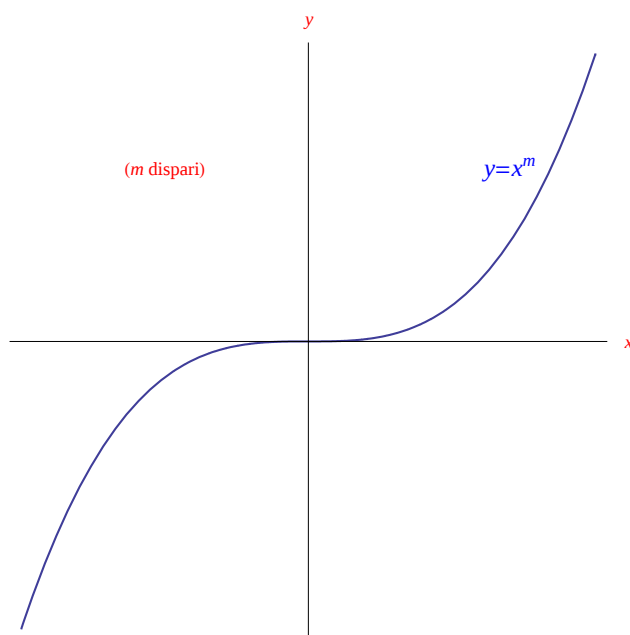


Figura 1.35: Parabola di ordine m (dispari).

Per $m = 2$ abbiamo la comune parabola, mentre per $m = 3$ la **parabola cubica**.

Osservazione 8 La denominazione “parabola” è utilizzata anche per $n = 3$. Più precisamente, se $m = 2$ il luogo geometrico $y = x^{2/3}$ è la **parabola di Neile**, riportata in fig. 1.36.

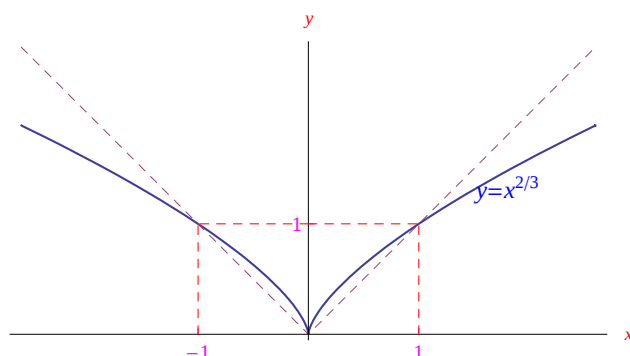


Figura 1.36: Parabola di Neile.

In fig. riassumiamo alcuni grafici significativi.

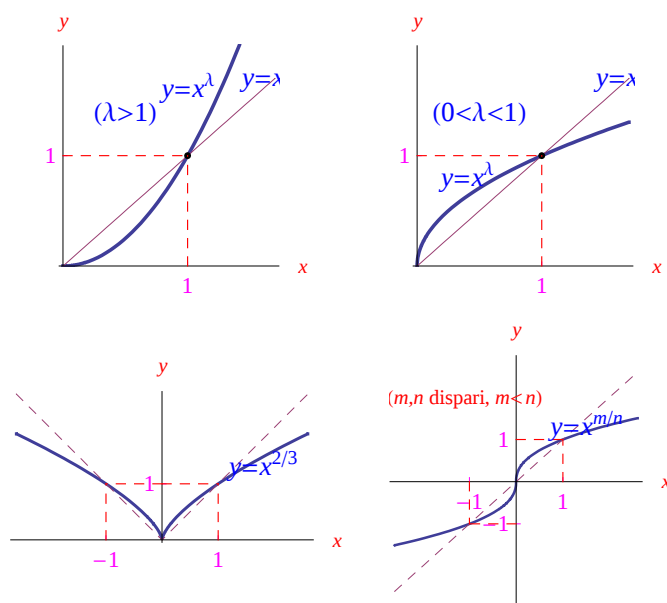


Figura 1.37: Alcuni casi particolari della funzione potenza di esponente reale positivo.

Caso B: funzione potenza di esponente reale negativo

Riscriviamo la (1.95):

$$f(x) = \frac{1}{x^{|\lambda|}} \quad (1.101)$$

Per quanto precede, l'insieme di definizione di f è $(0, +\infty)$ se λ è irrazionale o razionale ($\lambda = -\frac{m}{n}$) con n pari; è $\mathbb{R} - \{0\}$ se $\lambda = -\frac{m}{n}$ con n dispari. Dalla (1.101) vediamo che la funzione potenza di esponente reale negativo è la reciproca della funzione potenza di esponente reale positivo x^α , dove $\alpha = |\lambda|$.

Per $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ abbiamo l'andamento riportato in fig. 1.38.

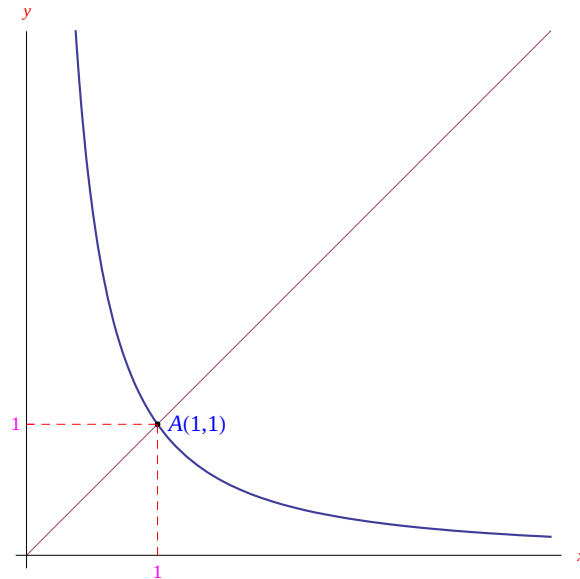


Figura 1.38: Grafico della funzione di esponente irrazionale negativo.

Per $\lambda \in \mathbb{Q}$, cioè $\lambda = -\frac{m}{n}$ con n dispari, dobbiamo distinguere i due casi: m pari, m dispari. Nel primo caso la funzione è pari e il suo grafico è riportato in fig. 1.39.

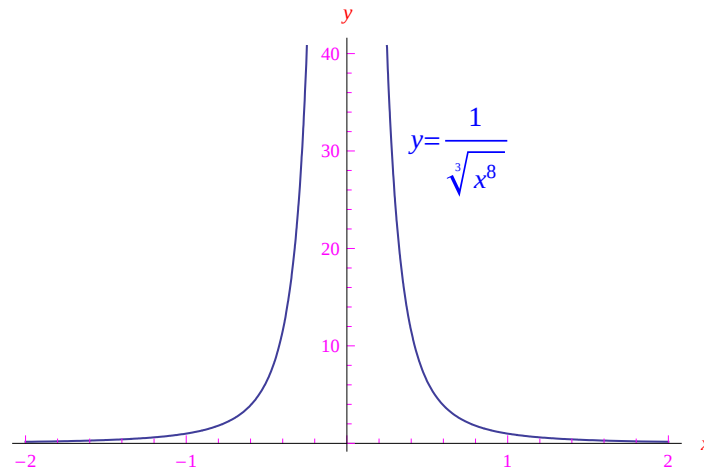


Figura 1.39: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ con n dispari e m pari.

Nel secondo caso, cioè m dispari, abbiamo l'andamento riportato in fig. 1.40.

Nel caso particolare $n = 1$ abbiamo la funzione potenza di esponente intero negativo $f(x) = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$.

Definizione 34 Dicesi *iperbole equilatera* il grafico della funzione potenza di esponente -1 , cioè il luogo geometrico di equazione:

$$y = \frac{1}{x}$$

riportato in fig. 1.41.

La fig. 1.42 riassume i casi esaminati.

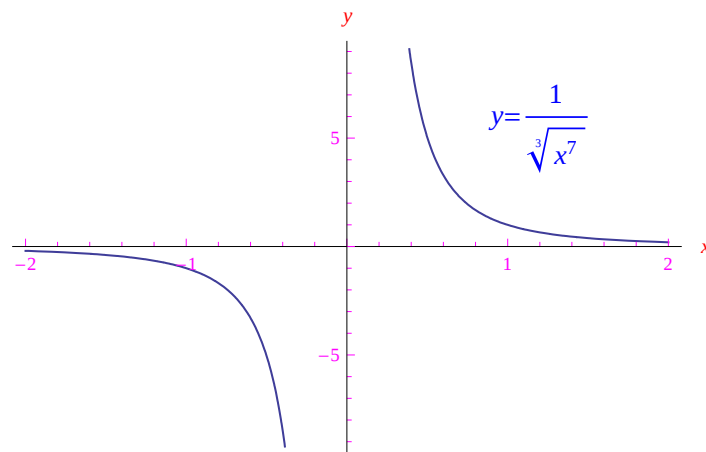


Figura 1.40: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ con n dispari e m dispari.

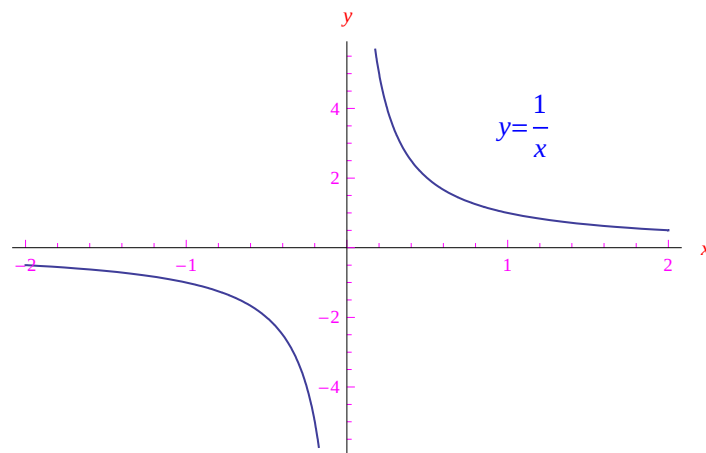


Figura 1.41: Iperbole equilatera

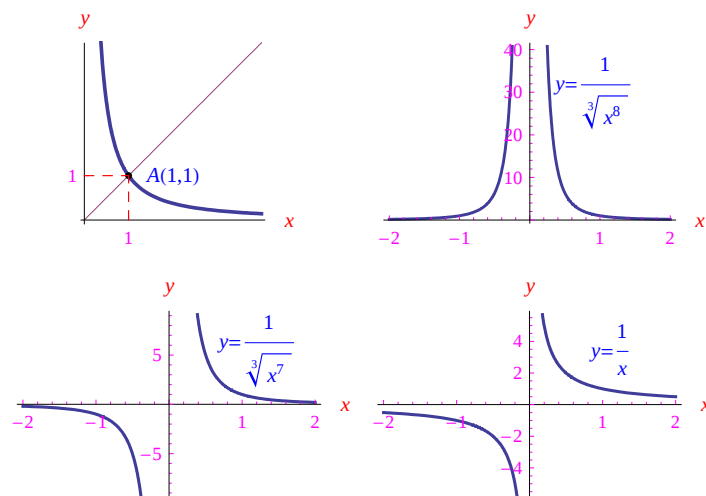


Figura 1.42: Alcuni grafici significativi

1.2.3 La funzione polinomio

Definizione 35 Assegnati $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, con $a_n \neq 0$, dicesi **funzione polinomio di grado n** e di **coefficienti** $a_0, a_1, \dots, a_n$ la funzione reale:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (1.102)$$

La funzione polinomio è manifestamente definita in $\mathbb{R}$. Dalla (1.102) vediamo che la funzione polinomio di grado 0 è la **funzione costante** $f(x) = a_0$. Per $n = 1$ si riduce, invece, è la **funzione lineare**:

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

Particolarmente interessante è il caso $n = 2$ (**funzione polinomio di secondo grado**). Ridefinendo i coefficienti a_2, a_1, a_0 in a, b, c rispettivamente:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{con } a \neq 0 \quad (1.103)$$

Procediamo, quindi, allo studio della funzione. Tenendo conto che $a \neq 0$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \\ &= a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

Ponendo:

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad (1.104)$$

si ha:

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad (1.105)$$

Separiamo i due casi:

1. $a > 0$
2. $a < 0$

Caso 1: $a > 0$

La (1.105) può essere scritta come:

$$f(x) = a \left[g(x) - \frac{\Delta}{4a^2} \right], \quad (1.106)$$

dove:

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2,$$

onde:

$$f(x) = ag(x) - \frac{\Delta}{4a} \quad (1.107)$$

Cioè, la funzione $f(x)$ differisce dalla funzione $ag(x)$ per il termine costante $-\frac{\Delta}{4a}$, e poichè $a > 0$ le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso comportamento per ciò che riguarda la monotonia. Precisamente:

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è crescente} \\ [\text{decrecente}] \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} g \text{ è crescente} \\ [\text{decrecente}] \end{array} \right)$$

La funzione $g(x)$ è una funzione composta. Esplicitiamo le componenti, scrivendo:

$$\begin{aligned} \phi : x \in \mathbb{R} &\rightarrow \phi(x) = x + \frac{b}{2a} \\ \psi : y \in \mathbb{R} &\rightarrow \psi(y) = y^2 \end{aligned}$$

Risulta:

$$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{\phi} \phi(x) \xrightarrow{\psi} \psi(\phi(x)) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Quindi la funzione composta:

$$\psi \circ \phi : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \psi(\phi(x)) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\psi(\phi(x)) = g(x) = \phi(x)^2$$

Risulta $\phi(x)$ strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e $\psi(y)$ strettamente crescente per $y \geq 0$, mentre è strettamente decrescente per $y \leq 0$. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} y = x + \frac{b}{2a} \geq 0 &\iff x \geq -\frac{b}{2a} \\ y \leq 0 &\iff x \leq -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Ciò implica, in virtù della proposizione 4, che $g(x) = \psi(\phi(x))$, è strettamente crescente per $x \in [-\frac{b}{2a}, +\infty)$ ed è strettamente decrescente per $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a}]$. La monotonia di $g(x)$ è schematicamente illustrata nella fig. 1.43, da cui si deduce che $\bar{x} = -\frac{b}{2a}$ è punto di minimo per f , risultando:

$$\min f = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} \quad (1.108)$$

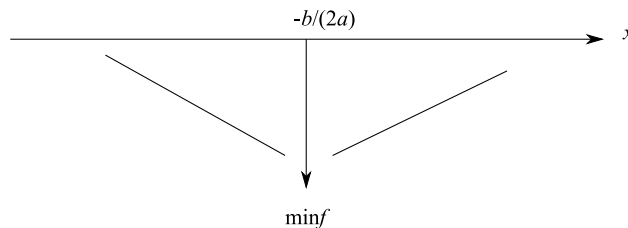


Figura 1.43: Monotonia della funzione $f(x)$.

Stiamo considerando il caso $a > 0$. per cui dalla (1.108):

$$\begin{aligned}\min f > 0 &\iff \Delta < 0 \\ \min f < 0 &\iff \Delta > 0 \\ \min f = 0 &\iff \Delta = 0\end{aligned}\tag{1.109}$$

Dalla prima delle (1.109) segue:

$$\Delta < 0 \implies f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\tag{1.110}$$

Dalla terza, invece:

$$\Delta = 0 \implies f(x) > 0, \forall x \neq -\frac{b}{2a}$$

Esaminiamo il caso $\Delta > 0$. Si ha $\min f < 0$ e per determinare gli zeri di $f(x)$ scomponiamo in fattori la (1.105):

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right),$$

onde:

$$f(x) = 0 \iff x = \alpha_{1,2},$$

dove

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \alpha_2 &= -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} > \alpha_1\end{aligned}\tag{1.111}$$

Ne consegue che per $\Delta > 0$. la funzione polinomio di secondo grado ha due zeri dati dalle (1.111). Inoltre $f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$; ciò implica:

$$f(x) > 0 \iff (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) > 0$$

Si tratta, dunque, di studiare il segno del prodotto $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$. Dal diagramma riportato in fig. 1.44, segue:

$$\begin{aligned}f(x) > 0 &\iff x \in (-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, +\infty) \\ f(x) < 0 &\iff x \in (\alpha_1, \alpha_2)\end{aligned}$$

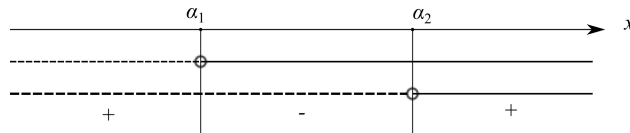


Figura 1.44: Studio del segno del prodotto $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$.

Da tale analisi segue che per $\Delta > 0$ l'equazione algebrica di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0,\tag{1.112}$$

ammette due radici reali e distinte date dalle (1.111) che possono essere incorporate in un'unica formula:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (1.113)$$

dove abbiamo tenuto conto della (1.104) che esprime la grandezza Δ , denominata **discriminante** dell'equazione (1.112).

Passiamo al caso $\Delta < 0$. Dalla (1.110) segue $\nexists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0$; cioè per $\Delta < 0$ la funzione polinomio di secondo grado è priva di zeri o, ciò che è lo stesso l'equazione (1.112) non ha radici nel campo reale.

Infine, se $\Delta = 0$ la funzione polinomio ha un solo zero coincidente con il punto di minimo $\bar{x} = -\frac{b}{2a}$ o, ciò che è lo stesso, l'equazione (1.112) ha una sola radice.

Tali risultati si interpretano geometricamente. Infatti, dalla geometria sappiamo che il grafico di $f(x)$, cioè il luogo geometrico $y = ax^2 + bx + c$ è una **parabola quadratica**.

In fig. 1.45 riportiamo il caso $\Delta < 0$ (abbiamo denotato il punto di minimo con $x_{\min}$), dove vediamo che la parabola non interseca l'asse x , per cui è $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

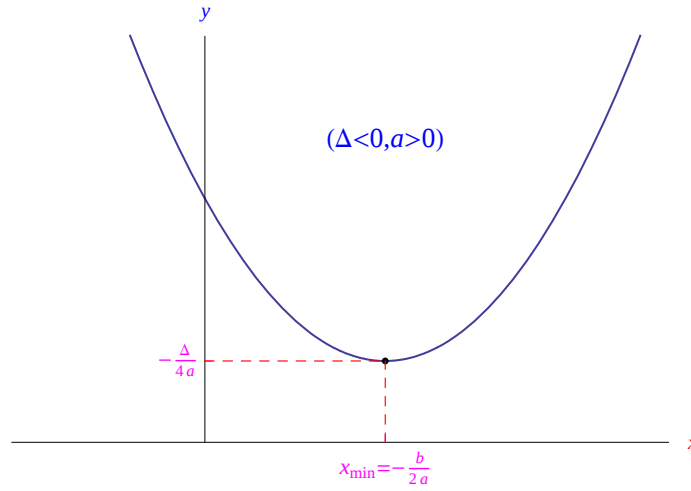


Figura 1.45: Caso $(a > 0, \Delta < 0)$.

In fig. 1.46 riportiamo il caso $\Delta = 0$ dove vediamo che la parabola interseca l'asse x nel punto di ascissa $x_{\min}$, per cui è $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \neq x_{\min}$.

Infine, in fig. 1.47 riportiamo il caso $\Delta > 0$ dove vediamo che la parabola interseca l'asse x nei punti di ascissa $\alpha_{1,2}$ radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

Caso 2: $a < 0$

La (1.107) si scrive:

$$f(x) = -|a|g(x) - \frac{\Delta}{4a}, \quad (1.114)$$

da cui:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ è crescente} \\ \text{[decescente]} \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} g \text{ è decrescente} \\ \text{[crescente]} \end{array} \right)$$

Abbiamo visto che $g(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ è strettamente crescente in $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$. Ne consegue la decrescenza in senso stretto di f in $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ e la crescita in senso stretto in $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$.

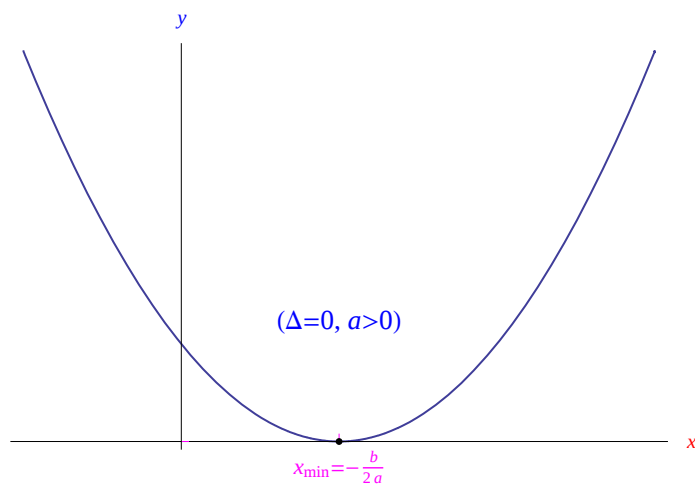


Figura 1.46: Caso $(a > 0, \Delta = 0)$.

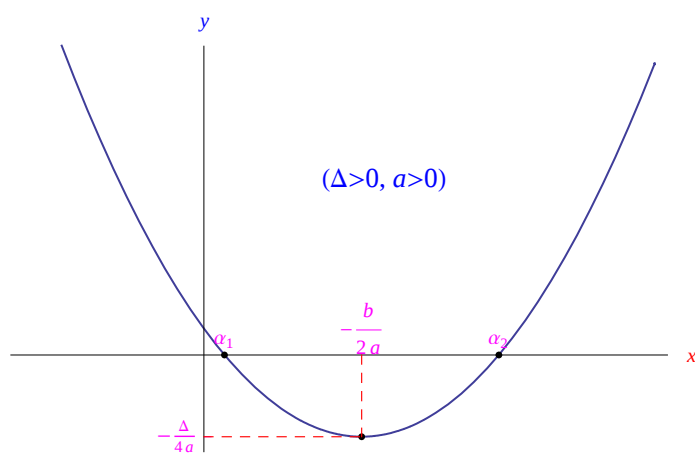


Figura 1.47: Caso $(a > 0, \Delta > 0)$.

Dalla monotonia di f deduciamo che $-\frac{b}{2a}$ è punto di massimo per f :

$$\max f = -\frac{\Delta}{4a} \quad (1.115)$$

Per quanto riguarda gli zeri di f (e quindi le radici di $ax^2 + bx + c = 0$), nel caso $\Delta > 0$ ritroviamo la (1.113). Per $\Delta < 0$, dalla (1.115):

$$\Delta < 0 \implies \max f < 0 \implies \nexists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0$$

Quindi anche nel caso $a < 0$ se $\Delta < 0$, l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ è priva di radici nel campo reale. Infine, nel caso $\Delta = 0$ l'unico zero è il punto di massimo $x_{\max} = -\frac{b}{2a}$.

In fig. 1.48 riportiamo il caso $\Delta < 0$, dove vediamo che la parabola non interseca l'asse x , per cui è $ax^2 + bx + c < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

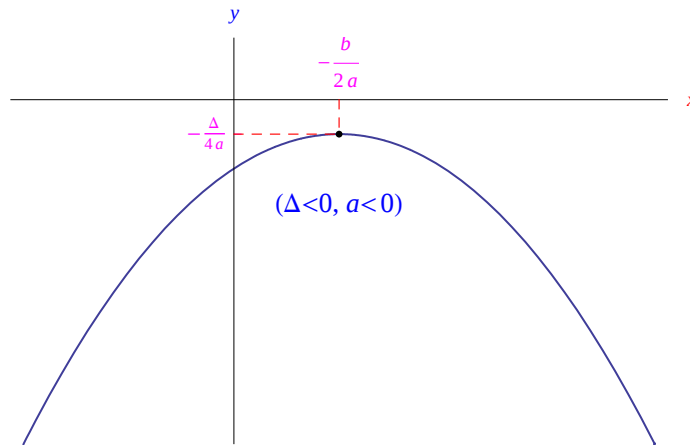


Figura 1.48: Caso $(a < 0, \Delta < 0)$.

In fig. 1.49 riportiamo il caso $\Delta = 0$ dove vediamo che la parabola interseca l'asse x nel punto di ascissa $x_{\max}$, per cui è $ax^2 + bx + c < 0$, $\forall x \neq x_{\max}$.

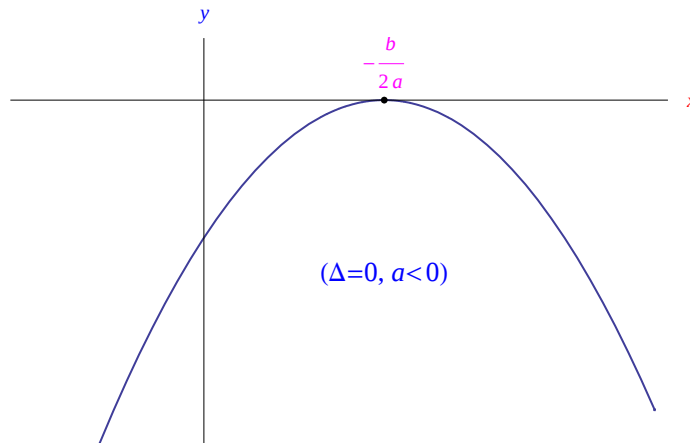


Figura 1.49: Caso $(a < 0, \Delta = 0)$.

Infine, in fig. 1.50 riportiamo il caso $\Delta > 0$ dove vediamo che la parabola interseca l'asse x nei punti di ascissa $\alpha_{1,2}$ radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

La fig. 1.51 riassume alcuni casi esaminati.

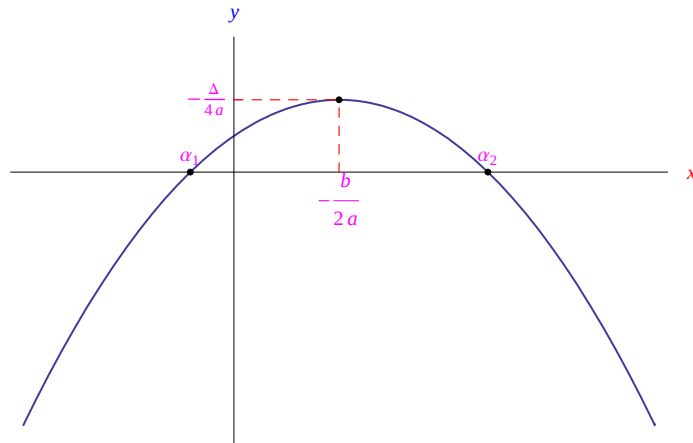


Figura 1.50: Caso $(a < 0, \Delta > 0)$.

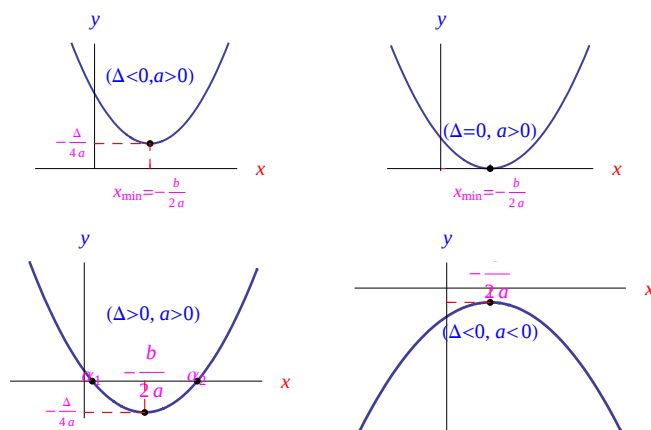


Figura 1.51: Alcuni andamenti del grafico di $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1.2.4 La funzione esponenziale

Definizione 36 Assegnato $a \in (0, +\infty) - \{1\}$, dicesi **funzione esponenziale di base a** , la funzione reale:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto a^x, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.116)$$

La richiesta $a \neq 1$ si giustifica osservando che per $a = 1$ è $f(x) = 1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Cioè, la funzione esponenziale di base 1 è la **funzione costante** $f(x) = 1$.

Per lo studio della monotonia della funzione esponenziale, prendiamo ad arbitrio $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e tali che $\lambda > \mu$, per cui possiamo considerare la funzione potenza di esponente reale positivo:

$$g(x) = x^{\lambda-\mu} \quad (1.117)$$

Per quanto visto nel paragrafo 1.2.2, la (1.117) è strettamente crescente in $[0, +\infty)$. Nelle figg. 1.52-1.53 riportiamo i casi $\lambda - \mu > 1$ e $0 < \lambda - \mu < 1$.

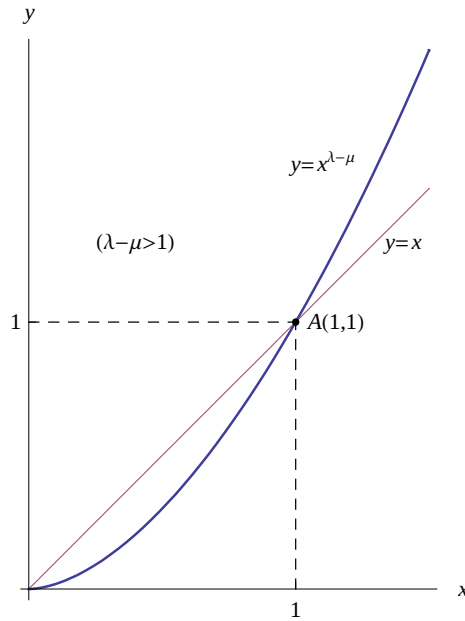


Figura 1.52: Grafico di $g(x) = x^{\lambda-\mu}$ con $\lambda - \mu > 1$.

Caso 1: $a > 1$

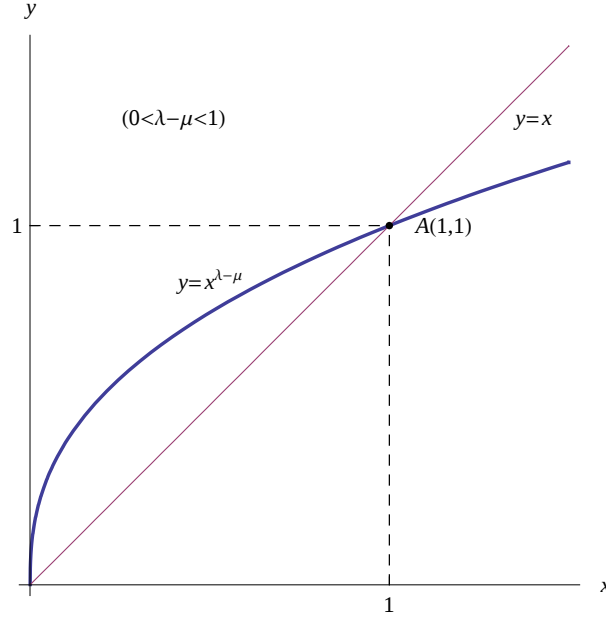
Dalla monotonia di $g(x)$ segue:

$$g(a) > g(1) = 1 \implies a^{\lambda-\mu} > 1 \implies \frac{a^\lambda}{a^\mu} > 1 \implies a^\lambda > a^\mu$$

Cioè:

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid \lambda > \mu \implies a^\lambda > a^\mu$$

Ne consegue che $f(x) = a^x$ è strettamente crescente.


 Figura 1.53: Grafico di $g(x) = x^{\lambda-\mu}$ con $0 < \lambda - \mu < 1$.

Caso 2: $0 < a < 1$

Dalla monotonia di $g(x)$ segue:

$$g(a) < g(1) = 1 \implies a^{\lambda-\mu} < 1 \implies \frac{a^\lambda}{a^\mu} < 1 \implies a^\lambda < a^\mu$$

Cioè:

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid \lambda > \mu \implies a^\lambda < a^\mu$$

Ne consegue che $f(x) = a^x$ è strettamente decrescente.

Proposizione 6 Il codominio della funzione esponenziale di base a è $(0, +\infty)$

Dimostrazione. Si tratta di provare l'implicazione:

$$y \in (0, +\infty) \implies \exists! x \in \mathbb{R} \mid a^x = y \quad (1.118)$$

Per tale dimostrazione rimandiamo a [1]. ■

Nelle figg. 1.54-1.55 riportiamo l'andamento del grafico della funzione esponenziale di base a nei due casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Un caso particolare che si presenta spesso nelle applicazioni è $a = e$, dove e è il **numero di Nepero**, detto comunemente *numero e*. Si tratta di un numero irrazionale:

$$e = 2.71828182845\dots$$

La funzione esponenziale di base e si chiama semplicemente **funzione esponenziale**, spesso indicata con $\exp(x)$. Essendo $e > 1$, il suo grafico ha un andamento del tipo di quello riportato in fig. 1.54, mentre la fig. 1.56 riassume i due casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.

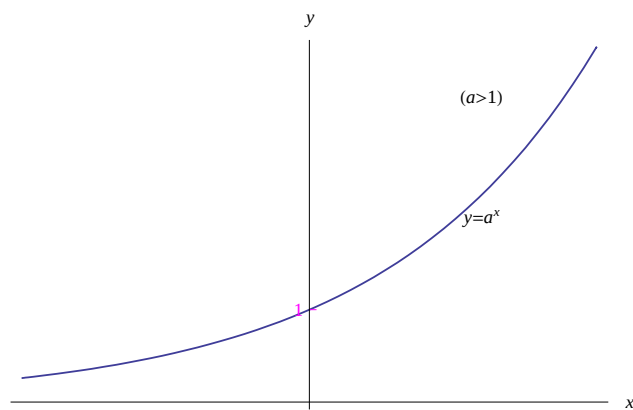


Figura 1.54: Grafico di $f(x) = a^x$ per un assegnato $a > 1$.

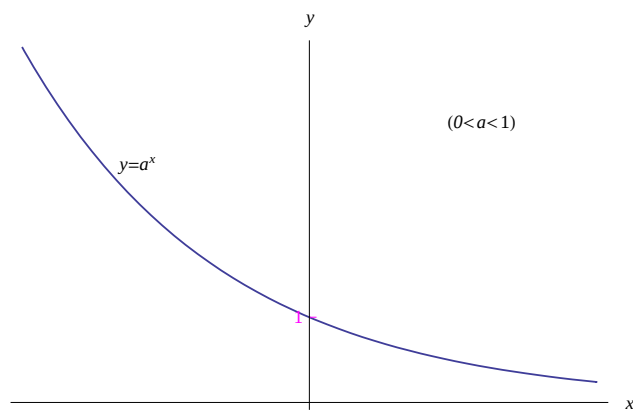


Figura 1.55: Grafico di $f(x) = a^x$ per un assegnato $0 < a < 1$.

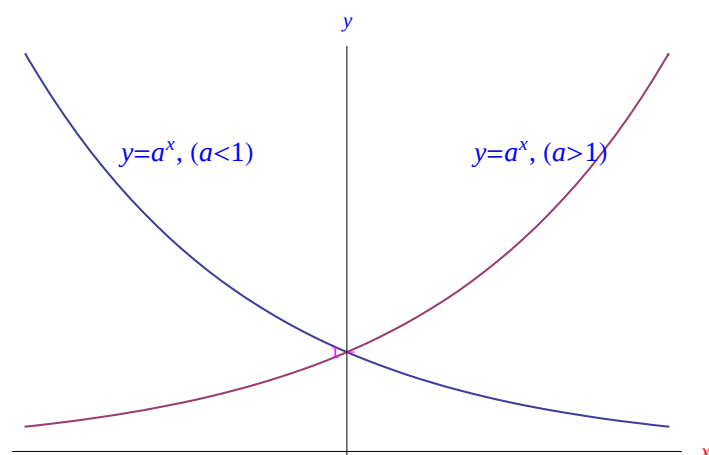


Figura 1.56: Funzione esponenziale.

1.2.5 La funzione logaritmo

Dalla (1.118) segue che per $y > 0$ l'equazione

$$a^x = y \quad (1.119)$$

è compatibile e determinata, i.e. ammette una ed una sola soluzione.

Definizione 37 Per $y > 0$ l'unica soluzione della (1.119) dicesi **logaritmo di y in base a** , e si indica con il simbolo:

$$\log_a y$$

Cioè:

$$a^{\log_a y} = y, \quad \forall y \in (0, +\infty) \quad (1.120)$$

Risolvere l'equazione (1.119) equivale a determinare la **funzione inversa** di $f(x) = a^x$. Per quanto visto nel paragrafo precedente, $f(x) = a^x$ è strettamente monotona, per cui è invertibile:

$$a^x = y \implies x = f^{-1}(y), \quad (1.121)$$

onde:

$$f^{-1}(y) = \log_a y, \quad \forall y \in (0, +\infty) \quad (1.122)$$

Per la conservazione della monotonia (Proposizione 5) si ha che per $a > 1$ la funzione (1.122) è strettamente crescente. Per $0 < a < 1$ è strettamente decrescente. In entrambi i casi il codominio è $\mathbb{R}$.

Studiamo il segno della (1.122). Iniziamo con l'osservare che $f^{-1}(1) = 0$. Infatti dalla (1.120):

$$a^{\log_a 1} = 1 \iff \log_a 1 = 0$$

Inoltre:

$$a^{\log_a a} = a \iff \log_a a = 1,$$

cioè $f^{-1}(a) = 1$.

Caso 1: $a > 1$

$f^{-1}(y)$ è strettamente crescente:

$$\begin{aligned} \forall y > 1, \quad f^{-1}(y) &> f^{-1}(1) = 0 \\ \forall y \in (0, 1), \quad f^{-1}(y) &< f^{-1}(1) = 0 \end{aligned}$$

Ne consegue che f^{-1} è positiva in $(1, +\infty)$ e negativa in $(0, 1)$.

Caso 2: $0 < a < 1$

$f^{-1}(y)$ è strettamente decrescente:

$$\begin{aligned} \forall y > 1, \quad f^{-1}(y) &< f^{-1}(1) = 0 \\ \forall y \in (0, 1), \quad f^{-1}(y) &> f^{-1}(1) = 0 \end{aligned}$$

Ne consegue che f^{-1} è positiva in $(0, 1)$ e negativa in $(1, +\infty)$.

Ritornando al caso generale, per quanto visto si ha:

$$f^{-1}(1) = 0, \quad f^{-1}(a) = 1$$

E per definizione di funzione inversa:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi:

$$\log_a a^x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.123)$$

È chiaro che:

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in (0, +\infty)$$

Cioè:

$$a^{\log_a y} = y, \quad \forall y \in (0, +\infty) \quad (1.124)$$

Ridefinendo la variabile y in x e f^{-1} con f , otteniamo la **funzione logaritmo di base a** :

$$f(x) = \log_a x, \quad (1.125)$$

definita in $X = (0, +\infty)$. Nelle figg. 1.57-1.58 riportiamo l'andamento del grafico della funzione logaritmo di base a nei due casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.

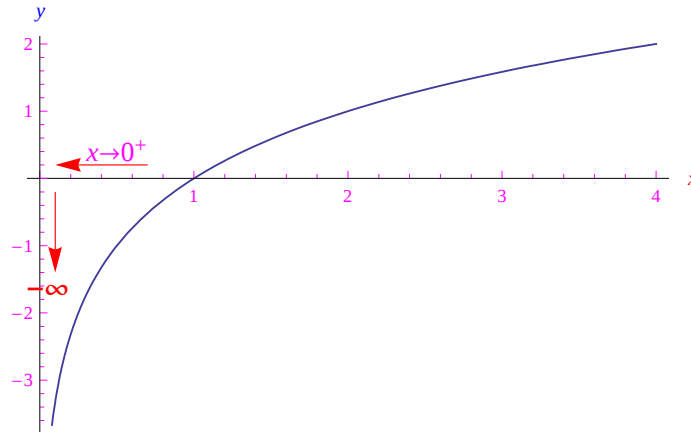


Figura 1.57: Grafico di $f(x) = \log_a x$ per un assegnato $a > 1$. **N.B.** Non considerare il simbolo $-\infty$, in quanto verrà trattato più avanti.

Proposizione 7 Dati $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} \log_a (x_1 x_2) &= \log_a x_1 + \log_a x_2 \\ \log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) &= \log_a x_1 - \log_a x_2 \end{aligned} \quad (1.126)$$

Cioè, il logaritmo del prodotto di due numeri reali positivi è pari alla somma dei logaritmi dei numeri assegnati, mentre il logaritmo del rapporto è pari alla differenza dei logaritmi dei numeri assegnati.

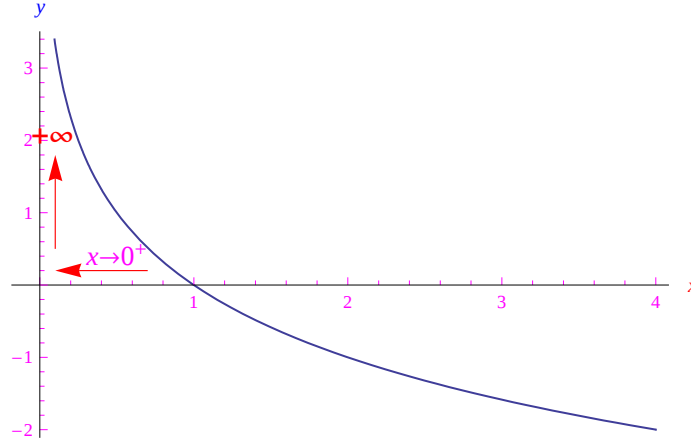


Figura 1.58: Grafico di $f(x) = \log_a x$ per un assegnato $0 < a < 1$. **N.B.** Non considerare il simbolo $+\infty$, in quanto verrà trattato più avanti.

Dimostrazione. Dalla (1.124):

$$x_1 = a^{\log_a x_1}, \quad x_2 = a^{\log_a x_2}$$

da cui:

$$x_1 x_2 = a^{\log_a x_1} \cdot a^{\log_a x_2} = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2}$$

Per la (1.124) (con $y = x_1 x_2$):

$$x_1 x_2 = a^{\log_a (x_1 x_2)},$$

che sostituita nella precedente:

$$a^{\log_a (x_1 x_2)} = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2},$$

da cui la prima delle (1.126). Dimostriamo la seconda delle (1.126).

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a^{\log_a x_1}}{a^{\log_a x_2}} = a^{\log_a x_1 - \log_a x_2}$$

Per la (1.124):

$$\frac{x_1}{x_2} = a^{\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right)},$$

che sostituita nella precedente:

$$a^{\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right)} = a^{\log_a x_1 - \log_a x_2},$$

da cui la seconda delle (1.126). ■

Proposizione 8

$$\log_a \left(\frac{1}{x} \right) = -\log_a x, \quad \forall x \in (0, +\infty) \quad (1.127)$$

Dimostrazione. Dalla seconda delle (1.126) per $x_1 = 1$, $x_2 = x$ si ha:

$$\log_a \left(\frac{1}{x} \right) = \underbrace{\log_a 1}_{=0} - \log_a x = \log_a x$$

■

Proposizione 9 *Assegnato $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\log_a x^\lambda = \lambda \log_a x, \quad \forall x \in (0, +\infty) \quad (1.128)$$

Dimostrazione. Scriviamo la (1.124) con $y = x$:

$$x = a^{\log_a x}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Elevando alla potenza λ primo e secondo membro:

$$x^\lambda = (a^{\log_a x})^\lambda = a^{\lambda \log_a x}$$

Passando ai logaritmi:

$$\log_a x^\lambda = \log_a (a^{\lambda \log_a x})$$

Per la (1.123) $\log_a (a^{\lambda \log_a x}) = \lambda \log_a x$, che sostituita nella precedente ci dà la (1.128). ■

Proposizione 10 (*Cambiamento di base*)

Assegnato $b > 0$, $b \neq 1$:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \forall x \in (0, +\infty) \quad (1.129)$$

Dimostrazione. Prendendo il logaritmo in base b di primo e secondo membro della (1.123):

$$\log_b (a^{\log_a x}) = \log_b x$$

Per la (1.128) con $\lambda = \log_a x$ si ha: $\log_b (a^{\log_a x}) = (\log_a x)(\log_b a)$ che sostituita nella precedente:

$$(\log_a x)(\log_b a) = \log_b x,$$

da cui la 1.129. ■

Dalla (1.129) per $x = b$:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Se $b = a^{-1}$:

$$\log_a x = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a}, \quad \forall x \in (0, +\infty) \quad (1.130)$$

Dalla (1.127):

$$\log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{x} \right) = -\log_{\frac{1}{a}} x,$$

che per $x = a$ porge:

$$\log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a} \right) = -\log_{\frac{1}{a}} a,$$

Ma $\log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a} \right) = 1$, onde:

$$\log_{\frac{1}{a}} a = -1,$$

che sostituita nella (1.130):

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

1.2.6 La funzione parte intera

Scriviamo la rappresentazione decimale di un numero reale a preso ad arbitrio. Cioè, quale che sia $a \in \mathbb{R}$:

$$a = \pm m, c_1 c_2 \dots$$

dove $m \in \mathbb{N}$, $c_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ per $k = 1, 2, \dots$. L'intero relativo $\pm m$ è la parte intera di a e si denota con $[a]$.

Definizione 38 La funzione **parte intera di** x è:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \rightarrow [x] \quad (1.131)$$

per cui $f(x) = [x]$.

Se $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si ha:

$$\begin{aligned} x \in [n-1, n) &\implies [x] = n-1 \\ x \in (-n, -n+1] &\implies [x] = -n+1 \end{aligned}$$

Cioè la funzione è costante in ogni intervallo $[n-1, n)$, $(-n, -n+1]$. Esplicitiamo alcuni valori di n :

$$\begin{aligned} n=1 &\implies \begin{cases} x \in [0, 1) \implies [x] = 0 \\ x \in (-1, 0] \implies [x] = -1 \end{cases} \\ n=2 &\implies \begin{cases} x \in [1, 2) \implies [x] = 1 \\ x \in (-2, -1] \implies [x] = -2 \end{cases} \\ n=3 &\implies \begin{cases} x \in [2, 3) \implies [x] = 2 \\ x \in (-3, -2] \implies [x] = -3 \end{cases} \\ &\dots, \end{aligned}$$

da cui segue che il grafico Γ è l'unione di un numero infinito di segmenti. Precisamente il segmento aperto $(-1, 1)$, infiniti segmenti orizzontali semiaperti a destra e infiniti segmenti orizzontali semiaperti a sinistra. In simboli:

$$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$$

dove

$$\Gamma_+ = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [n-1, n) \times \{n-1\}, \quad \Gamma_- = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (-n, -n+1] \times \{-n+1\}$$

Il grafico riportato in fig. 1.59.

1.2.7 Le funzioni circolari

Prima di eseguire lo studio delle cosiddette funzioni circolari, premettiamo un ripasso delle nozioni fondamentali di trigonometria piana. Siano r e s due rette orientate complanari e formanti un angolo acuto (fig. 1.60).

Detto Ω il punto di intersezione, denotiamo con x la misura in radianti dell'angolo acuto in Ω , onde $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Comunque prendiamo $P, Q \in s - \{\Omega\}$ con $P \neq Q$, restano univocamente

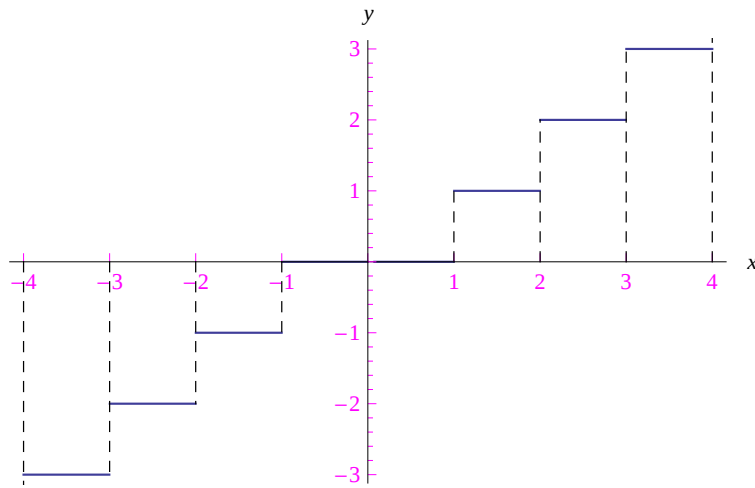


Figura 1.59: Grafico della funzione *parte intera di x* . Il codominio è $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$.

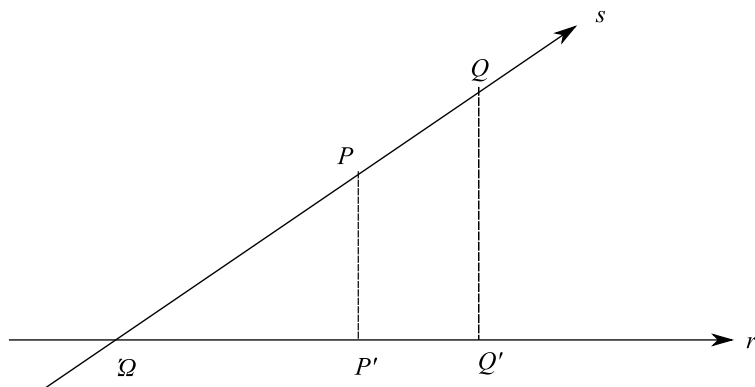


Figura 1.60: Le rette r e s si intersecano nel punto Ω formando un angolo acuto.

definite le proiezioni ortogonali P', Q' su r . I triangoli $\Omega PP'$ e $\Omega QQ'$ sono simili, pertanto scriviamo $\Omega PP' \sim \Omega QQ'$:

$$\Omega PP' \sim \Omega QQ' \implies \frac{\overline{PP'}}{\overline{\Omega P}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q}}, \quad \frac{\overline{\Omega P'}}{\overline{\Omega P}} = \frac{\overline{\Omega Q'}}{\overline{\Omega Q}} \quad (1.132)$$

Assegnato il punto $P \in s - \{\Omega\}$, al variare di Q su $s - \{\Omega\}$, restano definiti ∞^1 triangoli rettangoli $\Omega QQ'$ aventi un vertice in Ω e l'ipotenusa su s , la cui lunghezza è $\overline{\Omega Q}$. Tali triangoli compongono l'insieme:

$$\Delta = \{\Omega QQ' \mid Q \in s - \{\Omega\}\} \neq \emptyset,$$

In tal modo, le (1.132) si riscrivono:

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{\Omega P}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q}}, \quad \frac{\overline{\Omega P'}}{\overline{\Omega P}} = \frac{\overline{\Omega Q'}}{\overline{\Omega Q}}, \quad \forall (\Omega QQ') \in \Delta \quad (1.133)$$

Ne consegue che l'insieme Δ conserva i rapporti $\frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q}}, \frac{\overline{\Omega Q'}}{\overline{\Omega Q}}, \forall Q \in s - \{\Omega, P\}$:

$$\exists c_1, c_2 \in (0, +\infty) \mid \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q}} = c_1, \quad \frac{\overline{\Omega Q'}}{\overline{\Omega Q}} = c_2, \quad \forall Q \in s - \{\Omega\} \quad (1.134)$$

Geometricamente significa che il rapporto tra il cateto opposto all'angolo in Ω e l'ipotenusa, e il rapporto tra il cateto adiacente e l'ipotenusa, sono indipendenti dal triangolo rettangolo $\Omega QQ'$. Ciò è espresso dalle (1.134) in cui abbiamo indicato con c_1 e c_2 i valori costanti di detti rapporti. È chiaro, tuttavia, che c_1 e c_2 dipendono esclusivamente dall'angolo in Ω , o ciò che è lo stesso, da x . Ne consegue che c_1 e c_2 sono funzioni reali della variabile reale $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Scriviamo:

$$f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.135)$$

$$x \mapsto \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q}}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad x \mapsto \frac{\overline{\Omega Q'}}{\overline{\Omega Q}}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Poniamo per definizione:

$$f(x) = \sin x \iff \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q}} = \sin x \quad (1.136)$$

$$g(x) = \cos x \iff \frac{\overline{\Omega Q'}}{\overline{\Omega Q}} = \cos x,$$

che sono rispettivamente il **seno** e il **coseno** dell'angolo in Ω o, ciò che è lo stesso, del numero reale $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Tali definizioni hanno un'immediata interpretazione geometrica. Assegnato un qualunque triangolo rettangolo $\Omega PP'$ (fig. 1.61), assumiamo come unità di misura la lunghezza del segmento ΩP , cioè la lunghezza dell'ipotenusa. Il seno dell'angolo in Ω è la misura del cateto opposto, mentre il coseno è la misura del cateto adiacente.

Abbiamo assunto $x \in (0, \frac{\pi}{2})$; in realtà le definizioni di seno e coseno si estendono facilmente a $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$. Risulta:

$$x = 0 \implies P' \equiv P \implies \Omega PP' \equiv \Omega P,$$

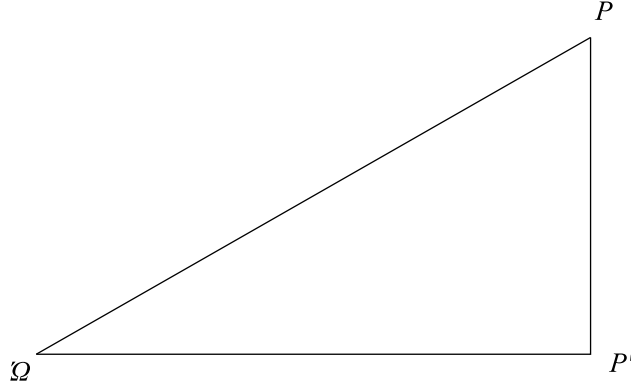


Figura 1.61: Assumendo $\overline{\Omega P} = 1$, si ha $\sin x = \overline{P'P}$, $\cos x = \overline{\Omega P'}$, dove $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ è la misura in radianti dell'angolo in Ω .

ovvero il triangolo $\Omega PP'$ degenera nel segmento ΩP . Ne consegue che il cateto opposto all'angolo in Ω ha lunghezza nulla, mentre il cateto adiacente ha lunghezza pari a $\overline{\Omega P}$, cosicchè:

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1 \quad (1.137)$$

Inoltre:

$$x = \frac{\pi}{2} \implies P' \equiv \Omega \implies \Omega PP' \equiv \Omega P,$$

ovvero il triangolo $\Omega PP'$ degenera nel segmento ΩP . È facile convincersi che:

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad (1.138)$$

Nel piano contenente le rette r, s fissiamo un riferimento cartesiano monometrico ortogonale $\mathcal{R}(\Omega\xi\eta)$ orientando l'asse ξ nella direzione e verso della retta r (fig. 1.62) e con origine nel punto Ω di intersezione di r con s .

Assegnato $P \in s - \{\Omega\}$, assumiamo come unità di misura in $\mathcal{R}$ la lunghezza del segmento di estremi Ω e P ; cioè poniamo $\overline{\Omega P} = 1$. Risulta $P \in s \cap \Gamma$, essendo $\Gamma : \xi^2 + \eta^2 = 1$, cioè la circonferenza centrata in Ω e di raggio unitario. Inoltre $P(\cos x, \sin x)$, dove x è, al solito, la misura in radianti dell'angolo $U\Omega P$, essendo $U(1, 0)$. In altri termini, le coordinate cartesiane di P nel riferimento $\mathcal{R}$ sono rispettivamente il coseno e il seno di x . Per definizione di misura in radianti di un angolo:

$$x = \frac{\widehat{UP}}{\overline{\Omega U}} = \widehat{UP}_{\overline{\Omega U}=1}$$

Cioè x è la lunghezza dell'arco $\widehat{UP}$. Il punto U si chiama **origine degli archi**, mentre Γ è la **circonferenza trigonometrica** (o **goniometrica**). È chiaro che $U(\cos 0, \sin 0)$ cioè $\sin 0$ e $\cos 0$ sono rispettivamente l'ordinata e l'ascissa del punto U . Detto V il punto di intersezione di Γ con l'asse η si ha $V(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2})$ cioè $V(0, 1)$.

Le (1.137)-(1.138) ci consentono di prolungare le funzioni (1.136) dall'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$ all'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R} & , & & g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sin x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & & & x &\longrightarrow \cos x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned} \quad (1.139)$$

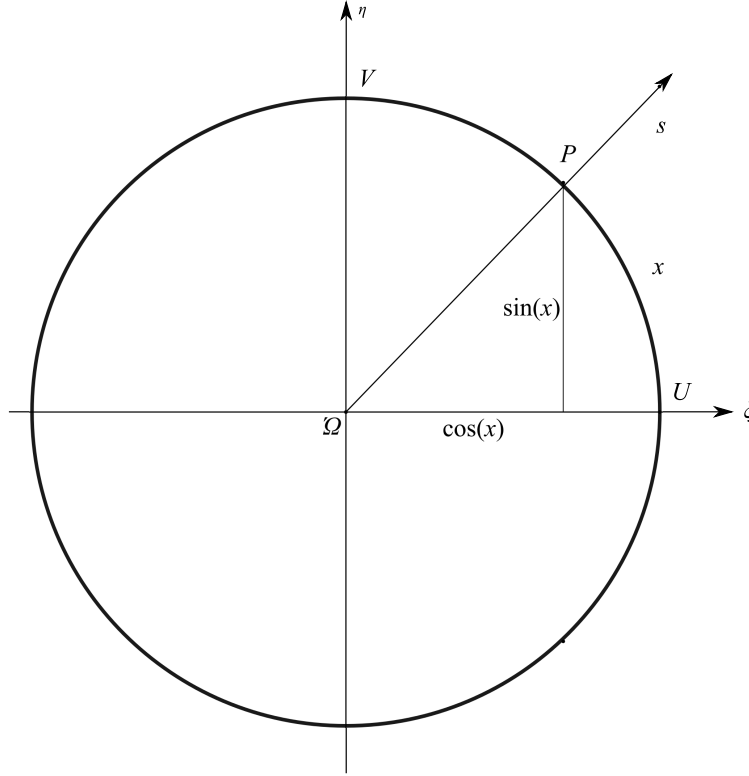


Figura 1.62: Circonferenza trigonometrica.

La monotonia delle funzioni f e g può essere studiata in base a considerazioni geometriche. Innanzitutto assumiamo come verso positivo delle rotazioni nel riferimento $\mathcal{R}$, il verso antiorario. Risulta:

$$x = 0 \implies s \equiv \xi \implies P \equiv U$$

Al crescere di x in $[0, \frac{\pi}{2}]$, la retta s compie una rotazione attorno a Ω nel verso positivo. Conseguentemente, il punto P si sposta su Γ percorrendo l'arco $\widehat{UP}$ orientato da U verso V .

$$x = \frac{\pi}{2} \implies s \equiv \eta \implies P \equiv V$$

Ciò implica:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \implies \begin{cases} 0 \leq f(x) \leq 1 \\ 1 \geq g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Ne consegue che f è strettamente crescente e g è strettamente decrescente. Riguardo al codominio: $f([0, \frac{\pi}{2}]) = g([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1]$. Le funzioni (1.139) possono essere ulteriormente prolungate. Precisamente da $[0, \frac{\pi}{2}]$ a $\mathbb{R}$. A tale scopo, tracciamo nuovamente la circonferenza trigonometrica (vedasi fig. 1.63).

Supponiamo che inizialmente sia $x = 0$, cioè $s \equiv \xi$. Facendo ruotare la semiretta s attorno a Ω , nel verso positivo, di un angolo la cui misura in radianti è $\leq \frac{\pi}{2}$, il punto di intersezione di s con Γ descrive l'arco $\widehat{UP}$ nel verso positivo delle rotazioni. Se, invece, s ruota attorno a Ω nel verso negativo, il punto di intersezione di s con Γ descrive l'arco $\widehat{UP'}$ nel verso negativo delle rotazioni. Se in particolare, nei due casi suddetti la semiretta s è ruotata di uno stesso angolo ma in versi opposti si ha che gli archi $\widehat{UP}$ e $\widehat{UP'}$ hanno la stessa lunghezza. Chiamiamo tale lunghezza **misura assoluta** dell'arco $\widehat{UP}$ (o di $\widehat{UP'}$).

Definizione 39 Dicesi **misura relativa** di un arco orientato il numero reale x tale che $|x|$ è la lunghezza dell'arco (misura assoluta), risultando $x > 0$ se il verso dell'arco orientato è concorde al verso positivo delle rotazioni; $x < 0$ se è discorde.

Nel caso in esame (fig. 1.63), se x è la misura relativa di $\widehat{UP}$, risulta $x > 0$, mentre la misura relativa dell'arco orientato $\widehat{UP'}$ è $-x$.

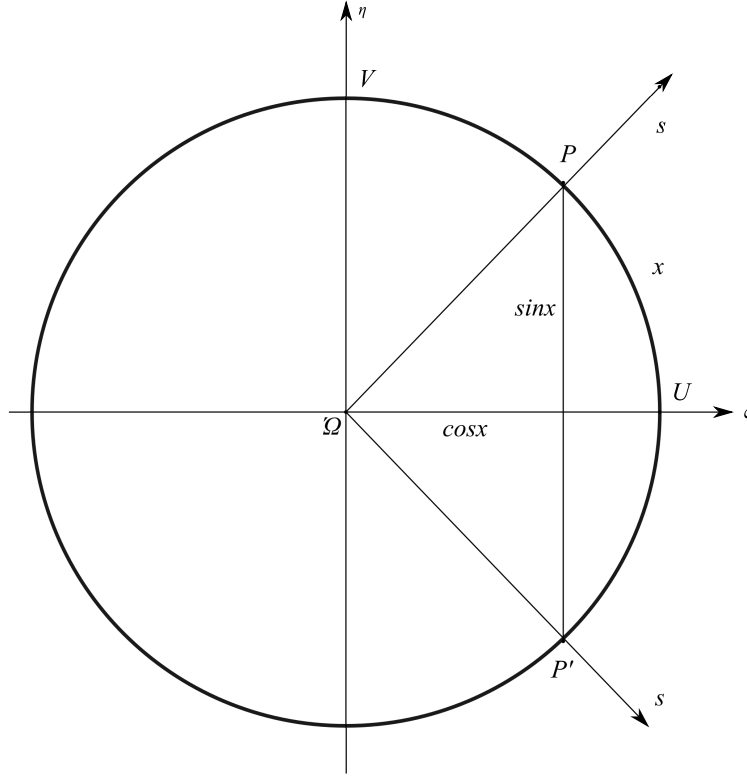


Figura 1.63: Consideriamo due rotazioni possibili della semiretta s attorno a Ω . La prima nel verso positivo, la seconda nel verso negativo delle rotazioni.

Da tale definizione segue che un qualunque $x \in \mathbb{R}$ può essere considerato la misura relativa di un assegnato arco orientato $\widehat{UP}$, risultando:

$$|x| < 2\pi \implies \widehat{UP} \subset \Gamma,$$

cioè $\widehat{UP}$ è un arco orientato di Γ di lunghezza $< 2\pi$. Si ha $x > 0$ se $\widehat{UP}$ è orientato nel verso positivo; $x < 0$ nel caso contrario. Se $|x| > 2\pi$ possono presentarsi i seguenti casi:

1. $\exists k \in \mathbb{Z} - \{0\} \mid x = 2k\pi \implies \widehat{UP}$ è la circonferenza Γ percorsa $|k|$ volte. Se $k > 0$ è percorsa nel verso positivo. Se $k < 0$, nel verso negativo. Ad esempio, se $x = -6\pi$, si ha che l'arco orientato $\widehat{UP}$ è la circonferenza Γ percorsa 3 volte nel verso negativo delle rotazioni, cioè nel verso orario.
2. $\nexists k \in \mathbb{Z} - \{0\} \mid x = 2k\pi$

Allora:

$$h \in \mathbb{Z} - \{0\} \mid h = \left\lceil \frac{x}{2\pi} \right\rceil \implies \exists \alpha_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{N} \mid |\alpha_0| < 1, \quad \frac{x}{2\pi} = h + \alpha_0$$

Cioè:

$$x = x_0 + 2h\pi,$$

dove $x_0 = 2\pi\alpha_0$ e poichè $|\alpha_0| < 1$ si ha $|x_0| < 2\pi$.

Il percorso totale del punto di intersezione di s con Γ , è la circonferenza Γ percorsa $|h|$ volte più l'arco orientato $\widehat{UP}$ di misura relativa x_0 .

Esempio 10 Supponiamo che sia $x = 40$, onde x non è multiplo intero di 2π . Approssimando alla quarta cifra decimale si ha

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{40}{2\pi} = 6.3662 \quad (1.140)$$

Quindi:

$$h = \left[\frac{40}{2\pi} \right] = 6 \quad (1.141)$$

Pertanto

$$x = 2.3009 + 6(2\pi)$$

Cioè, $x = 40$ è la misura della circonferenza Γ percorsa 6 volte nel verso positivo e di un arco di misura relativa 2.3009.

Osserviamo che in tutti i casi possibili il punto P è univocamente determinato da x . È naturale assumere come $\cos x$ e $\sin x$ le coordinate cartesiane di P nel riferimento $\mathcal{R}(\Omega\xi\eta)$. In parole povere, assegnato $x \in \mathbb{R}$, resta univocamente determinato il punto $P \in \Gamma$. Detto punto avrà coordinate (ξ, η) e assumiamo $\cos x = \xi$, $\sin x = \eta$.

Abbiamo, dunque, le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ definite in $\mathbb{R}$ e di codominio è $[0, 1]$.

Proprietà e relazioni notevoli

Dalle definizioni precedenti segue:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

cioè $\sin x$ è funzione dispari, mentre $\cos x$ è funzioni pari.

Assegnato x , determiniamo $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Dalla fig. 1.64 (senza perdita di generalità, abbiamo assunto $x \in (0, \frac{\pi}{2})$) vediamo che $\frac{\pi}{2} - x$ è la misura in radianti dell'angolo in P . Denotando con N la proiezione ortogonale di P sull'asse ξ , per definizione di $\sin x$ e $\cos x$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}} \stackrel{\overline{OP}=1}{=} \overline{ON},$$

cioè:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In maniera analoga:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per determinare $\sin(\pi - x)$ e $\cos(\pi - x)$ tracciamo nuovamente la circonferenza trigonometrica (fig. 1.65). Detto Q il punto di Γ tale che la misura relativa dell'arco orientato $\widehat{UQ}$

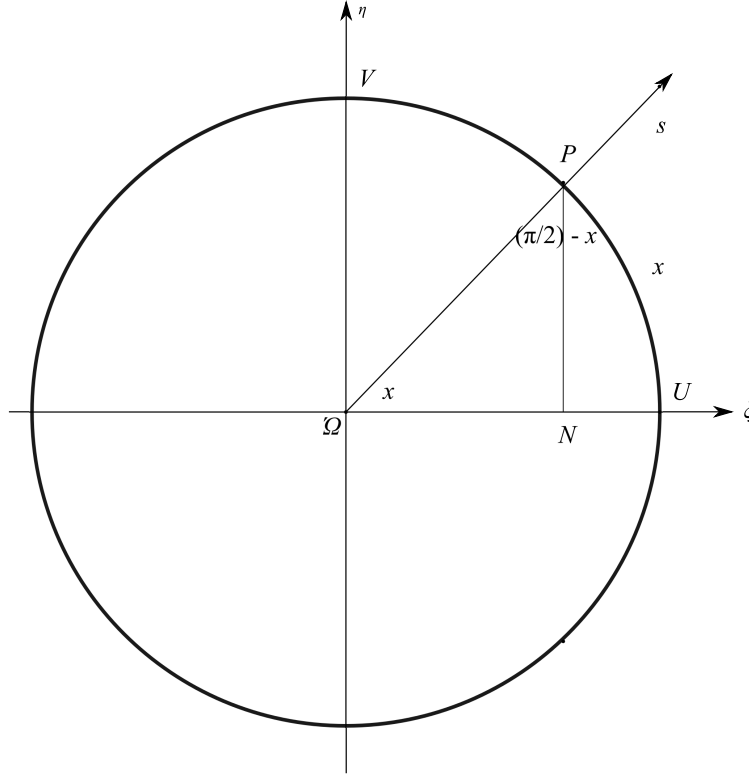


Figura 1.64: Il complementare dell'angolo la cui misura in radianti è x , è l'angolo in P .

da U verso Q sia pari a $\pi - x$, si ha⁴ $Q(\cos(\pi - x), \sin(\pi - x))$. Ma $Q(-\cos x, \sin x)$, per cui:

$$(\cos(\pi - x), \sin(\pi - x)) = (-\cos x, \sin x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Trattandosi di una uguaglianza tra coppie ordinate, deve essere:

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Determiniamo ora i valori assunti da $\sin x$ e $\cos x$ in $\pi + x$. Tracciamo nuovamente la circonferenza trigonometrica. Detto Q il punto di Γ tale che la misura relativa dell'arco orientato $\widehat{UQ}$ da U verso Q sia pari a $\pi + x$, si ha⁵ $Q(\cos(\pi + x), \sin(\pi + x))$. Ma $Q(-\cos x, -\sin x)$, per cui:

$$(\cos(\pi + x), \sin(\pi + x)) = (-\cos x, -\sin x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Trattandosi di una uguaglianza tra coppie ordinate, deve essere:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per quanto riguarda i valori assunti in $x + 2\pi$, è chiaro che $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Inoltre:

$$\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x, \quad \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Posto $T = 2\pi$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \sin(x + kT) = \sin x \\ \cos(x + kT) = \cos x \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

⁴ Q è il simmetrico di P rispetto all'asse η .

⁵ Q è il simmetrico di P rispetto all'origine Ω .

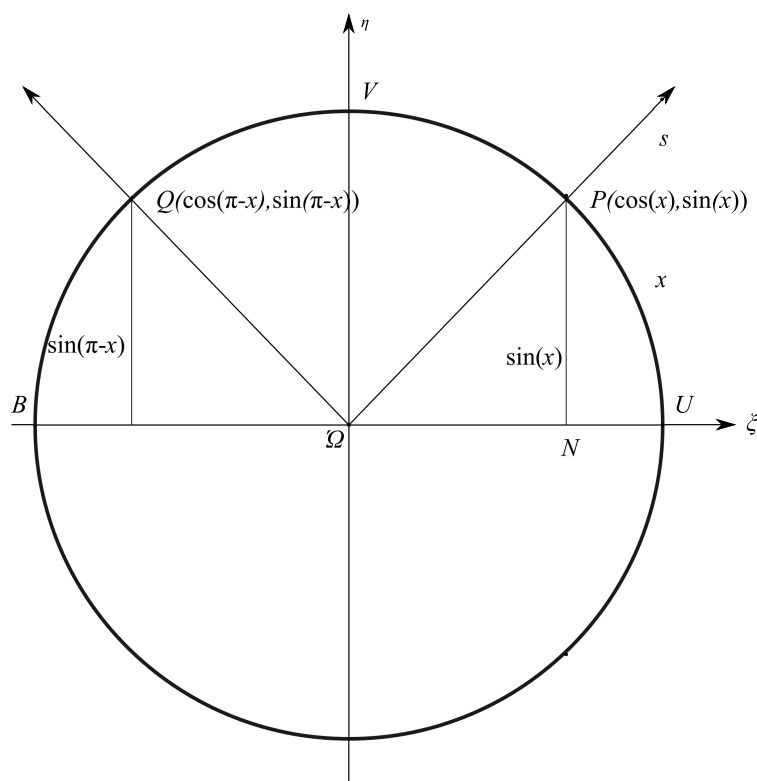


Figura 1.65: Il supplementare dell'angolo la cui misura in radianti è x , è la misura relativa dell'arco $\widehat{PB}$ o, ciò che è lo stesso, dell'arco $\widehat{UQ}$, dove Q è il simmetrico di P rispetto all'asse η . Si noti che anche in questo caso, senza perdita di generalità, abbiamo assunto $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

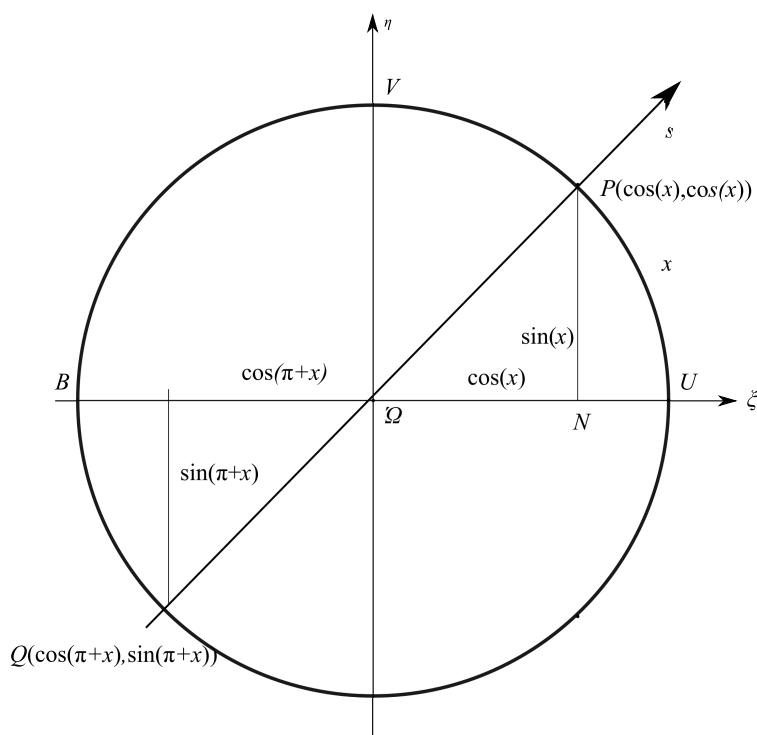


Figura 1.66: Le coordinate cartesiane del punto Q (univocamente individuato da $\pi+x$, quale misura relativa dell'arco $\widehat{UQ}$)

Da ciò segue che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono periodiche di periodo 2π . La periodicità ci consente di studiare la restrizione delle funzioni $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ all'intervallo $[-\pi, \pi]$. D'altra parte, la parità di f e g ci permette di studiare tali funzioni in $[0, \pi]$. I corrispondenti grafici verranno poi tracciati per simmetria. Precisamente, simmetria rispetto all'origine per la funzione f , simmetria rispetto all'asse y per la funzione g .

Studio della funzione $f(x) = \sin x$

Per quanto precede, $\sin x$ è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{2}]$. Abbiamo poi visto che il codominio della restrizione di f al suddetto intervallo è $[0, 1]$.

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \implies 0 \leq f(x) \leq 1 \quad (1.142)$$

Dalla fig. 1.65 vediamo che $\sin x$ è strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$:

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \implies 1 \geq f(x) \geq 0 \quad (1.143)$$

Dalle (1.142)-(1.143) segue $f([0, \pi]) = [0, 1]$. Ma f è dispari, per cui:

$$f([0, \pi]) = [0, 1] \xRightarrow{f \text{ è dispari}} f([-\pi, 0]) = [-1, 0]$$

Ne consegue che il codominio di $\sin x$ è $[-1, 0] \cup [0, 1] = [-1, 1]$. Sempre dalla simmetria rispetto all'origine, vediamo che $\sin x$ è strettamente crescente in $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ e strettamente decrescente in $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$. Ne consegue che il codominio di $\sin x$ è $[-1, 0] \cup [0, 1] = [-1, 1]$. Sempre dalla simmetria rispetto all'origine, vediamo che $\sin x$ è strettamente crescente in $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ e strettamente decrescente in $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$.

Per lo studio della monotonia di $\sin x$ in $(-\infty, +\infty)$, poniamo:

$$I_k = \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Dobbiamo distinguere k pari da k dispari. Abbiamo:

$$k \text{ pari} \implies k = 2h, \quad \text{con } h \in \mathbb{Z},$$

per cui:

$$I_{2h} = \left[-\frac{\pi}{2} + 2h\pi, \frac{\pi}{2} + 2h\pi\right], \quad \text{con } h \in \mathbb{Z} \quad (1.144)$$

Ma $\sin x$ è periodica di periodo 2π , onde è strettamente crescente in ogni intervallo I_{2h} (in quanto è strettamente crescente in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). Se k è dispari ($k = 2h + 1$):

$$I_{2h+1} = \mathbb{R} - I_{2h} = \left[\frac{\pi}{2} + 2h\pi, \frac{3}{2}\pi + 2h\pi\right], \quad \text{con } h \in \mathbb{Z}$$

Dalla circonferenza trigonometrica vediamo che $\sin x$ è strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$, per cui in forza della periodicità si ha che $\sin x$ è strettamente decrescente in ogni intervallo I_{2h+1} .

Esplicitiamo alcuni intervalli di monotonia. Dalla (1.144) vediamo che $\sin x$ è strettamente crescente in:

$$\begin{aligned}
 h = 0 &\implies I_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
 h = -1 &\implies I_{-2} = \left[-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right] \\
 h = +1 &\implies I_2 = \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right] \\
 h = -2 &\implies I_{-4} = \left[-\frac{9}{2}\pi, -\frac{7}{2}\pi\right] \\
 h = +2 &\implies I_4 = \left[\frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi\right] \\
 h = -3 &\implies I_{-6} = \left[-\frac{13}{2}\pi, -\frac{11}{2}\pi\right] \\
 h = +3 &\implies I_6 = \left[\frac{11}{2}\pi, \frac{13}{2}\pi\right] \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{1.145}$$

Nelle figg. 1.67-1.68-1.69-1.70 riportiamo il grafico della restrizione di $\sin x$ a vari intervalli.

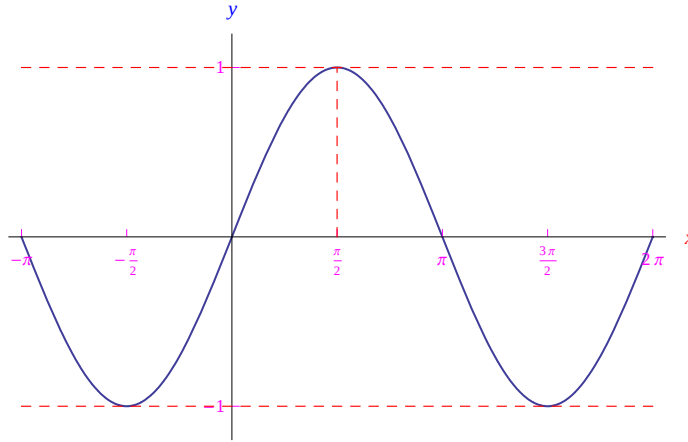


Figura 1.67: Grafico di $\sin x$ in $[-\pi, 2\pi]$.

Il grafico della funzione $\sin x$ si chiama **sinusoide**. Gli zeri della funzione sono:

$$x_k = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Assume il valore +1 nei punti:

$$x'_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2}(4k + 1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Assume il valore -1 nei punti:

$$x''_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi = \frac{3\pi}{2}(2k + 1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

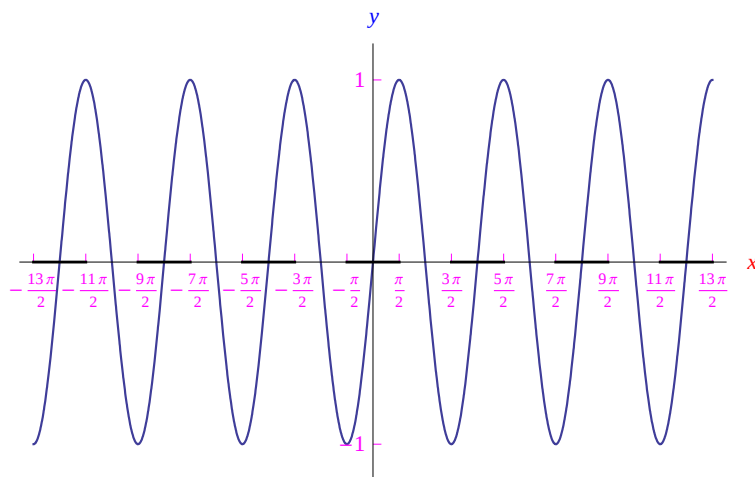


Figura 1.68: Grafico di $\sin x$ in $[-\frac{13}{2}\pi, \frac{13}{2}\pi]$, da cui sono visibili gli intervalli di crescita (1.145).

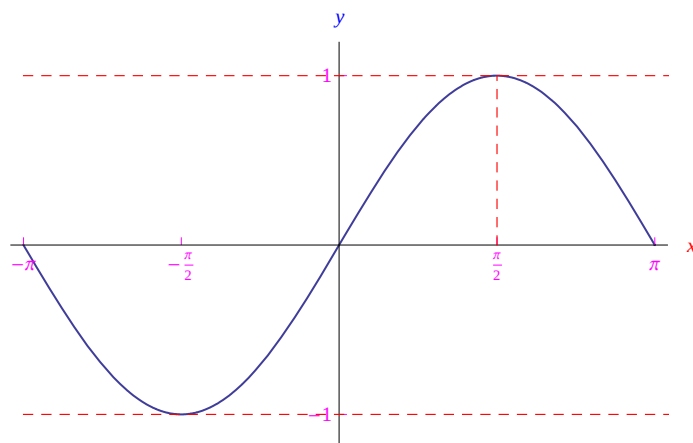


Figura 1.69: Grafico di $\sin x$ in $[-\pi, \pi]$.

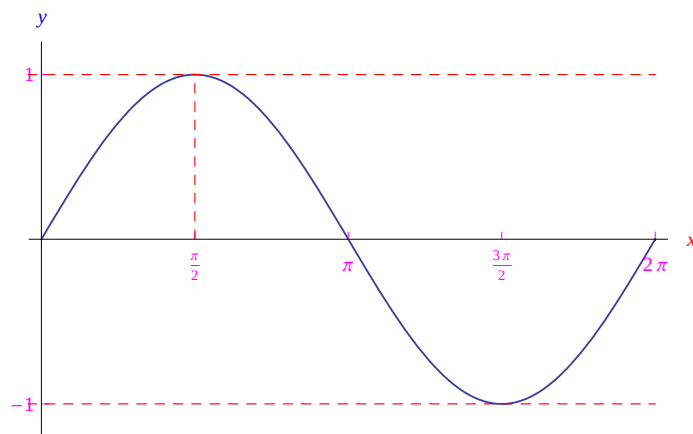


Figura 1.70: Grafico di $\sin x$ in $[0, 2\pi]$.

Studio della funzione $g(x) = \cos x$

Abbiamo visto che $\cos x$ è strettamente decrescente in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e che il codominio della restrizione al suddetto intervallo è $[0, 1]$. Cioè $\cos x$ assume in $[0, \frac{\pi}{2}]$ tutti e soli i valori appartenenti a $[0, 1]$:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \implies 1 \geq g(x) \geq 0 \quad (1.146)$$

Dalla fig. 1.65 vediamo che $g(x)$ è strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$:

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \implies 0 \geq g(x) \geq -1 \quad (1.147)$$

Dalle (1.146)-(1.147) segue $g([0, \pi]) = [-1, 1]$. Ma g è pari, per cui:

$$g([0, \pi]) = [-1, 1] \xRightarrow{g \text{ è pari}} g([-\pi, 0]) = [-1, 1]$$

Ne consegue che il codominio di $\cos x$ è $[-1, 1]$. Sempre dalla simmetria rispetto all'asse y , vediamo che $\cos x$ è strettamente crescente in $[-\pi, 0]$ e strettamente crescente in $[0, \pi]$.

Per lo studio della monotonia di $\cos x$ in $(-\infty, +\infty)$, poniamo:

$$J_k = [k\pi, (k+1)\pi], \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Dobbiamo distinguere k pari da k dispari. Abbiamo:

$$k \text{ pari} \implies k = 2h, \quad \text{con } h \in \mathbb{Z},$$

per cui:

$$J_{2h} = [2h\pi, (2h+1)\pi] = [2h\pi, \pi + 2h\pi], \quad \text{con } h \in \mathbb{Z} \quad (1.148)$$

Ma $\cos x$ è periodica di periodo 2π , onde è strettamente decrescente in ogni intervallo J_{2h} (in quanto è strettamente decrescente in $[0, \pi]$). Se k è dispari ($k = 2h+1$):

$$J_{2h+1} = [(2h+1)\pi, (2h+2)\pi], \quad \text{con } h \in \mathbb{Z}$$

Cioè:

$$J_{2h+1} = [\pi + 2h\pi, 2\pi + 2h\pi], \quad \text{con } h \in \mathbb{Z} \quad (1.149)$$

Dalla circonferenza trigonometrica vediamo che $\cos x$ è strettamente crescente in $[\pi, 2\pi]$, per cui in forza della periodicità si ha che $\cos x$ è strettamente crescente in ogni intervallo J_{2h+1} .

Esplicitiamo alcuni intervalli di monotonia. Dalla (1.149) vediamo che $\cos x$ è strettamente crescente in:

$$h = -1 \implies J_{-1} = [-\pi, 0] \quad (1.150)$$

$$h = 0 \implies J_1 = [\pi, 2\pi]$$

$$h = +1 \implies J_3 = [3\pi, 4\pi]$$

$$h = -2 \implies J_{-3} = [-3\pi, -2\pi]$$

$$h = +2 \implies J_5 = [5\pi, 6\pi]$$

$$h = -3 \implies J_{-5} = [-5\pi, -4\pi]$$

$$h = +3 \implies J_7 = [7\pi, 8\pi]$$

...

Nelle figg. 1.71-1.72-1.73-1.74 riportiamo il grafico della restrizione di $\cos x$ a vari intervalli.

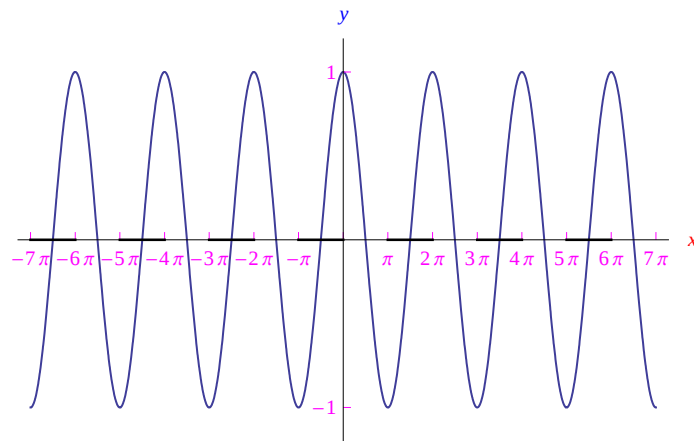


Figura 1.71: Grafico di $\cos x$ in $[-7\pi, 7\pi]$, da cui sono visibili gli intervalli di crescita (1.150).

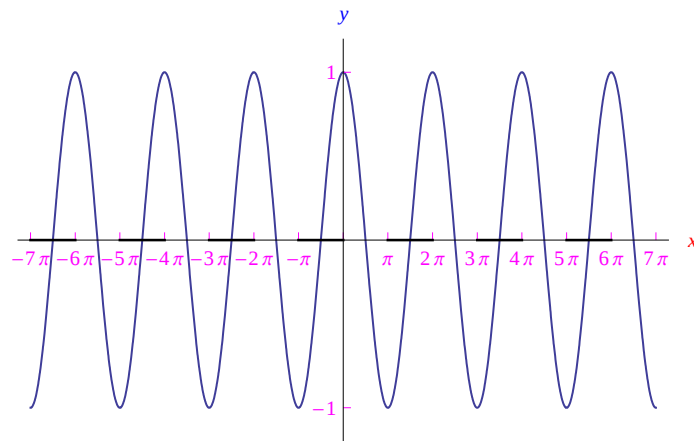


Figura 1.72: Grafico di $\cos x$ in $[-\pi, 2\pi]$.

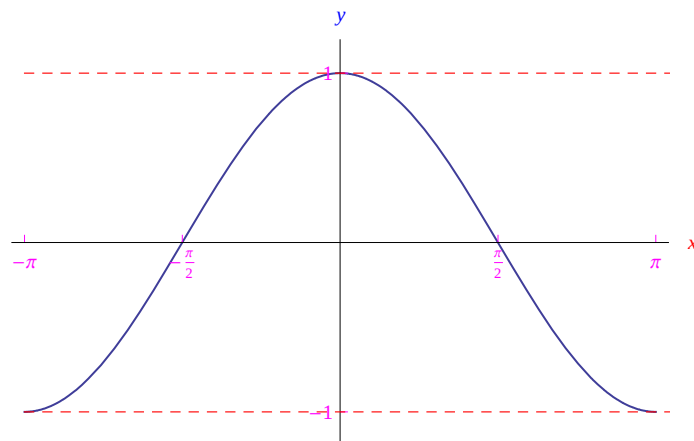


Figura 1.73: Grafico di $\cos x$ in $[-\pi, \pi]$.

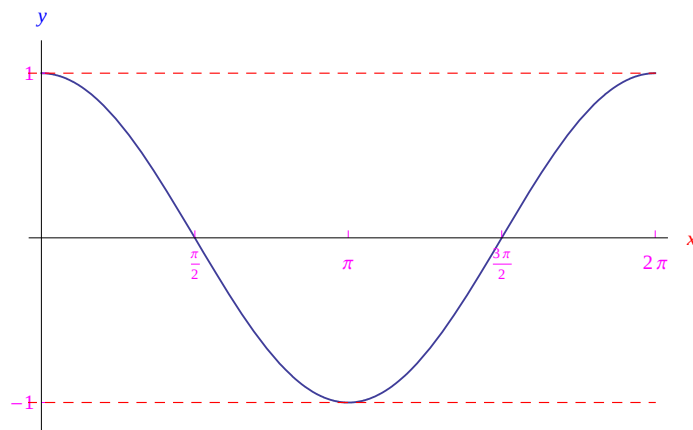


Figura 1.74: Grafico di $\cos x$ in $[0, 2\pi]$.

Il grafico della funzione $\cos x$ si chiama **cosinusoide**. Gli zeri della funzione sono:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2}(2k + 1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Assume il valore $+1$ nei punti:

$$x'_k = 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Assume il valore -1 nei punti:

$$x''_k = \pi + 2k\pi = \pi(2k + 1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

La fig. riporta il grafico di $\sin x, \cos x$.

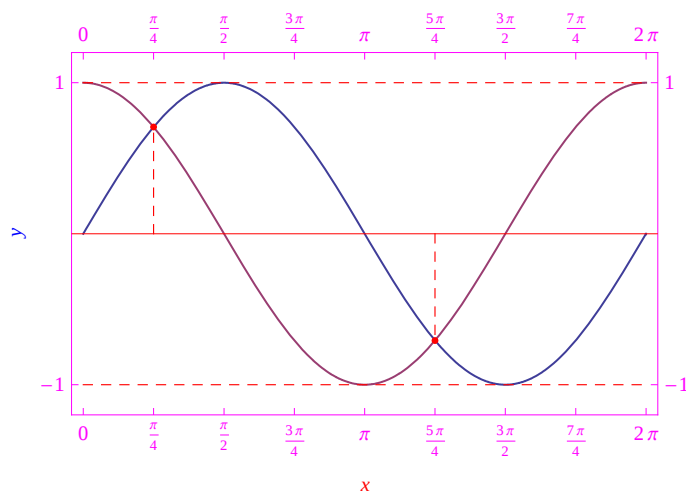


Figura 1.75: Grafico di $\sin x, \cos x$ in $[0, 2\pi]$.

Le funzioni $\tan x$ e $\cot x$

Riprendiamo la fig. 1.60. Utilizzando ancora la similitudine dei triangoli $\Omega PP'$ e $\Omega QQ'$ si ha:

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{\Omega P'}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q'}} \quad (1.151)$$

Anche in questo caso si ha che il rapporto (1.151) e il suo reciproco, dipendono solo dall'angolo in Ω . i.e da $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Abbiamo, quindi, la funzione:

$$f_1 : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (1.152)$$

$$x \mapsto \frac{QQ'}{\Omega Q'}, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

e la sua reciproca:

$$g_1 : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.153)$$

$$x \mapsto \frac{\Omega Q'}{QQ'}, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Poniamo per definizione:

$$f_1(x) = \tan x, \quad g_1(x) = \frac{1}{f_1(x)} = \cot x, \quad (1.154)$$

cioè g_1 è la reciproca di f_1 . Inoltre:

$$\frac{QQ'}{\Omega Q'} = \frac{QQ'}{\Omega Q'} \frac{\Omega Q}{\Omega Q} = \frac{\sin x}{\cos x},$$

per cui:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (1.155)$$

È possibile prolungare f_1 e g_1 da $(0, \frac{\pi}{2})$ a $[0, \frac{\pi}{2}]$? Iniziamo con $\tan x$:

$$\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan \frac{\pi}{2} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0} = 0 \quad (!)$$

In altri termini, la funzione $\tan x$ non è definita in $x = \frac{\pi}{2}$, per cui può essere prolungata da $(0, \frac{\pi}{2})$ a $[0, \frac{\pi}{2})$. Passiamo a $\cot x$:

$$\cot 0 = \frac{\cos 0}{\sin 0} = \frac{1}{0} \quad (!)$$

$$\cot \frac{\pi}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$$

In altri termini, la funzione $\cot x$ non è definita in $x = 0$, per cui $\cot x$ può essere prolungata da $(0, \frac{\pi}{2})$ a $(0, \frac{\pi}{2}]$. Quindi scriviamo:

$$f_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g_1 : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.156)$$

$$x \mapsto \tan x, \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}) \quad \quad \quad x \mapsto \cot x, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$$

Per interpretare geometricamente la funzione tangente e la funzione cotangente, tracciamo la circonferenza trigonometrica (fig. 1.76), da cui vediamo, che dette τ e τ' rispettivamente la retta tangente a Γ in U e la retta tangente a Γ in V , si ha che $\tan x$ e $\cot x$ sono rispettivamente l'ordinata e l'ascissa dei punti $T \in \tau \cap s$, $T' \in \tau' \cap s$. Infatti:

$$\tan x = \frac{\overline{PN}}{\overline{\Omega N}} = \frac{\overline{UT}}{\overline{\Omega U}} = \overline{UT},$$

da cui $T(1, \tan x)$. Il penultimo passaggio si giustifica tenendo conto della similitudine dei triangoli ΩPN e ΩTU . Inoltre, dalla fig. 1.76 vediamo che la $\cot x$ si esprime oltre che come $\frac{\overline{\Omega N}}{\overline{PN}}$ anche come⁶ $\frac{\overline{VT'}}{\overline{\Omega V}}$, ma $\overline{\Omega V} = 1$, per cui $\cot x = \overline{VT'}$.

$$\cot x = \frac{\overline{\Omega N}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{VT'}}{\overline{\Omega V}} \stackrel{\overline{\Omega V}=1}{=} \overline{VT'}$$

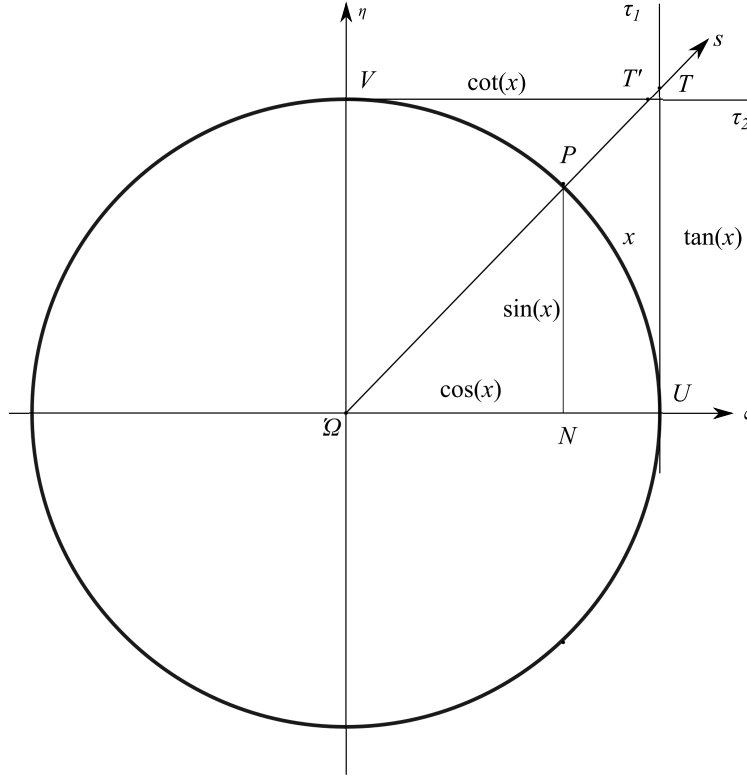


Figura 1.76: Gli angoli $\widehat{U\Omega T}$ e $\widehat{VT'\Omega}$ sono uguali, per cui $\cot x = \frac{\overline{UT}}{\overline{\Omega U}}$.

La funzione $f_1(x) = \tan x$ è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{2})$, avendosi:

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \implies 0 \leq \tan x < +\infty$$

Infatti, per $x = 0$ la semiretta s coincide con il semiasse positivo $\xi \implies T \equiv U \implies \tan 0 = 0$, come appunto deve essere. Al crescere di x ($< \frac{\pi}{2}$) la semiretta s ruota attorno a Ω nel verso positivo delle rotazioni; conseguentemente, il punto T si sposta lungo la retta τ nel verso delle ordinate crescenti. Quando $x = \frac{\pi}{2}$, s è parallela a τ per cui T è all'infinito.

La funzione $g_1(x) = \cot x$ è strettamente decrescente in $(0, \frac{\pi}{2}]$, avendosi:

$$0 < x \leq \frac{\pi}{2} \implies +\infty > \cot x \geq 0$$

Infatti, per $x = 0$ la semiretta s coincide con il semiasse positivo ξ ; conseguentemente è parallela a τ' e ciò implica che il punto di intersezione T' è all'infinito. Al crescere di x ($< \frac{\pi}{2}$) la semiretta s ruota attorno a Ω nel verso positivo delle rotazioni; conseguentemente,

⁶In quanto gli angoli in Ω e in T' sono uguali.

il punto T' si sposta lungo τ' avvicinandosi a V , cioè nel verso delle ascisse decrescenti. Quando $x = \frac{\pi}{2}$, s è sovrapposta al semiasse positivo $\eta \implies T' \equiv V \implies \cot \frac{\pi}{2} = 0$.

Inoltre:

$$\begin{aligned} f_1 \left(\left[0, \frac{\pi}{2} \right) \right) &= [0, +\infty) \\ g_1 \left(\left(0, \frac{\pi}{2} \right] \right) &= [0, +\infty) \end{aligned}$$

Le (1.155) permettono di prolungare f_1 e g_2 su $X_1 \subset \mathbb{R}$ e su $X_2 \subset \mathbb{R}$ rispettivamente. Per essere più precisi:

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}, \quad X_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} \quad (1.157)$$

Studio della funzione $f_1(x) = \tan x$

Dalla prima delle (1.157):

$$\begin{aligned} X_1 &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Cioè:

$$X_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

Dalla $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ci aspettiamo che $\tan x$ sia periodica. Per determinare il periodo osserviamo che:

$$\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x, \quad \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x,$$

onde:

$$\tan(x + k\pi) = \frac{(-1)^k \sin x}{(-1)^k \cos x} = \tan x, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ne consegue che $\tan x$ è periodica di periodo π . Ciò ci consente di limitare lo studio della funzione all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ o a $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Nel primo caso ci viene in aiuto anche la parità della funzione. Infatti: $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\tan x$, onde è funzione dispari e il relativo grafico è simmetrico rispetto all'origine. La simmetria ci dice che la funzione è strettamente crescente in $(-\frac{\pi}{2}, 0]$, giacchè tale è la sua monotonia in $[0, \frac{\pi}{2})$. Nelle figg. 1.77-1.78-1.79- riportiamo il grafico della restrizione di $\tan x$ a vari intervalli.

Studio della funzione $g_1(x) = \cot x$

Dalla prima delle (1.157):

$$\begin{aligned} X_2 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{R} - \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Cioè:

$$X_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$$

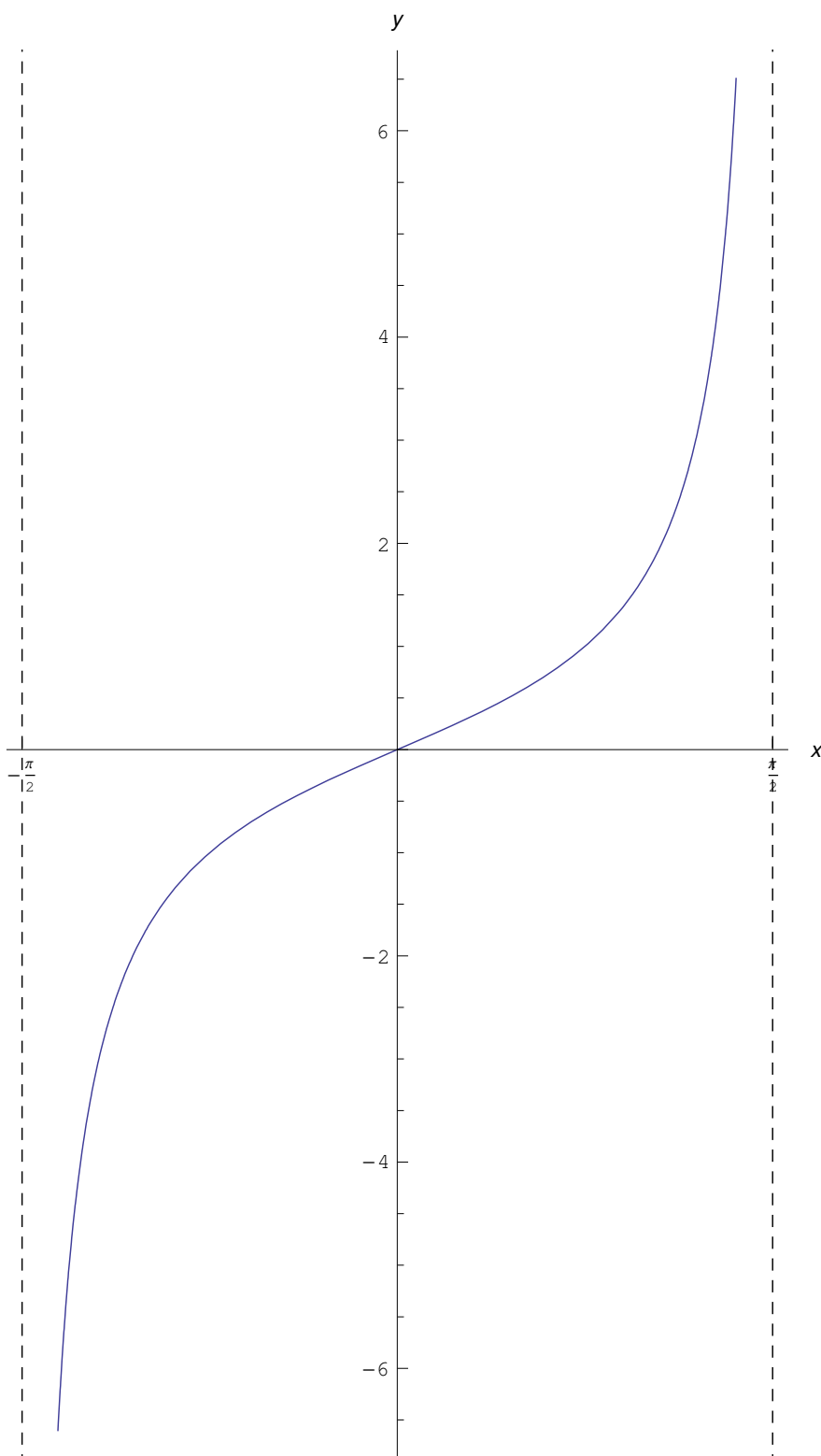


Figura 1.77: Grafico di $\tan x$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

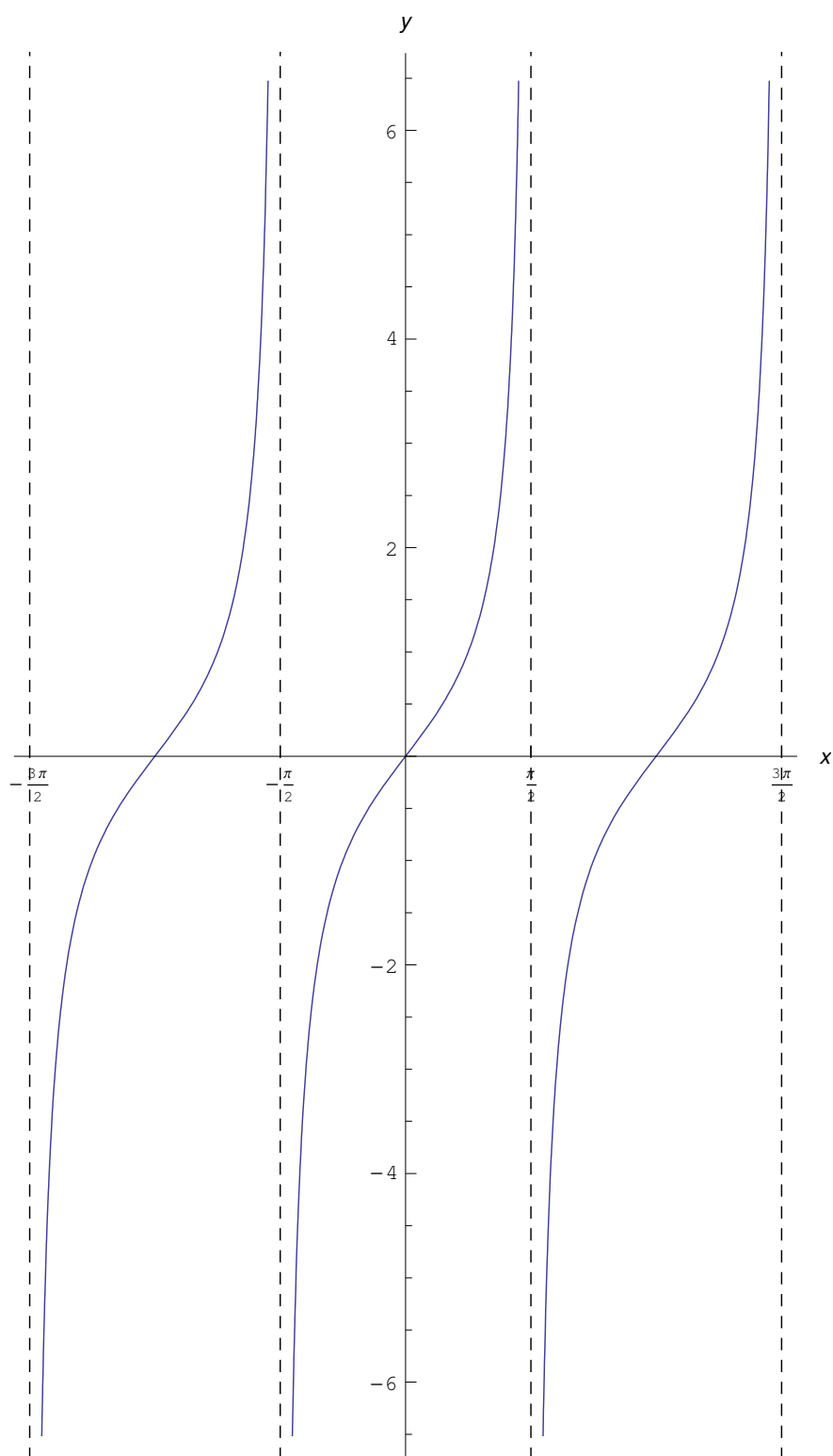
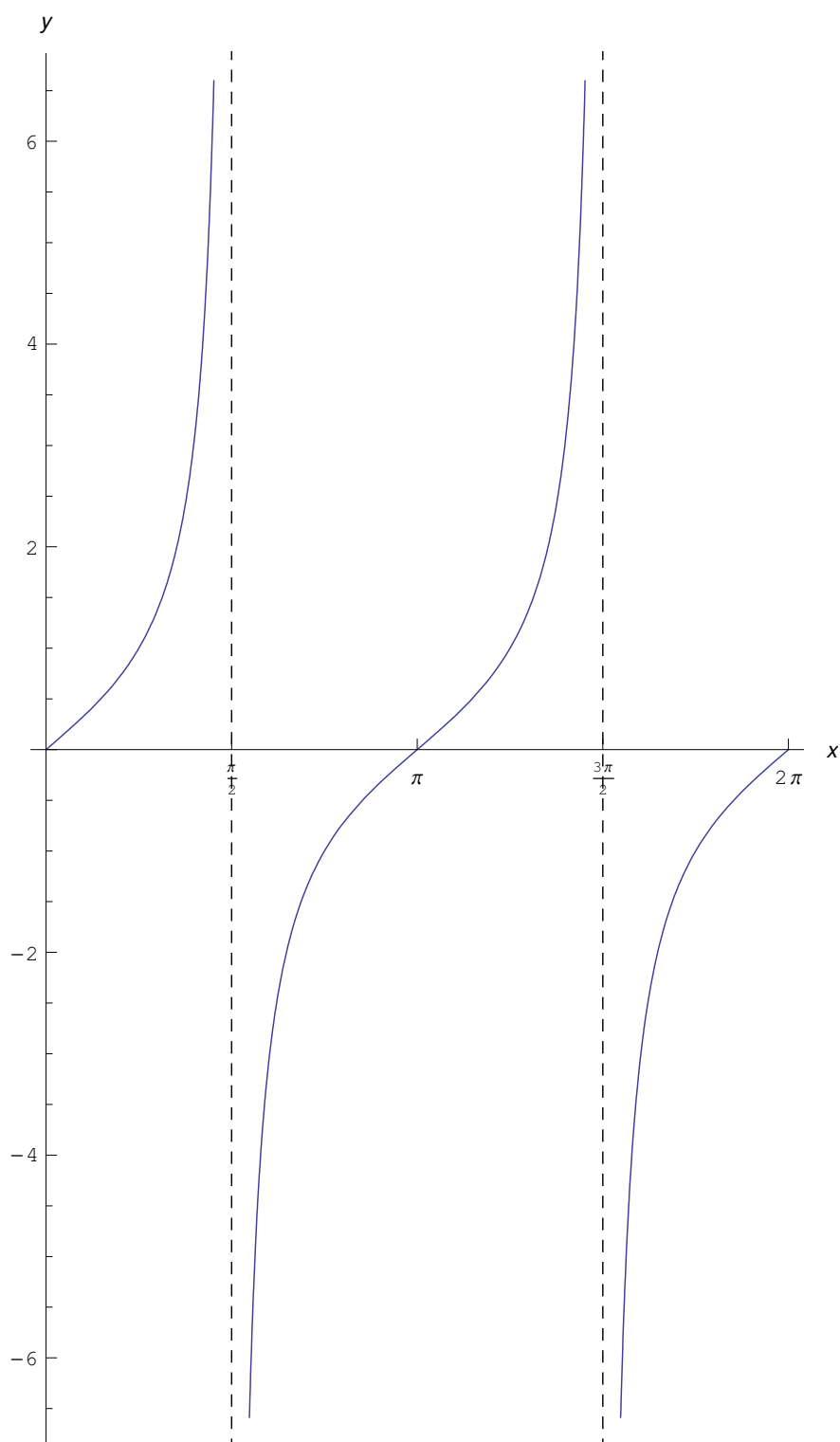


Figura 1.78: Grafico di $\tan x$ in $(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi) - \{\pm\frac{\pi}{2}\}$.

Figura 1.79: Grafico di $\tan x$ in $[0, 2\pi] - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$.

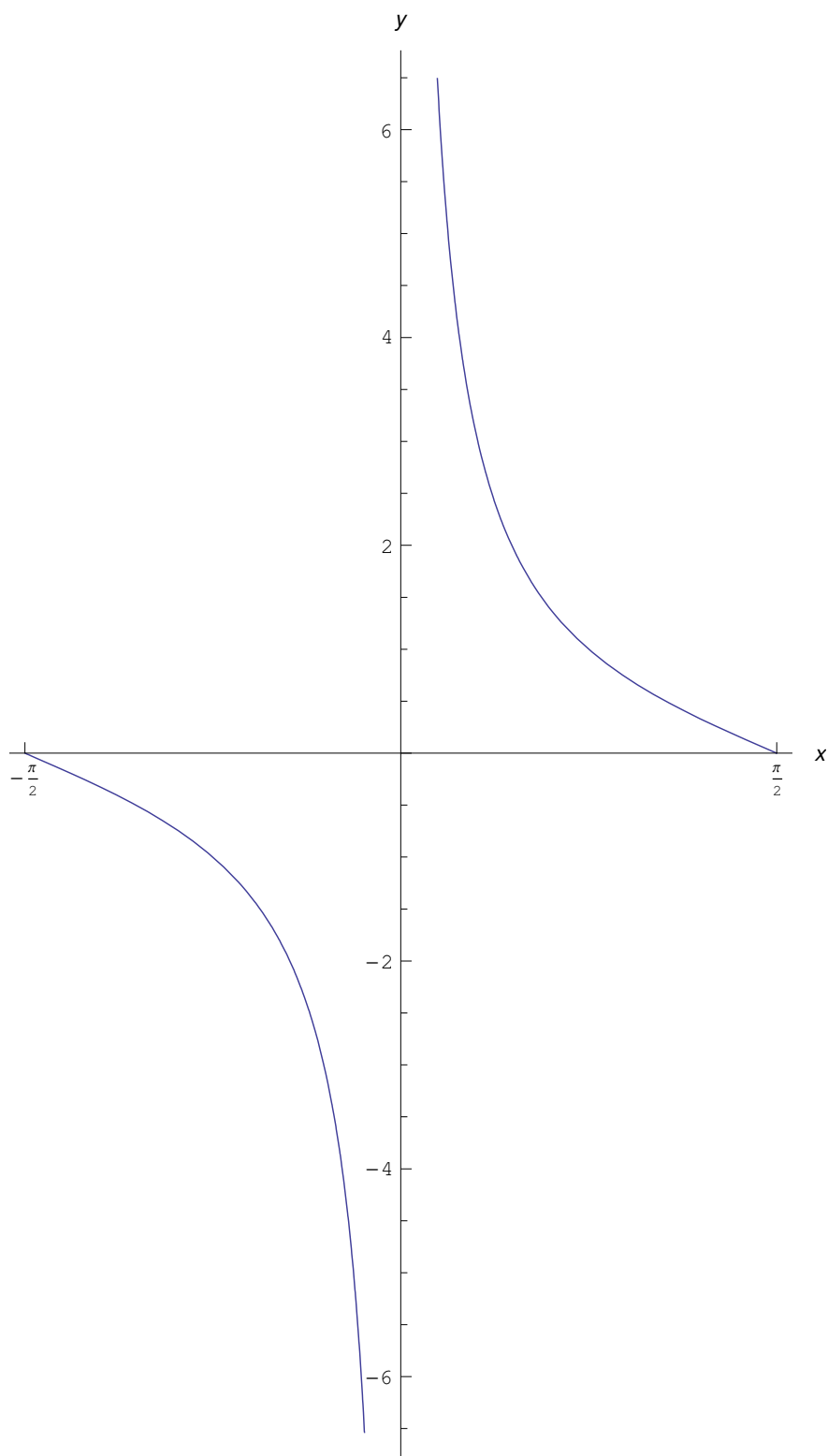


Figura 1.80: Grafico di $\cot x$ in $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$.

La funzione è periodica di periodo π , giacchè è la reciproca di $\tan x$. Ciò ci consente di limitare lo studio della funzione a $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$. Trattandosi di una funzione dispari possiamo limitare lo studio della funzione a $(0, \frac{\pi}{2}]$. La simmetria ci dice che $\cot x$ è strettamente decrescente in $[-\frac{\pi}{2}, 0)$, giacchè tale è la sua monotonia in $(0, \frac{\pi}{2}]$. In fig. 1.80 riportiamo il grafico della funzione in $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$.

In fig. 1.81 è illustrato il grafico di $\cot x$ in $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

In fig. 1.82 è mostrato il grafico di $\cot x$ in $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

Infine, in fig. 1.83 riportiamo i grafici di $\tan x$ e $\cot x$.

Formule trigonometriche

Dalla circonferenza trigonometrica si ha:

$$P(\cos x, \sin x) \in \Gamma : \xi^2 + \eta^2 = 1,$$

cosicchè:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad (1.158)$$

che è l'**identità fondamentale della trigonometria piana**. Altre formule notevoli di cui omettiamo la dimostrazione sono:

1. Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (1.159)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (1.160)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \quad (1.161)$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y} \quad (1.162)$$

2. Formule di duplicazione

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (1.163)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \quad (1.164)$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad (1.165)$$

$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x} \quad (1.166)$$

3. Formule di bisezione

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad (1.167)$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad (1.168)$$

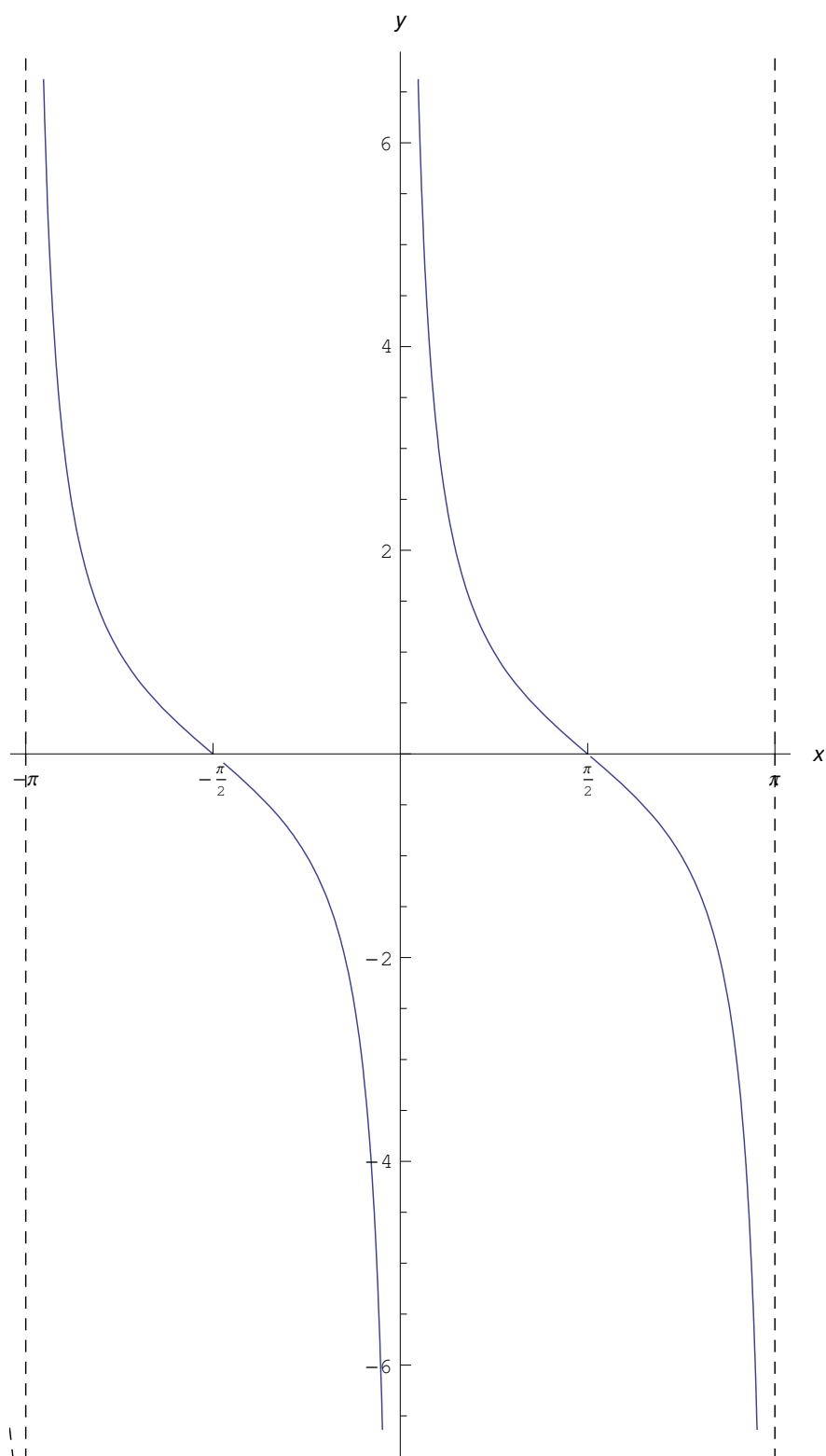


Figura 1.81: Grafico di $\cot x$ in $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

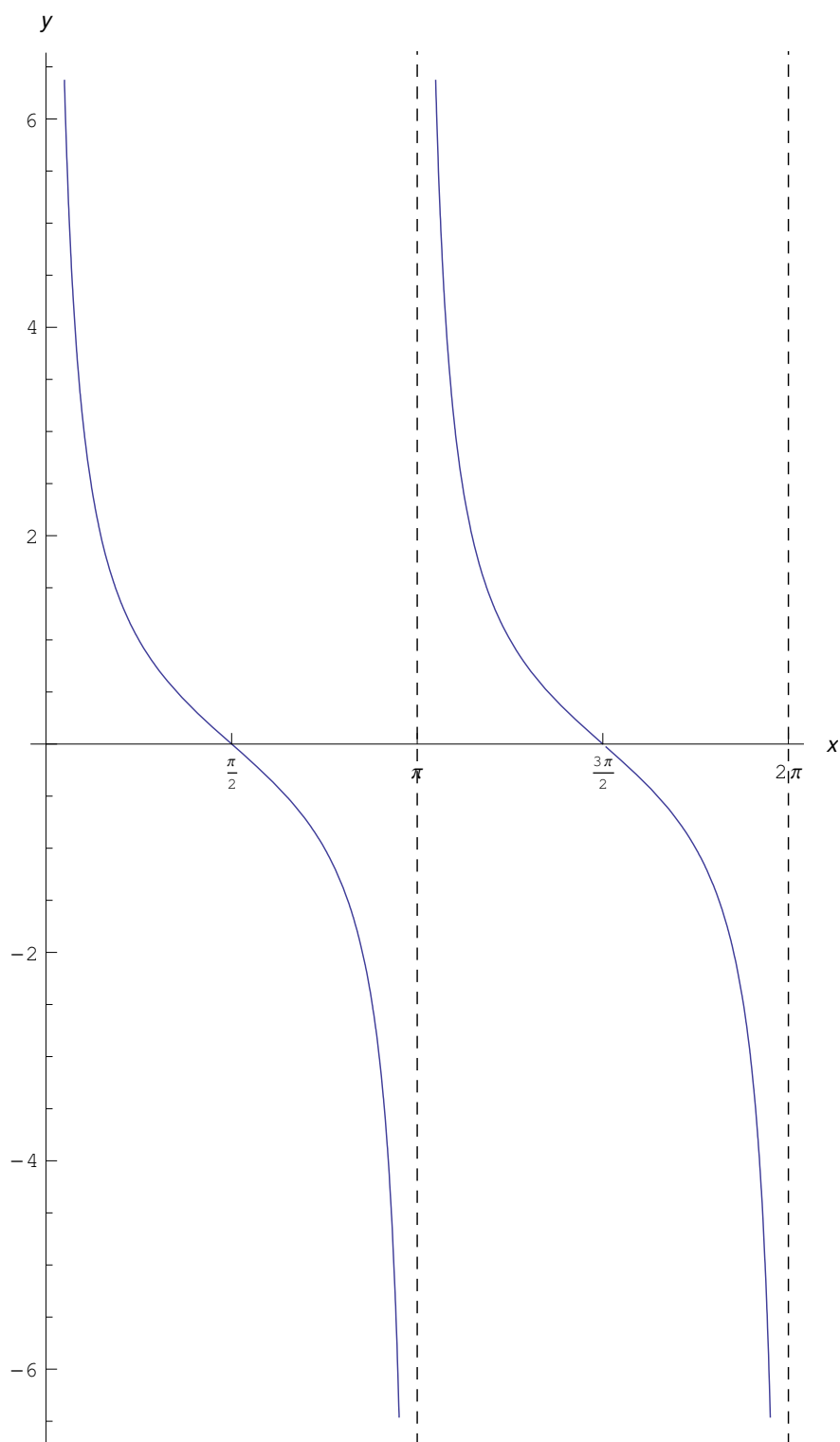
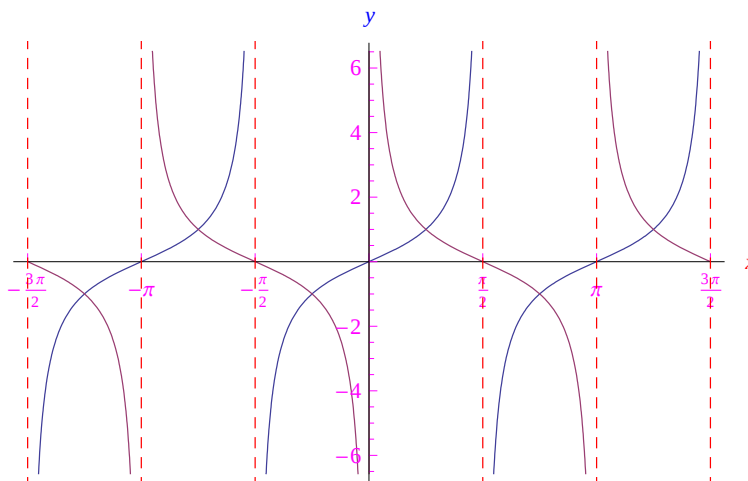


Figura 1.82: Grafico di $\cot x$ in $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.


 Figura 1.83: Diagramma cartesiano delle funzioni $\tan x$ e $\cot x$.

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad (1.169)$$

$$\cot \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \quad (1.170)$$

4. Formule di prostaferesi

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2} \quad (1.171)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \quad (1.172)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2} \quad (1.173)$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}, \quad \text{con } x, y \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.174)$$

$$\cot x \pm \cot y = \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}, \quad \text{con } x, y \neq k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.175)$$

5. Formule di Werner

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)] \quad (1.176)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)] \quad (1.177)$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)] \quad (1.178)$$

6. Altre formule notevoli che esprimono $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$, in funzione razionale di $\tan \frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad (1.179)$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad (1.180)$$

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} \quad (1.181)$$

$$\cot x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{2 \tan \frac{x}{2}} \quad (1.182)$$

Archi notevoli

Gli archi notevoli sono $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}$. Risulta:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \Rightarrow \cot \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} - 1}$$

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \Rightarrow$$

$$\cos \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{1 + 2\sqrt{5} + 5}}{4} = \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

Riassumiamo nella seguente tabella:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$
$\cot x$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

Di seguito un esempio di **equazione trigonometrica** (o **goniometrica**).

Esempio 11 Risolviamo:

$$3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \quad (1.183)$$

Dividiamo primo e secondo membro per $\cos x$:

$$3 \tan x + \sqrt{3} = 0 \quad (1.184)$$

Dividere per $\cos x$ implica

$$\cos x \neq 0 \implies x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (1.185)$$

Dalla (1.184):

$$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

che è la tangente di un arco notevole. Infatti $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ per $x = \frac{\pi}{6}$. Ora, siccome $\tan x$ è funzione dispari ($\tan(-x) = -\tan x$) si ha che $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ per $x = -\frac{\pi}{6}$. Forse l'aiuto di un grafico può aiutare... come riportato in fig. 1.77 da cui vediamo, appunto, che $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ per $x = -\frac{\pi}{6}$. E siccome $\tan x$ è periodica di periodo 2π , ne consegue che deve essere $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ per ogni k intero relativo. Ne concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione proposta è:

$$\begin{aligned} S &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi \right\} \end{aligned}$$

1.2.8 Invertibilità locale delle funzioni circolari

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una qualunque funzione periodica di periodo T . La periodicità implica la non iniettività di f . Infatti, assegnato $\bar{y} \in f(X)$, sia $\bar{x} \in X \mid f(\bar{x}) = \bar{y}$. Ma f è periodica, onde:

$$f(\bar{x} + kT) = f(\bar{x}) = \bar{y}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \mid (\bar{x} + kT) \in X$$

Ne consegue che se X è illimitato esistono infiniti $\bar{x}_k = \bar{x} + kT$ in cui la funzione assume il valore $\bar{y}$. Cioè:

$$\exists \{\bar{x}_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \mid f(\bar{x}_k) = \bar{y}$$

A sua volta, la non iniettività implica la non invertibilità di una funzione periodica. Ne consegue che le funzioni circolari non sono invertibili. Sono, tuttavia, localmente invertibili. Precisamente, in tutti e soli gli intervalli di monotonia in senso stretto.

Invertibilità locale della funzione $f(x) = \sin x$

La funzione $f(x) = \sin x$ è strettamente monotona in

$$I_k = \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right], \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

risultando strettamente crescente per k pari e strettamente decrescente per k dispari. Sia f_k la restrizione di f a I_k :

$$f_k : I_k \rightarrow [-1, 1]$$

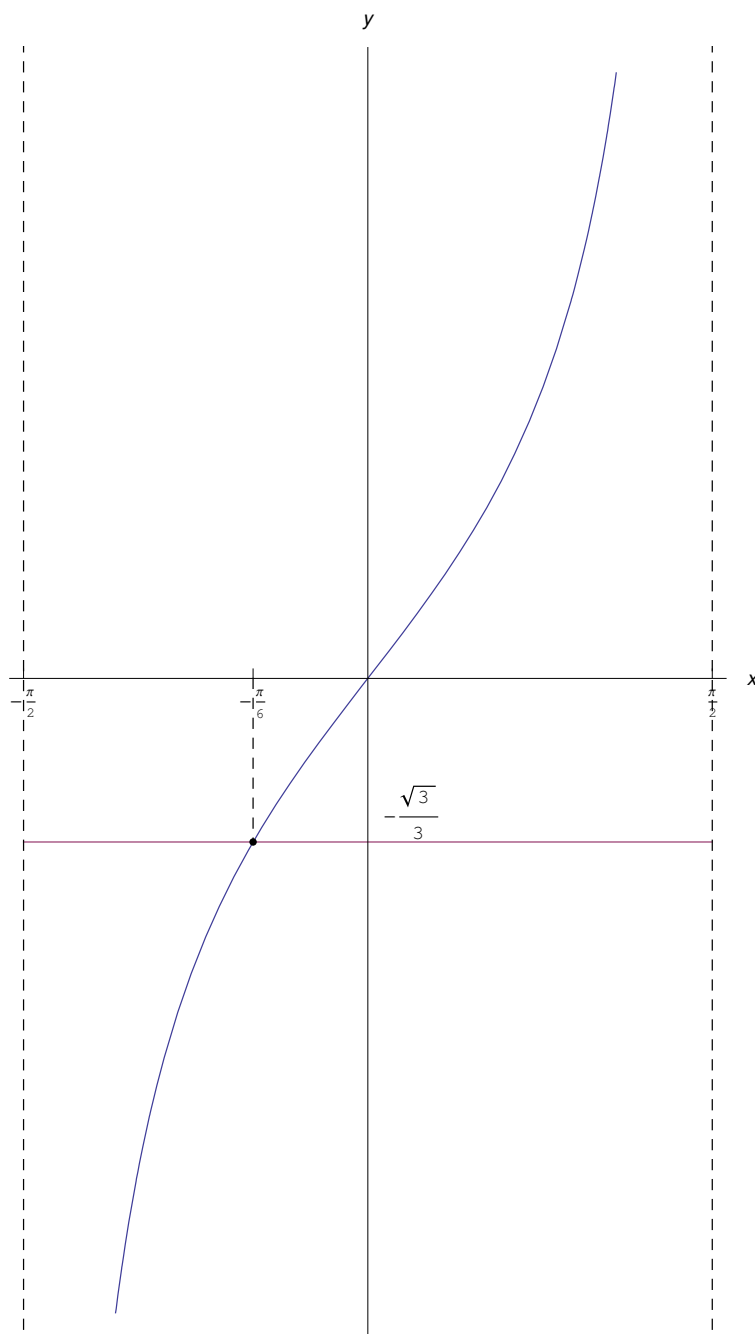


Figura 1.84: Grafico di $\tan x$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Per determinare l'inversa f_k^{-1} applichiamo il procedimento standard, ovvero la ricerca delle soluzioni dell'equazione:

$$f_k(x) = y,$$

con $y \in [-1, 1]$. Segue:

$$x = f_k^{-1}(y) \quad (1.186)$$

La funzione f_k^{-1} è definita in $[-1, 1]$ e il suo codominio è I_k . Dalla conservazione della monotonia (proposizione 5), si ha che f_k^{-1} è strettamente crescente per k pari e strettamente decrescente per k dispari.

Nella (1.186) ridefiniamo⁷ le variabili x, y in y, x rispettivamente:

$$y = f_k^{-1}(x) \quad (1.187)$$

Definizione 40 Dicesi **arcoseno** e si indica con $\arcsin x$, la funzione $f_0^{-1}(x)$. Poniamo cioè:

$$\arcsin x \stackrel{def}{=} f_0^{-1}(x)$$

Cioè, la funzione $\arcsin x$ è l'inversa di $\sin x$ in $I_0 = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e risulta ivi strettamente crescente.

Osservazione 9 La scrittura:

$$y = \arcsin x$$

si legge: y è l'arco⁸ il cui seno vale x . Infatti, se $y = \arcsin x$, necessariamente $x = \sin y$.

In fig. 1.85 riportiamo il grafico di $\arcsin x$.

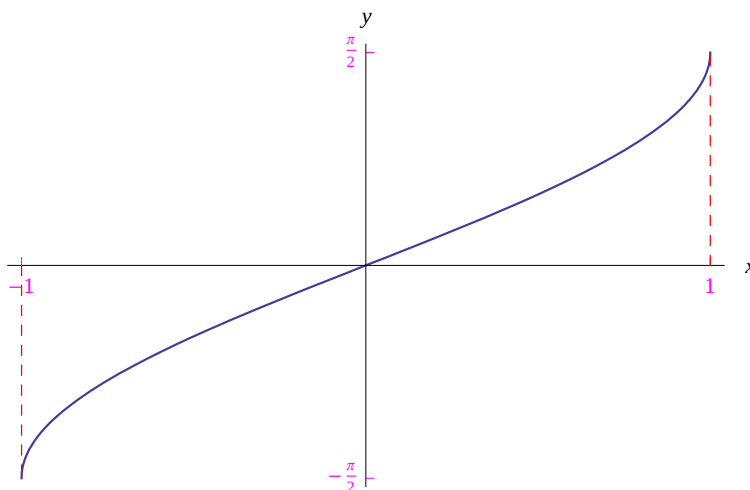


Figura 1.85: Grafico di $\arcsin x$.

⁷Operazione lecita, in quanto si tratta di variabili *mute*.

⁸Più precisamente, è l'unico arco (in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) il cui seno vale x .

Invertibilità locale della funzione $g(x) = \cos x$

La funzione $g(x) = \cos x$ è strettamente monotona in

$$J_k = [k\pi, (k+1)\pi], \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

risultando strettamente decrescente per k pari e strettamente crescente per k dispari. Sia g_k la restrizione di g a J_k :

$$g_k : J_k \rightarrow [-1, 1]$$

Per determinare l'inversa g_k^{-1} applichiamo il procedimento standard, ovvero la ricerca delle soluzioni dell'equazione:

$$g_k(x) = y,$$

con $y \in [-1, 1]$. Segue:

$$x = g_k^{-1}(y) \tag{1.188}$$

La funzione g_k^{-1} è definita in $[-1, 1]$ e il suo codominio è J_k . Dalla conservazione della monotonia (proposizione 5), si ha che g_k^{-1} è strettamente decrescente per k pari e strettamente crescente per k dispari.

Nella (1.188) ridefiniamo le variabili x, y in y, x rispettivamente:

$$y = g_k^{-1}(x) \tag{1.189}$$

Definizione 41 Dicesi **arcocoseno** e si indica con $\arccos x$, la funzione $g_0^{-1}(x)$. Poniamo cioè:

$$\arccos x \stackrel{\text{def}}{=} g_0^{-1}(x)$$

Cioè, la funzione $\arccos x$ è l'inversa di $\cos x$ in $J_0 = [0, \pi]$ e risulta ivi strettamente decrescente.

Osservazione 10 La scrittura:

$$y = \arccos x$$

si legge: y è l'arco⁹ il cui coseno vale x . Infatti, se $y = \arccos x$, necessariamente $x = \cos y$.

In fig. 1.86 riportiamo il grafico di $\arccos x$.

Invertibilità locale della funzione $f_1(x) = \tan x$

Abbiamo visto che la funzione $\tan x$ è definita in

$$X_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{I}_k, \tag{1.190}$$

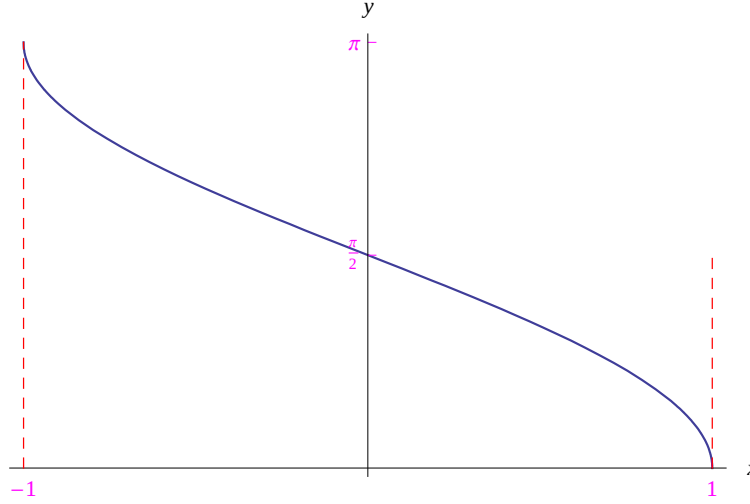
dove:

$$\tilde{I}_k = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

risultando strettamente crescente in ogni intervallo $\tilde{I}_k$. Sia $f_{1,k}$ la restrizione di f a $\tilde{I}_k$:

$$f_{1,k} : \tilde{I}_k \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

⁹Più precisamente, è l'unico arco (in $[0, \pi]$) il cui coseno vale x .


 Figura 1.86: Grafico di $\arccos x$.

Per determinare l'inversa $f_{1,k}^{-1}$ applichiamo il procedimento standard, ovvero la ricerca delle soluzioni dell'equazione:

$$f_{1,k}(x) = y$$

Segue:

$$x = f_{1,k}^{-1}(y) \quad (1.191)$$

La funzione $f_{1,k}^{-1}$ è definita in $(-\infty, +\infty)$ e il suo codominio è $\tilde{I}_k$. Dalla conservazione della monotonia (proposizione 5), si ha che $f_{1,k}^{-1}$ è strettamente crescente per ogni k .

Nella (1.191) ridefiniamo le variabili x, y in y, x rispettivamente:

$$y = f_{1,k}^{-1}(x) \quad (1.192)$$

Definizione 42 Dicesi **arcotangente** e si indica con $\arctan x$, la funzione $f_{1,0}^{-1}(x)$. Poniamo cioè:

$$\arctan x \stackrel{def}{=} f_{1,0}^{-1}(x)$$

Cioè, la funzione $\arctan x$ è l'inversa di $\tan x$ in $\tilde{I}_0 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e risulta ivi strettamente crescente.

Osservazione 11 La scrittura:

$$y = \arctan x$$

si legge: y è l'arco¹⁰ la cui tangente vale x . Infatti, se $y = \arctan x$, necessariamente $x = \tan y$.

In fig. 1.87 riportiamo il grafico di $\arctan x$.

¹⁰Più precisamente, è l'unico arco (in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) la cui tangente vale x .

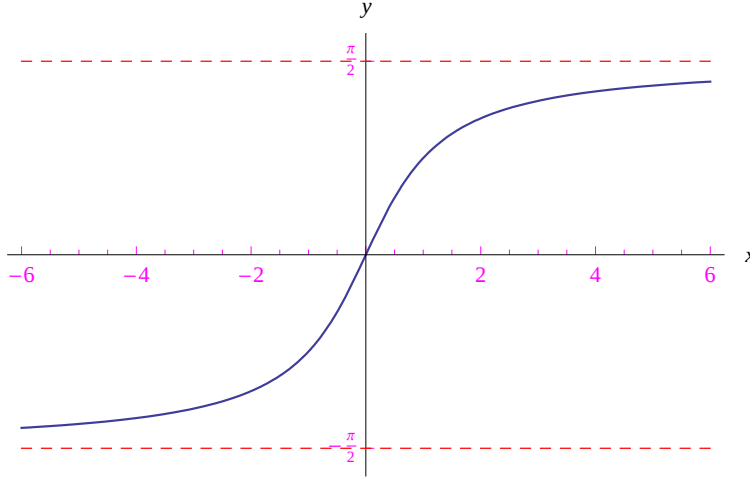


Figura 1.87: Grafico di $\arctan x$. Risulta $\inf \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\sup \arctan x = +\frac{\pi}{2}$.

Invertibilità locale della funzione $g_1(x) = \cot x$

Abbiamo visto che la funzione $\cot x$ è definita in

$$X_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{J}_k, \quad (1.193)$$

dove:

$$\tilde{J}_k = (k\pi, (k+1)\pi), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

risultando strettamente decrescente in ogni intervallo $\tilde{J}_k$. Sia $g_{1,k}$ la restrizione di f a $\tilde{J}_k$:

$$g_{1,k} : \tilde{J}_k \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

Per determinare l'inversa $g_{1,k}^{-1}$ applichiamo il procedimento standard, ovvero la ricerca delle soluzioni dell'equazione:

$$g_{1,k}(x) = y$$

Segue:

$$x = g_{1,k}^{-1}(y) \quad (1.194)$$

La funzione $g_{1,k}^{-1}$ è definita in $(-\infty, +\infty)$ e il suo codominio è $\tilde{J}_k$. Dalla conservazione della monotonia (proposizione 5), si ha che $g_{1,k}^{-1}$ è strettamente decrescente per ogni k .

Nella (1.194) ridefiniamo le variabili x, y in y, x rispettivamente:

$$y = g_{1,k}^{-1}(x) \quad (1.195)$$

Definizione 43 Dicesi **arcocotangente** e si indica con $\operatorname{arccot} x$, la funzione $g_{1,0}^{-1}(x)$. Poniamo cioè:

$$\operatorname{arccot} x \stackrel{\text{def}}{=} g_{1,0}^{-1}(x)$$

Cioè, la funzione $\operatorname{arccot} x$ è l'inversa di $\cot x$ in $\tilde{J}_0 = (0, \pi)$ e risulta ivi strettamente decrescente.

Osservazione 12 *La scrittura:*

$$y = \operatorname{arccot} x$$

si legge: y è l'arco¹¹ la cui cotangente vale x . Infatti, se $y = \operatorname{arccot} x$, necessariamente $x = \cot y$.

In fig. 1.88 riportiamo il grafico di $\operatorname{arccot} x$.

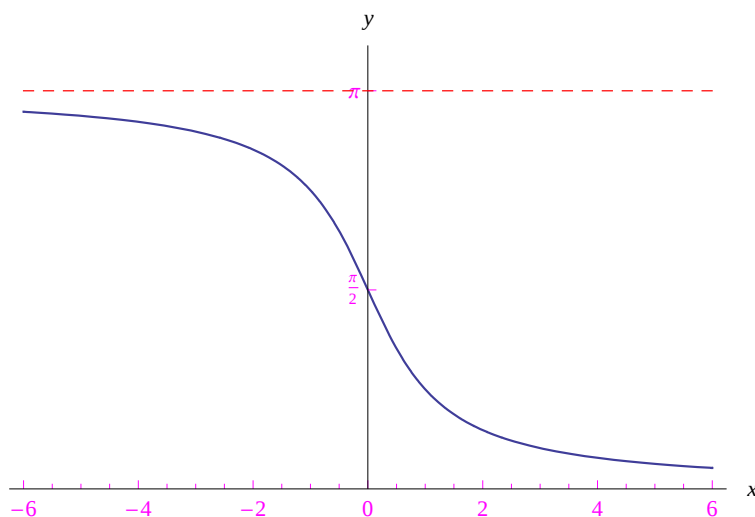


Figura 1.88: Grafico di $\operatorname{arccot} x$. Risulta $\inf \operatorname{arccot} x = 0$, $\sup \operatorname{arccot} x = \pi$.

In fig. 1.89 un grafico riassuntivo.

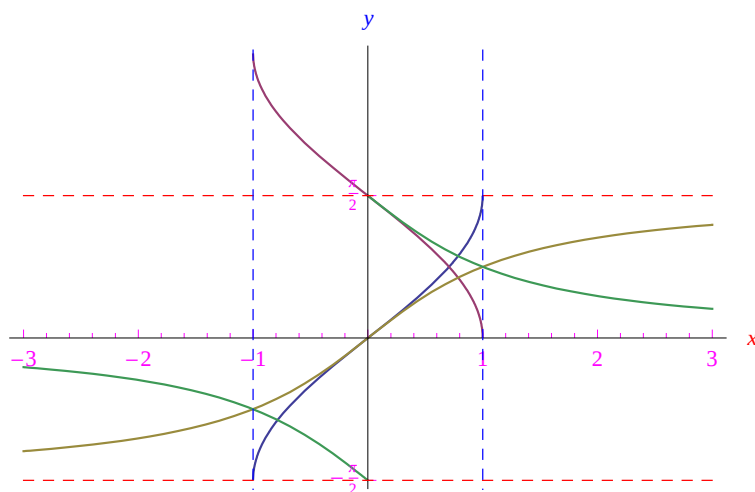


Figura 1.89: Grafico delle funzioni circolari inverse.

1.2.9 Identità fondamentali

Proposizione 11

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1] \quad (1.196)$$

¹¹Più precisamente, è l'unico arco (in $(0, \pi)$) la cui cotangente vale x .

Dimostrazione. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \arcsin x,$$

onde $x = \sin t$. Ciò implica:

$$\arccos x = \arccos(\sin t) = \arccos\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] = \frac{\pi}{2} - t,$$

cosicchè:

$$\arcsin x + \arccos x = t + \frac{\pi}{2} - t = \frac{\pi}{2}$$

■

Il grafico di fig. 1.90 illustra la (1.196).

Proposizione 12

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.197)$$

Dimostrazione. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \arctan x,$$

onde $x = \tan t$. Ciò implica:

$$\operatorname{arccot} x = \operatorname{arccot}(\tan t) = \operatorname{arccot}\left[\cot\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] = \frac{\pi}{2} - t,$$

cosicchè:

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = t + \frac{\pi}{2} - t = \frac{\pi}{2}$$

■

Il grafico di fig. 1.91 illustra la (1.197).

Proposizione 13

$$\arccos x + \arccos(-x) = \pi, \quad \forall x \in [-1, 1] \quad (1.198)$$

Dimostrazione. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \arccos x,$$

onde $x = \cos t$ e quindi $-x = -\cos t = \cos(\pi - t)$. Ciò implica:

$$\arccos x = \arccos[\cos(\pi - t)] = \pi - t,$$

cosicchè:

$$\arccos x + \arccos(-x) = t + \pi - t = \pi$$

■

Il grafico di fig. 1.91 illustra la (1.198).

Proposizione 14

$$\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot}(-x) = \pi, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.199)$$

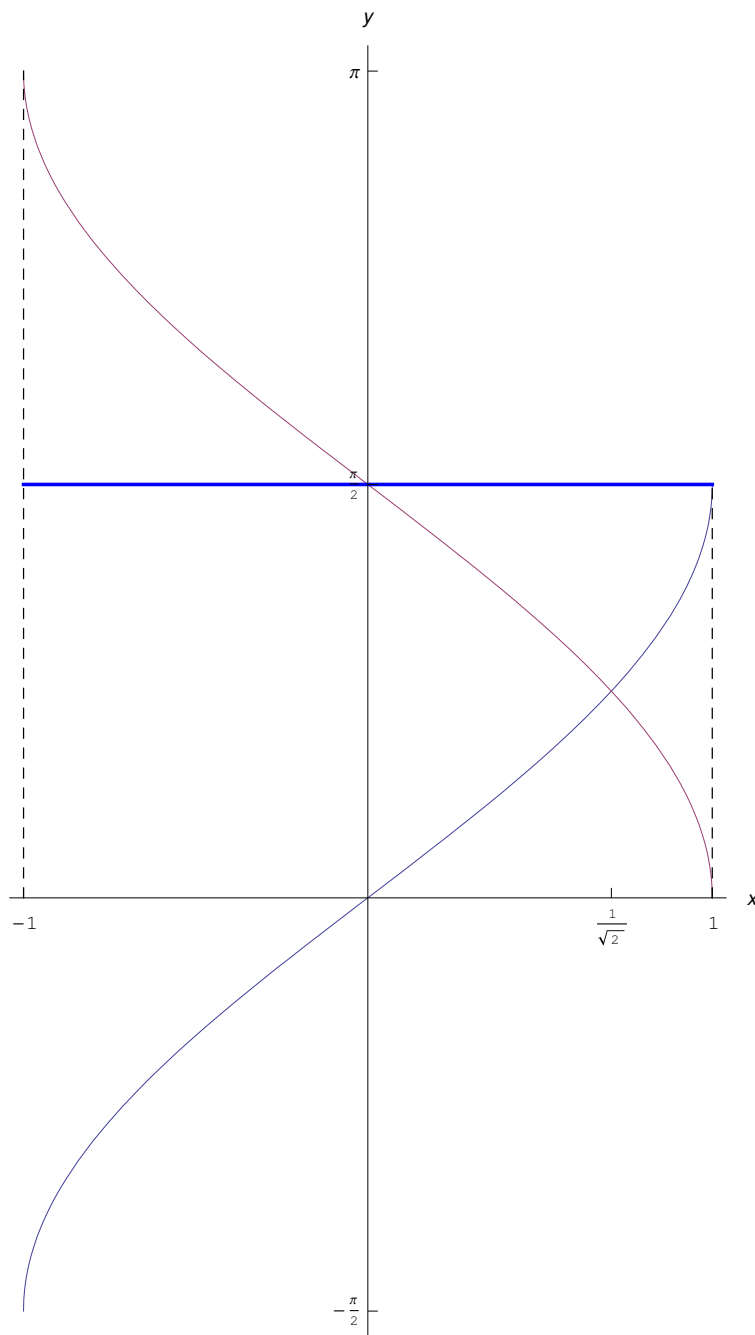


Figura 1.90: Sommando $\arcsin x$ e $\arccos x$ si ottiene la funzione costante $\frac{\pi}{2}$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

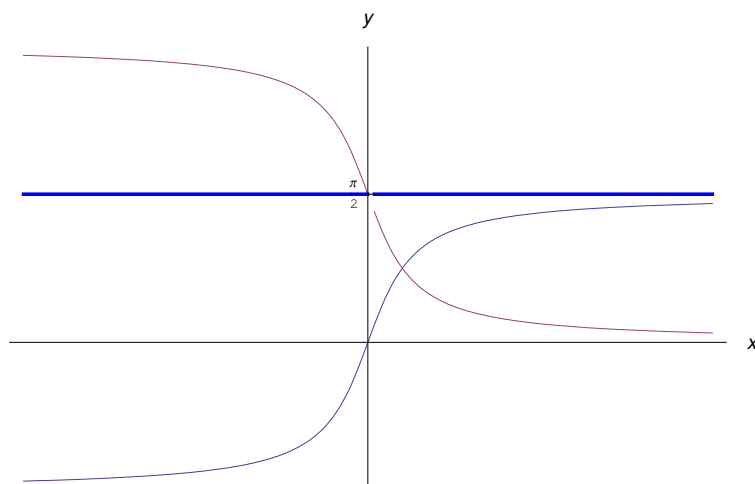


Figura 1.91: Sommando $\arctan x$ e $\operatorname{arccot} x$ si ottiene la funzione costante $\frac{\pi}{2}$ in $\mathbb{R}$.

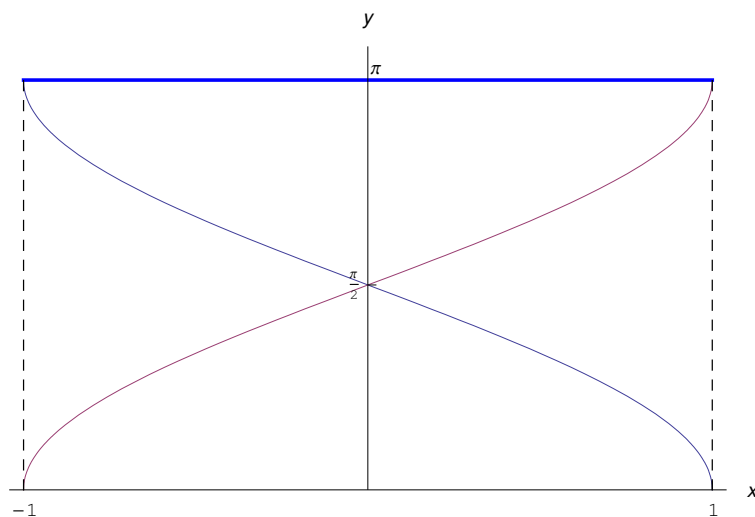


Figura 1.92: Sommando $\arccos x$ e $\arccos(-x)$ si ottiene la funzione costante π in $[-1, 1]$.

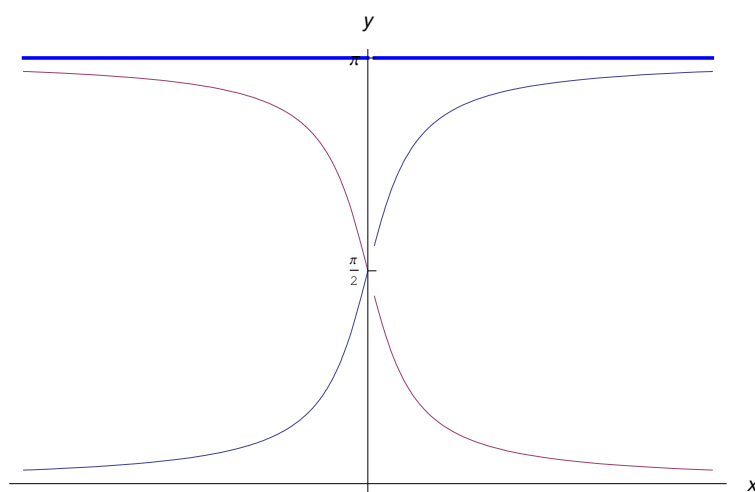


Figura 1.93: Sommando $\operatorname{arccot} x$ e $\operatorname{arccot}(-x)$ si ottiene la funzione costante π in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \operatorname{arccot} x,$$

onde $x = \cot t$ e quindi $-x = -\cot t = \cot(\pi - t)$. Ciò implica:

$$\operatorname{arccot} x = \operatorname{arccot} [\cot(\pi - t)] = \pi - t,$$

cosicchè:

$$\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot}(-x) = t + \pi - t = \pi$$

■

Il grafico di fig. 1.93 illustra la (1.199).

Proposizione 15

$$\operatorname{arccot} x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (1.200)$$

Dimostrazione. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \operatorname{arccot} x,$$

onde $x = \cot t$. Ciò implica:

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan(\tan t) = t,$$

onde l'asserto. ■

Proposizione 16

$$\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \forall x \in [-1, 1] \quad (1.201)$$

Dimostrazione. Dall'identità fondamentale della trigonometria piana (eq. (1.158)):

$$\begin{aligned} \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2} \\ \sin(\arccos x) &= \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}, \end{aligned}$$

da cui l'asserto. ■

Proposizione 17

$$\cot(\arctan x) = \tan(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (1.202)$$

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \cot(\arctan x) &= \frac{1}{\tan(\arctan x)} = \frac{1}{x} \\ \tan(\operatorname{arccot} x) &= \frac{1}{\cot(\operatorname{arccot} x)} = \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

da cui l'asserto. ■

Osserviamo che per definizione di funzione inversa deve aversi:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arccos x) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Se permutiamo le componenti delle suddette funzioni composte, otteniamo le nuove funzioni:

$$\arcsin(\sin x), \quad \arccos(\cos x), \quad (1.203)$$

entrambe definite in $\mathbb{R}$. Tuttavia le (1.203) non coincidono con la funzione identica, avendosi:

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) = x &\iff x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \arccos(\cos x) = x &\iff x \in [0, \pi] \end{aligned} \quad (1.204)$$

A titolo di esempio, studiamo la funzione:

$$f(x) = \arccos(\cos x)$$

- **Insieme di definizione**

È manifestamente $X = \mathbb{R}$, giacchè $|\cos x| \leq 1$.

- **Periodicità**

La funzione è periodica di periodo $T = 2\pi$, onde studiamo la funzione in $X_0 = [-\pi, \pi]$.

- **Parità**

La funzione è pari, per cui $\Gamma_f : y = f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse y . Quindi studiamo la funzione in $X'_0 = [0, \pi]$.

- **Grafico**

Dalla seconda delle (1.204) segue che in X'_0 il grafico è il segmento della bisettrice del primo e terzo quadrante di estremi $(0, 0)$ e $A(\pi, \pi)$. La simmetria rispetto all'asse y e la periodicità ci permettono di tracciare il grafico in $\mathbb{R}$ come riportato in fig. 1.94

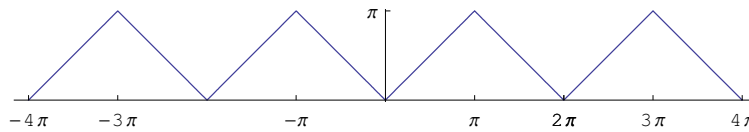


Figura 1.94: Grafico di $f(x) = \arccos(\cos x)$.

1.2.10 Identità notevoli

Proposizione 18

$$\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+y}} = \arctan \sqrt{\frac{x}{y}}$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+y}}, \quad \beta = \arctan \sqrt{\frac{x}{y}}$$

Ciò implica:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{x}{x+y}}, \quad \tan \beta = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

Dalla prima:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y} + 1}} = \frac{\tan \beta}{\sqrt{\tan^2 \beta + 1}} = \frac{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\sqrt{\frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta}}} = \sin \beta$$

Quindi deve essere:

$$\sin \alpha = \sin \beta \iff \beta = (-1)^k \alpha + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

da cui:

$$\arctan \sqrt{\frac{x}{y}} = (-1)^k \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+y}} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ma le funzioni $\arcsin$ e $\arctan$ sono definite per $k = 0$, onde l'asserto. ■

Capitolo 2

Limite di una funzione reale di variabile reale

2.1 Introduzione

2.1.1 Punti di accumulazione. Punti isolati. Punti di aderenza Teorema di Bolzano-Weierstrass

Senza perdita di generalità consideriamo un sottoinsieme non vuoto X di $\mathbb{R}$.

Definizione 44 Si dice **intorno** di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ un qualunque intervallo aperto contenente tale punto.

Per una questione di comodità, si considerano intorni centrati in x_0 , cioè intervalli aperti del tipo:

$$I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

dove $\delta > 0$ è il *raggio* (o *semiampiezza*) dell'intervallo. Per rammentare tale circostanza si usa scrivere $I_\delta(x_0)$. In questi appunti utilizzeremo indifferentemente entrambe le notazioni.

Definizione 45 Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice **punto di accumulazione** o **punto limite** per X , se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di X distinto da x_0 . In simboli

$$\forall I(x_0), \exists x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\}$$

È importante sottolineare che tale proprietà deve essere verificata *in ogni* intorno del punto assegnato. Ad esempio è facile persuadersi che nel caso dell'insieme degli interi naturali $\mathbb{N}$, è sempre possibile trovare un intorno di un punto assegnato in cui cadono elementi di $\mathbb{N}$ distinti dal predetto punto. Ma per quanto precede, tale proprietà deve essere verificata in ogni intorno e nel caso di $\mathbb{N}$ ciò non succede. Inoltre, se in un qualunque intorno di x_0 cade almeno un punto di X distinto da x_0 , necessariamente ne cadono infiniti.

Appare ora chiaro che la definizione di punto di accumulazione esprime rigorosamente la nozione intuitiva secondo cui esistono punti di X distinti da x_0 , ma arbitrariamente vicini a esso.

È istruttivo osservare che la proprietà di appartenenza a un insieme e la proprietà di essere punto di accumulazione, sono indipendenti. In altri termini, un punto x_0 può appartenere a

X senza essere punto di accumulazione, e viceversa. In quest'ultimo caso – cioè se x_0 non è punto di accumulazione per X – si dice che x_0 è **punto isolato** per X . In simboli:

$$x_0 \in X, \exists I(x_0) \mid X \cap I(x_0) - \{x_0\} = \emptyset$$

Si verifica immediatamente che gli elementi dell'insieme degli interi naturali $\mathbb{N}$, sono punti isolati. La definizione di punto di accumulazione si estende ai “punti all'infinito” ovvero a $+\infty$ e a $-\infty$. A tale scopo definiamo *intorno di* $+\infty$, ogni intervallo $(\delta, +\infty)$ per un assegnato $\delta > 0$, ed *intorno di* $-\infty$ ogni intervallo $(-\infty, -\delta)$:

$$I(+\infty) = (\delta, +\infty), \quad I(-\infty) = (-\infty, -\delta)$$

Ne segue che $+\infty$ è punto di accumulazione per X , se in ogni intorno di $+\infty$ cade almeno un elemento di X . Mentre $-\infty$ è punto di accumulazione per X , se in ogni intorno di $-\infty$ cade almeno un elemento di X .

Sussiste il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione:

Teorema 1 (**Teorema di Bolzano-Weierstrass**)

Un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}$ infinito e limitato, ammette almeno un punto di accumulazione.

2.1.2 Derivato di un insieme. Insiemi compatti

Definizione 46 *Comunque prendiamo un insieme X , si dice **derivato** di X l'insieme dei suoi punti di accumulazione al finito:*

$$\mathcal{D}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in \mathbb{R} \mid \xi \text{ è punto di accumulazione al finito per } X\}$$

Definizione 47 *Un insieme X è **chiuso** se contiene il proprio derivato:*

$$X \text{ è chiuso} \stackrel{\text{def}}{\iff} X \supseteq \mathcal{D}(X)$$

Ne segue che X è chiuso in uno dei due casi:

1. $\mathcal{D}(X) = \emptyset$ cioè X è privo di punti di accumulazione al finito;
2. X ammette punti di accumulazione al finito, i quali appartengono a X .

Esempio 12 *L'insieme $\mathbb{N}$ degli interi naturali è chiuso, giacché è privo di punti di accumulazione al finito. Tuttavia, è facile persuadersi che $+\infty$ è di accumulazione per $\mathbb{N}$. Alla stesso modo, l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi è chiuso. Gli unici punti di accumulazione sono all'infinito: $+\infty$ e $-\infty$.*

Segue immediatamente la proposizione:

Proposizione 19 *Il derivato di un qualunque insieme è chiuso.*

Definiamo

$$\bar{X} \stackrel{\text{def}}{=} X \cup \mathcal{D}(X) \tag{2.1}$$

Se $x_0 \in \bar{X}$ significa che si verifica uno dei seguenti casi:

1. $x_0 \in X$, $x_0 \notin \mathcal{D}(X)$ (punto isolato);
2. $x_0 \in X$, $x_0 \in \mathcal{D}(X)$ (punto di accumulazione al finito appartenente a X);
3. $x_0 \notin X$, $x_0 \in \mathcal{D}(X)$ (punto di accumulazione al finito non appartenente a X).

Definizione 48 L'insieme $\bar{X}$ si dice **l'aderenza** di X . I suoi elementi diconsi **punti di aderenza** per X .

Enunciamo senza dimostrare: l'aderenza di un qualunque insieme X è un insieme chiuso. Inoltre X è chiuso se e solo se coincide con la propria aderenza. Utilizzando un linguaggio suggestivo ma efficace, possiamo dire che l'aderenza di X è il più piccolo insieme chiuso contenente X . E per questa ragione l'aderenza di chiama anche la **chiusura** di X .

Definizione 49 Un insieme X si dice **compatto** se è chiuso e limitato.

Ad esempio, un qualunque intervallo $[a, b]$ è un insieme compatto.

2.2 Definizione di limite

2.2.1 Un esperimento con la calcolatrice

Consideriamo la funzione reale di una variabile reale:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad (2.2)$$

il cui insieme di definizione è $X = \mathbb{R} - \{1\}$. La funzione (2.2) è dunque definita su tutto l'asse reale, escluso il punto $x_0 = 1$. Incidentalmente, se proviamo a calcolare il valore assunto da f in x_0 , la sua espressione analitica restituisce la **forma indeterminata**¹ $\frac{0}{0}$. Procuriamoci allora una calcolatrice e andiamo a calcolare i valori assunti dalla funzione in punti *prossimi* a x_0 . Ad esempio, per $x = 1.1$, otteniamo:

$$f(1.1) \simeq 2.100$$

Avviciniamoci ulteriormente al punto x_0 :

$$\begin{aligned} f(1.01) &\simeq 2.010 \\ f(1.001) &\simeq 2.001 \end{aligned}$$

e così via. Ripetiamo ora lo stesso procedimento per $x < 1$:

$$\begin{aligned} f(0.9) &\simeq 1.900 \\ f(0.99) &\simeq 1.990 \\ f(0.999) &\simeq 1.999 \\ f(0.9999) &\simeq 1.9999 \end{aligned}$$

e così via.

¹Daremo più avanti la definizione rigorosa di *forma indeterminata* o *forma di indeterminazione*.

Da tali risultati si deduce che possiamo rendere arbitrariamente piccola la differenza $|f(x) - 2|$ a patto di *avvicinarci sufficientemente* a $x_0 = 1$. Tutto ciò è incorporato nell'espressione simbolica:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, \quad (2.3)$$

dove il simbolo $\lim$ denota l'**operatore limite**.

Osserviamo altresì che il problema dell'indeterminazione del valore assunto in $x = 1$ dalla predetta funzione si risolve semplificando la sua espressione analitica. Risulta infatti:

$$f(x) = x + 1,$$

per cui è $f(1) = 2$. Tuttavia, esistono casi in cui ciò non è possibile. Ad esempio, supponiamo di avere la funzione:

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x}, \quad (2.4)$$

definita in $\mathbb{R} - \{0\}$. Se proviamo a calcolare $f(0)$ ci troviamo davanti a una divisione per zero:

$$f(0) = \arctan \frac{1}{0}$$

Ripetendo l'esperimento con la calcolatrice, si trova per $x > 0$:

$$f(0.5) \simeq 1.10715$$

$$f(0.4) \simeq 1.19029$$

$$f(0.3) \simeq 1.27934$$

$$f(0.2) \simeq 1.3734$$

$$f(0.1) \simeq 1.47113$$

Se poi partiamo da $x = -0.5$ e ci avviciniamo all'origine, otteniamo i seguenti valori²:

$$f(-0.5) \simeq -1.10715$$

$$f(-0.4) \simeq -1.19029$$

$$f(-0.3) \simeq -1.27934$$

$$f(-0.2) \simeq -1.3734$$

$$f(-0.1) \simeq -1.47113$$

Vediamo, dunque, che se ci avviciniamo al punto $x = 0$ da destra, i valori assunti dalla funzione si avvicinano a 1.47113. Conclusione analoga se partiamo da un punto $x < 0$ per poi "marciare" verso l'origine. Ne concludiamo che pur non essendo la funzione (2.4) non definita in $x = 0$, man mano che ci avviciniamo a tale punto, la funzione tende a un valore determinato unicamente dalla "direzione di marcia".

2.2.2 Definizione di convergenza

Dopo questa introduzione per così dire, numerica, formuliamo una definizione più rigorosa. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se x_0 è punto di accumulazione, esistono punti di X arbitrariamente vicini a x_0 , per cui si apre il problema di studiare il comportamento della funzione f nelle "immediate vicinanze" di x_0 (più rigorosamente, in un intorno del predetto punto). È chiaro

²Sono immediati, in quanto l' $\arctan$ è dispari.

che è necessario distinguere i due casi: 1) la funzione è definita in x_0 ; 2) la funzione non è definita in x_0 (che è comunque punto di accumulazione per l'insieme di definizione di f). Sussiste, dunque, la seguente definizione:

Definizione 50 La funzione f è **convergente** in x_0 , se esiste un numero reale l tale che: Comunque prendiamo un intorno J_ε di l i.e. $J_\varepsilon = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, possiamo associare un intorno I_{δ_ε} di x_0 i.e. $I_{\delta_\varepsilon} = (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$ in modo che i valori assunti da f nei punti del predetto intorno distinti da x_0 , appartengano a J_ε . In simboli:

$$\forall J_\varepsilon = (l - \varepsilon, l + \varepsilon), \quad \exists I_{\delta_\varepsilon} = (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon} - \{x_0\} \implies f(x) \in J_\varepsilon$$

o ciò che è lo stesso:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

Il numero reale l si chiama **il limite della funzione in** x_0 . Si dice che la funzione f **converge** (o **tende a** l) **per** x **che tende a** x_0 (o **per** x **tendente a** x_0).

La predetta definizione è compattata in una delle due scritture simboliche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$$

Osservazione 13 L'ampiezza dell'intorno di x_0 è - in generale - diversa da ε , ma dipende comunque da tale numero reale.

Interpretazione geometrica della convergenza La definizione di convergenza ha un'immediata interpretazione geometrica come vediamo negli esempi seguenti.

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } 0 \leq x < 2, \quad x > 2 \\ \frac{5}{2}, & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad (2.5)$$

Congetturiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{2} \quad (2.6)$$

Per verificarne la correttezza dobbiamo risolvere la seguente disequazione:

$$\left| \sqrt{x} - \sqrt{2} \right| < \varepsilon$$

Cioè

$$0 \leq x < 2 + 2\sqrt{2}\varepsilon + \varepsilon^2, \quad x > 2 - 2\sqrt{2}\varepsilon + \varepsilon^2$$

Se poniamo

$$\delta_\varepsilon = 2\sqrt{2}\varepsilon + \varepsilon^2$$

Deve essere $\delta_\varepsilon > 0$, per cui $\varepsilon^2 - 2\sqrt{2}\varepsilon < 0 \iff \varepsilon \in (0, 2\sqrt{2})$. Inoltre:

$$x < 2 + \delta_\varepsilon < 2 + 2\sqrt{2} + \varepsilon^2$$

Ne consegue:

$$2 - \delta_\varepsilon < x < 2 + \delta_\varepsilon \implies \left| \sqrt{x} - \sqrt{2} \right| < \varepsilon$$

Quindi:

$$\forall \varepsilon \in (0, 2\sqrt{2}) , \exists \delta_\varepsilon = 2\sqrt{2}\varepsilon - \varepsilon^2 \mid x \in (2 - \delta_\varepsilon, 2 + \delta_\varepsilon) - \{2\} \implies |\sqrt{x} - 2| < \varepsilon ,$$

cioè la (2.6). Si noti che la condizione $\varepsilon \in (0, 2\sqrt{2})$ non inficia la definizione 50, giacchè secondo tale definizione il numero reale positivo ε deve essere arbitrariamente piccolo. Cossicchè:

$$\begin{aligned} \forall J_{\varepsilon \in (0, 2\sqrt{2})}(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2} + \varepsilon) , \\ \exists \delta_\varepsilon &= 2\sqrt{2}\varepsilon - \varepsilon^2 \mid x \in (2 - \delta_\varepsilon, 2 + \delta_\varepsilon) - \{2\} \\ &\implies (x, f(x)) \in \mathcal{R} = [(2 - \delta_\varepsilon, 2 + \delta_\varepsilon) - \{2\}] \times J_\varepsilon(l) . \end{aligned}$$

Interpretiamo graficamente tali risultati attraverso la fig. 2.1.

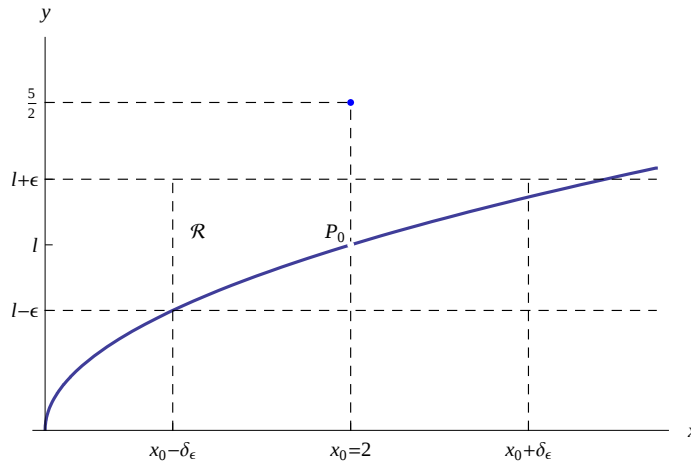


Figura 2.1: Diagramma cartesiano della funzione (2.5). Qui è $x_0 \in X$, $f(x_0) \neq l$. Risulta: $\forall J_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, $\exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0) - \{x_0\} \implies (x, f(x)) \in \mathcal{R} = I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \times J_\varepsilon(l)$. Ne consegue che i punti del grafico della funzione di ascissa $x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0) - \{x_0\}$ sono interni al rettangolo $\mathcal{R}$ centrato in $P_0(x_0, l) \notin \gamma : y = f(x)$ e di lati di lunghezza $2\delta_\varepsilon$ e 2ε , paralleli all'asse x e all'asse y rispettivamente.

Consideriamo ora la funzione:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, 2) \cup (2, +\infty) \quad (2.7)$$

La (2.7) non è definita in $x_0 = 2$. È facile persuadersi che anche in questo caso riesce:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{2},$$

la cui interpretazione grafica è riportata in fig. 2.2.

Infine consideriamo:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Ovviamente:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{2},$$

graficamente interpretato in fig. 2.2.

L'analisi precedente mostra che nel caso di convergenza, il limite di una funzione f non è correlato al valore assunto da f nel punto x_0 . Infatti, la circostanza $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, è da ritenersi un caso particolare di convergenza.

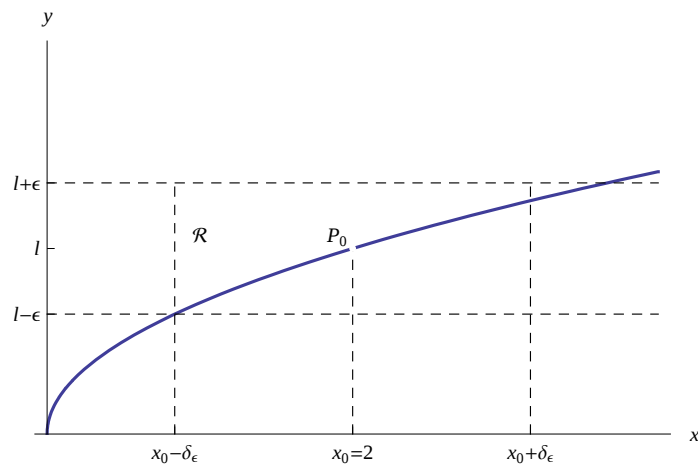


Figura 2.2: Qui è $x_0 \notin X$.

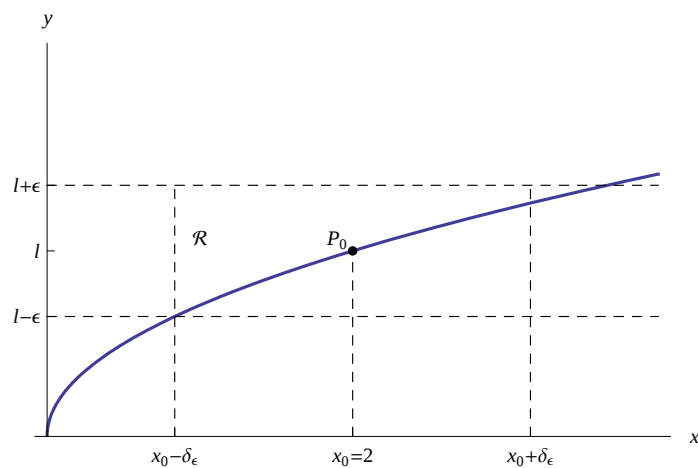


Figura 2.3: In questo caso la funzione è definita in $x_0 = 2$. Inoltre, risulta $l = f(x_0)$: il limite coincide con il valore assunto da f nel punto x_0 .

Esempio 13 Verifichiamo che

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} [x] \quad (2.8)$$

dove $[x]$ è la funzione parte intera di x .

Ponendo $\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} [x]$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < |x - 1| < \delta_\varepsilon \implies |[x] - \lambda| < \varepsilon \quad (2.9)$$

cioè

$$\lambda - \varepsilon < [x] < \lambda + \varepsilon, \text{ per } 1 - \delta_\varepsilon < |x| < 1 + \delta_\varepsilon \quad (2.10)$$

Mettiamoci a sinistra di 1:

$$1 - \delta_\varepsilon < x < 1 \implies [x] = 0$$

La (2.10) si riscrive:

$$\lambda - \varepsilon < 0 < \lambda + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (2.11)$$

che implica $\lambda = 0$. Per assurdo: $\lambda > 0 \implies \forall \varepsilon \in (0, \lambda), \lambda - \varepsilon > 0$ per cui la (2.11) è assurda;

$\lambda < 0 \implies \forall \varepsilon \in (0, |\lambda|), \lambda + \varepsilon = -|\lambda| + \varepsilon < 0$ per cui la (2.11) è assurda. Ne segue $\lambda = 0$.

Mettiamoci a destra di 1:

$$1 < x < 1 + \delta_\varepsilon \implies [x] = 1$$

La (2.10) si riscrive:

$$\lambda - \varepsilon < 1 < \lambda + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (2.12)$$

che implica $\lambda = 1$. Per la dimostrazione si procede in maniera analoga al caso $\lambda > 0$.

Conclusione: $\nexists$ un unico valore di λ tale da verificare la (2.9). In virtù del teorema di unicità del limite³, non esiste il limite $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$. Tale conclusione si generalizza: $\nexists \lim_{x \rightarrow \pm n} [x]$.

La definizione di convergenza si estende immediatamente quando x_0 è punto di accumulazione all'infinito. Ad esempio se X non è limitato superiormente, la scrittura:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R},$$

significa (con ovvio significato dei simboli):

$$\forall J_\varepsilon = (l - \varepsilon, l + \varepsilon), \exists I_{\delta_\varepsilon} = (\delta_\varepsilon, +\infty) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon} \implies f(x) \in J_\varepsilon$$

Equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x > \delta_\varepsilon \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

Allo stesso modo, se X non è limitato inferiormente, la scrittura:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R},$$

³Studieremo tale importante teorema in una sezione successiva.

significa

$$\forall J_\varepsilon = (l - \varepsilon, l + \varepsilon), \exists I_{\delta_\varepsilon} = (-\infty, -\delta_\varepsilon) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon} \implies f(x) \in J_\varepsilon$$

oppure

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x < -\delta_\varepsilon \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

L'interpretazione geometrica della convergenza per $x \rightarrow +\infty$ è riportata in fig. 2.4 dove

$$S_\varepsilon = [\delta_\varepsilon, +\infty) \times [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$$

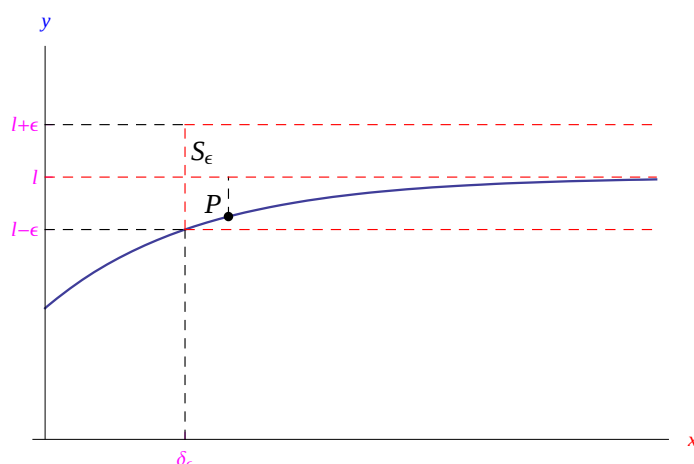


Figura 2.4: Interpretazione geometrica della convergenza per $x \rightarrow +\infty$.

Ne segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che i punti del diagramma cartesiano della funzione aventi ascissa $x > \delta_\varepsilon$ sono interni alla striscia S_ε . La grandezza $|f(x) - l|$ è la distanza tra il punto $P(x, f(x))$ del diagramma e la retta orizzontale $r : y = l$. Quindi se la funzione converge a l per $x \rightarrow +\infty$, la distanza tra P e la predetta retta tende a zero. Ciò si esprime dicendo che la retta r è un **asintoto orizzontale** del grafico di f .

Notiamo incidentalmente che nel caso appena illustrato risulta

$$f(x) < l, \quad \forall x \in (\delta_\varepsilon, +\infty)$$

Si usa allora dire che f tende a l per valori minori di l e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^-$$

Viceversa se

$$f(x) > l, \quad \forall x \in (\delta_\varepsilon, +\infty)$$

e si dice che f tende a l per valori maggiori di l

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^+$$

Naturalmente si possono avere funzioni per la quali non si verifica nessuno dei due casi, come ad esempio per il grafico illustrato in fig. 2.5.

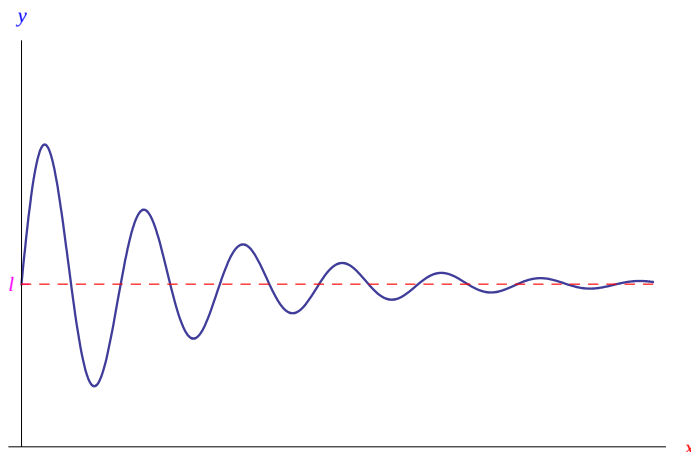


Figura 2.5: Per $x \rightarrow +\infty$ il grafico della funzione compie infinite oscillazioni intorno all'asintoto. L'ampiezza delle oscillazioni tende comunque a zero.

Esempio 14 Verifichiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1^- \quad (2.13)$$

Posto $f(x) = 1 - e^{-x}$, dobbiamo risolvere

$$|1 - e^{-x} - 1| < \varepsilon \iff e^{-x} < \varepsilon$$

Cioè

$$x > -\ln \varepsilon \begin{cases} > 0, & \text{se } 0 < \varepsilon < 1 \\ < 0, & \text{se } \varepsilon > 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\forall \varepsilon \geq (0, 1), \exists \delta_\varepsilon = -\ln \varepsilon > 0 \mid x > \delta_\varepsilon \implies |f(x) - 1| < \varepsilon$$

ovvero

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$$

Per completare l'esempio, dobbiamo verificare che la funzione tende a 1^- i.e. $f(x) < 1$ definitivamente intorno a $+\infty$. Risulta:

$$1 - e^{-x} < 1 \iff e^{-x} > 0$$

che è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$, onde la (2.13).

La funzione assegnata è nota come **salita esponenziale** ed è molto utilizzata nelle applicazioni. Riportiamo il grafico in Fig. 2.6, da cui vediamo che la distanza tra il generico punto $P \in \gamma : y = 1 - e^{-x}$ e l'asintoto orizzontale è

$$\text{dist}(P, r) = |1 - e^{-x} - 1| = e^{-x}$$

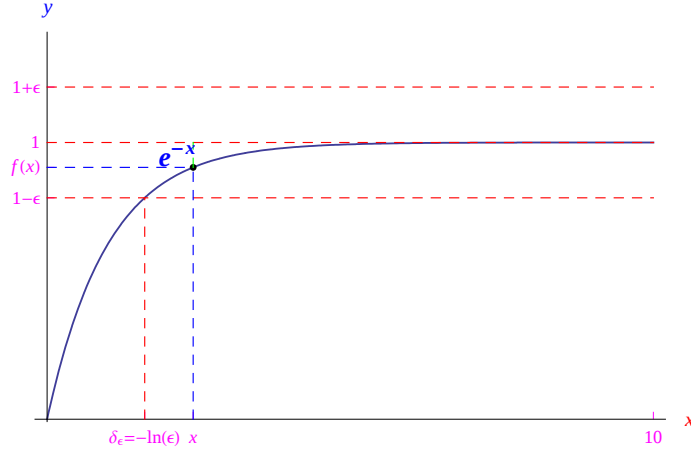
Dalla definizione di convergenza segue immediatamente:

Proprietà 1 Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione costante:

$$f(x) = c, \quad \forall x \in X$$

si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c, \quad \forall x_0 \in X$$


 Figura 2.6: Grafico della salita esponenziale $f(x) = 1 - e^{-x}$.

2.2.3 Definizione di divergenza

Sia

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.14)$$

Denotando con x_0 un punto di accumulazione al finito per X , sussiste la seguente definizione:

Definizione 51 La funzione f è **divergente positivamente** in x_0 se:

$$\forall J_\varepsilon = (\varepsilon, +\infty), \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) - \{x_0\} \implies f(x) \in J_\varepsilon, \quad (2.15)$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies f(x) > \varepsilon$$

In altri termini, la funzione f diverge positivamente in x_0 se intorno a tale punto i valori assunti da f sono definitivamente maggiori di un numero reale positivo assegnato ad arbitrio.

Locuzioni alternative: 1) f **tende a** $+\infty$ **per** x **che tende a** x_0 ; 2) f **ha per limite** $+\infty$ **nel punto** x_0 . 3) f **diverge a** $+\infty$ **per** x **che tende a** x_0 .

La definizione (51) è compattata nella scrittura:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad (2.16)$$

Similmente abbiamo la seguente definizione:

Definizione 52 La funzione f è **divergente negativamente** in x_0 se:

$$\forall J_\varepsilon = (-\infty, -\varepsilon), \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) - \{x_0\} \implies f(x) \in J_\varepsilon$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies f(x) < -\varepsilon$$

In altri termini, la funzione f diverge negativamente in x_0 se intorno a tale punto i valori assunti da f sono definitivamente minori di un numero reale negativo assegnato ad arbitrio.

Locuzioni alternative: 1) f **tende a** $-\infty$ **per** x **che tende a** x_0 ; 2) f **ha per limite** $-\infty$ **nel punto** x_0 . 3) f **diverge a** $-\infty$ **per** x **che tende a** x_0 .

Scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad (2.17)$$

Interpretazione geometrica della divergenza Comunque prendiamo una retta orizzontale $r_\varepsilon : y = \varepsilon > 0$, esiste in corrispondenza un intorno $I_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ di x_0 di raggio δ_ε tale che i punti del grafico di f , cioè $P(x, f(x))$, giacciono al di sopra di r_ε per ogni $x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0) - \{x_0\}$. Più precisamente, appartengono alla striscia aperta $S_\varepsilon = I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \times (\varepsilon, +\infty)$.

Tutto ciò è riassunto in fig. 2.7 in cui si riporta il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{(x - x_0)^2}, \text{ con } x_0 \in \mathbb{R} \text{ assegnato ad arbitrio}$$

definita in $X = \mathbb{R} - \{x_0\}$.

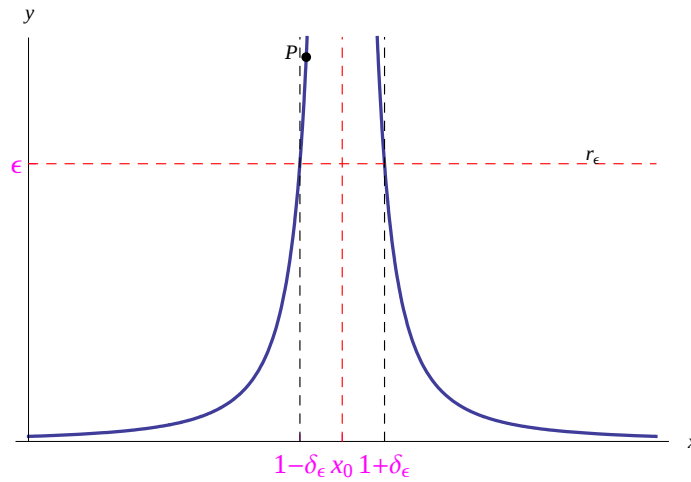


Figura 2.7: Interpretazione geometrica della definizione (51).

Verifichiamo infatti che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^2} = +\infty \quad (2.18)$$

Si tratta di risolvere:

$$\frac{1}{(x - x_0)^2} > \varepsilon,$$

cioè

$$(x - x_0)^2 < \frac{1}{\varepsilon},$$

la cui soluzione è:

$$|x - x_0| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Pertanto

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \delta_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mid 0 < |x - x_0| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \implies \frac{1}{(x - x_0)^2} > \varepsilon,$$

onde la (2.18).

L'interpretazione geometrica della definizione (52) è la seguente:

Comunque prendiamo una retta orizzontale $r_\varepsilon : y = \varepsilon > 0$, esiste in corrispondenza un intorno $I_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ di x_0 di raggio δ_ε tale che i punti del grafico di f , cioè $P(x, f(x))$, giacciono al di sopra di r_ε per ogni $x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0) - \{x_0\}$. Più precisamente, appartengono alla striscia $S'_\varepsilon = I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \times (-\infty, -\varepsilon)$.

Tutto ciò è riassunto in fig. ?? in cui si riporta il grafico della funzione:

$$f(x) = -\frac{1}{(x-x_0)^2}, \text{ con } x_0 > 0$$

Verifichiamo infatti che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad (2.19)$$

Si tratta di risolvere:

$$-\frac{1}{(x-x_0)^2} < -\varepsilon \iff \frac{1}{(x-x_0)^2} > \varepsilon,$$

cioè

$$(x-x_0)^2 < \frac{1}{\varepsilon},$$

la cui soluzione è:

$$|x-x_0| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Pertanto

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \delta_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mid 0 < |x-x_0| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \implies \frac{1}{(x-x_0)^2} > \varepsilon,$$

onde la (2.19).

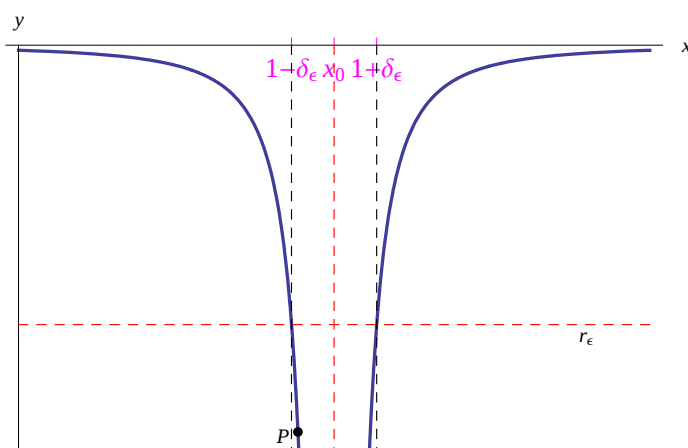


Figura 2.8: Interpretazione geometrica della definizione 52.

Il numero reale $|x-x_0|$ è la distanza tra il punto $P(x, f(x))$ del diagramma cartesiano della funzione e la retta verticale $r: x = x_0$. Se f è divergente (positivamente o negativamente) nel punto x_0 , l'ordinata di P tende a $+\infty$ o a $-\infty$ per x che tende a x_0 , mentre $\text{dist}(P, r) \rightarrow 0$. Ciò si esprime dicendo che la retta r è un **asintoto verticale** del diagramma della funzione.

Osservazione 14 Il punto di accumulazione x_0 può ovviamente appartenere o non appartenere all'insieme di definizione X . In caso di appartenenza si ha:

$$f(x_0) \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

Ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} 50, & \text{se } x = 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2}, & \text{se } x \neq 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Ovviamente $\lim_{x \rightarrow 1} = +\infty$, mentre $f(1) = 50$. Ciò non deve sorprendere perché come nel caso della convergenza, il valore assunto dalla funzione in x non ha relazione alcuna con il limite di f . Il grafico della funzione (2.20) è riportato in Fig. 2.9

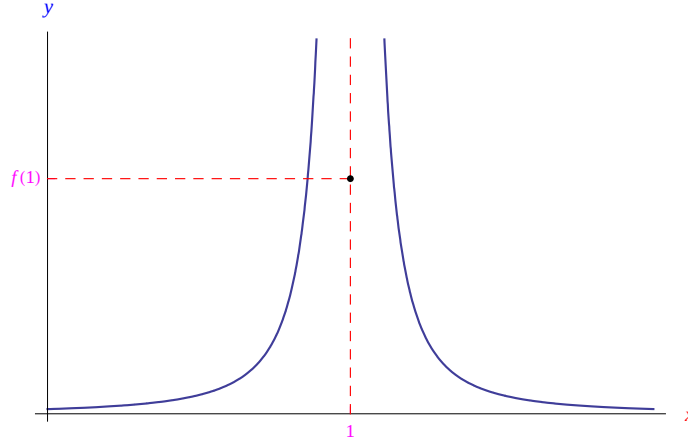


Figura 2.9: Diagramma cartesiano della funzione (2.20).

La definizione di divergenza si estende immediatamente quando x_0 è punto di accumulazione all'infinito. Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (2.21)$$

simboleggia la seguente definizione:

Definizione 53 La funzione f è **divergente positivamente** per $x \rightarrow +\infty$, se:

$$\forall J_\varepsilon = (\varepsilon, +\infty), \exists I_{\delta_\varepsilon} = (\delta_\varepsilon, +\infty) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon} \implies f(x) \in J_\varepsilon, \quad (2.22)$$

che equivale a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, x > \delta_\varepsilon \implies f(x) > \varepsilon$$

La scrittura

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad (2.23)$$

è il risultato della seguente definizione:

Definizione 54 La funzione f è **divergente negativamente** per $x \rightarrow +\infty$, se:

$$\forall J_\varepsilon = (-\infty, -\varepsilon), \exists I_{\delta_\varepsilon} = (\delta_\varepsilon, +\infty) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon} \implies f(x) \in J_\varepsilon, \quad (2.24)$$

equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, x > \delta_\varepsilon \implies f(x) < -\varepsilon$$

Definizioni analoghe per $x \rightarrow -\infty$:

Definizione 55 La funzione f è **divergente positivamente** per $x \rightarrow -\infty$, se:

$$\forall J_\varepsilon = (\varepsilon, +\infty), \exists I_{\delta_\varepsilon} = (-\infty, -\delta_\varepsilon) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon} \implies f(x) \in J_\varepsilon, \quad (2.25)$$

equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, x < -\delta_\varepsilon \implies f(x) > \varepsilon$$

Simbolicamente, tale proprietà è espressa da:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Definizione 56 La funzione f è **divergente negativamente** per $x \rightarrow -\infty$, se:

$$\forall J_\varepsilon = (-\infty, -\varepsilon), \exists I_{\delta_\varepsilon} = (-\infty, -\delta_\varepsilon) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon} \implies f(x) \in J_\varepsilon, \quad (2.26)$$

equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, x < -\delta_\varepsilon \implies f(x) < -\varepsilon$$

Simbolicamente, tale proprietà è espressa da:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

L'interpretazione geometrica della definizione (53) è la seguente:

Comunque prendiamo una retta orizzontale $r_\varepsilon : y = \varepsilon > 0$, esiste in corrispondenza un intorno di $+\infty$ i.e. un intervallo $(\delta_\varepsilon, +\infty)$ tale che i punti del grafico di f , cioè $P(x, f(x))$, giacciono al di sopra di r_ε per ogni $x \in (\delta_\varepsilon, +\infty)$. Più precisamente, appartengono alla regione $\mathcal{R}_\varepsilon = (\delta_\varepsilon, +\infty) \times (\varepsilon, +\infty)$ come illustrato in fig. 2.10

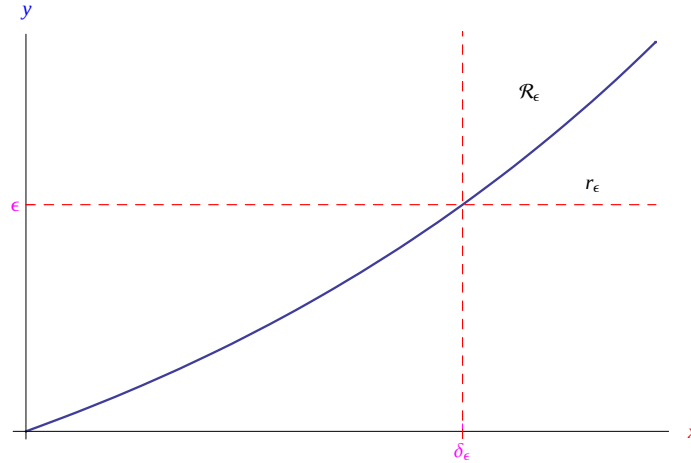


Figura 2.10: Interpretazione geometrica della definizione (53).

2.2.4 Regolarità di una funzione. Teorema di unicità del limite

Sia x_0 un punto di accumulazione (al finito o all'infinito) per l'insieme X di definizione di una funzione f reale di una variabile reale.

Definizione 57 Si dice che f è **regolare** in x_0 se è ivi dotata di limite (finito o infinito). Cioè

$$\exists l \in [-\infty, +\infty] \mid \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Nel caso contrario, si dice che f è **non regolare** in x_0 .

Nel caso di non regolarità è consuetudine dire, sia pur impropriamente, che in x_0 il limite di f non esiste. Per le funzioni regolari, sussiste il teorema:

Teorema 2 (Teorema di unicità del limite)

$$f \text{ è regolare in } x_0 \implies \exists! l \in [-\infty, +\infty] \mid \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, supponiamo che f sia convergente in x_0 , punto di accumulazione al finito. Procedendo per assurdo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l' \neq l$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - l| < \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l' \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta'_\varepsilon > 0 \mid x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon \implies |f(x) - l'| < \varepsilon)$$

Sia $\sigma_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon, \delta'_\varepsilon\}$, onde:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma_\varepsilon > 0 \mid x \in X, 0 < |x - x_0| < \sigma_\varepsilon \implies |f(x) - l| < \varepsilon, \quad |f(x) - l'| < \varepsilon$$

Cioè:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \\ l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon \end{array} \right\} &\iff \left\{ \begin{array}{l} l - \varepsilon < l' + \varepsilon \\ l' - \varepsilon < l + \varepsilon \end{array} \right\} \iff \\ &\iff -2\varepsilon < l - l' < 2\varepsilon \iff |l - l'| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

In forza dell'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$:

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|l - l'| \implies |l - l'| < 2\varepsilon < |l - l'|,$$

da cui la disuguaglianza assurda $|l - l'| < |l - l'|$, onde la tesi. ■

Di seguito alcuni esempi di funzioni non regolari:

Esempio 15 Consideriamo la **funzione signum** $f(x) = \operatorname{sgn} x$, così definita:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Mostriamo che tale funzione non converge ad alcun limite per $x \rightarrow 0$. Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x = 0$, per cui

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < |x| < \delta_\varepsilon \implies |\operatorname{sgn} x| = 1 < \varepsilon$$

disuguaglianza manifestamente assurda. In termini di intorni: comunque prendiamo un intorno $J_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$, esiste in corrispondenza un intorno $I_{\delta_\varepsilon}(0) = (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$ tale che

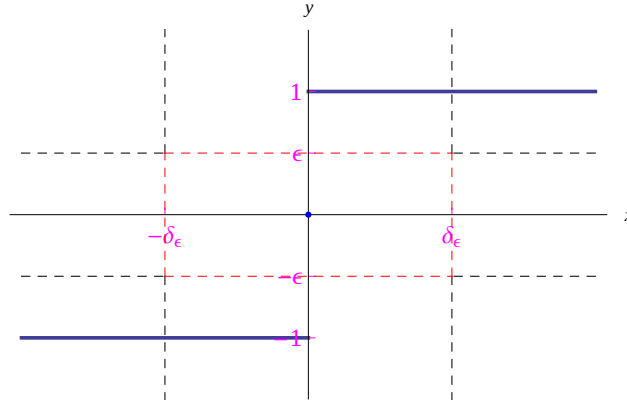


Figura 2.11: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Comunque prendiamo un intorno $J_{\varepsilon \in (0,1)}(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$, possiamo associare ad esso esclusivamente intorni $I_{\delta_\varepsilon}(0)$ tali che $x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) - \{0\} \implies f(x) \notin J_{\varepsilon \in (0,1)}(0)$.

per ogni $x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) - \{0\}$ riesce $\operatorname{sgn} x \in J_\varepsilon(0)$. E ciò deve verificarsi per ogni $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo. Di contro, basta assumere $\varepsilon \in (0,1)$ per violare tale proprietà, avendosi:

$$\forall J_{\varepsilon \in (0,1)}(0), \nexists I_{\delta_\varepsilon}(0) = (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) - \{0\} \implies \operatorname{sgn} x \in J_{\varepsilon \in (0,1)}(0),$$

come mostrato in fig. 2.11.

Tale procedimento si generalizza a un qualunque $l = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x \neq 0$; ad esempio per $l = 1$:

$$\forall J_{\varepsilon \in (0,2)}(1), \nexists I_{\delta_\varepsilon}(0) = (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) - \{0\} \implies f(x) \in J_{\varepsilon \in (0,2)}(1),$$

come mostrato in fig. 2.12.

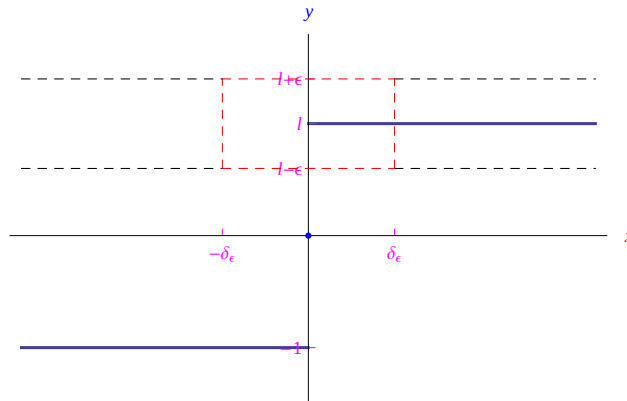


Figura 2.12: Comunque prendiamo un intorno $J_{\varepsilon \in (0,2)}(1)$ del punto $y = 1$, è possibile associare ad esso intorni $I_{\delta_\varepsilon}(0)$ tali che $x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) - \{0\} \implies f(x) \notin J_{\varepsilon \in (0,2)}(1)$.

Ne consegue che la funzione $\operatorname{sgn} x$ è non regolare in $x = 0$.

Esempio 16 La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è non regolare in $x = 0$, poichè in ogni intorno di tale punto assume valori positivi e negativi.

2.3 Osservazioni ed esempi

2.3.1 Funzioni definitivamente limitate e convergenti. Funzioni che tendono a un limite l per valori maggiori o minori di l . Funzioni infinitesime

Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 58 La funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ verifica definitivamente una proprietà $\mathcal{P}$ intorno al punto di accumulazione x_0 , se esiste un intorno I di x_0 tale che per $x \in X \cap I - \{x_0\}$, la proprietà $\mathcal{P}$ è verificata.

Proposizione 20

$$\begin{aligned} f \text{ è convergente in } x_0 &\implies (f \text{ è definitivamente limitata intorno a } x_0) \\ f \text{ è divergente positivamente in } x_0 &\implies \left(\begin{array}{c} f \text{ non è definitivamente limitata superiormente} \\ \text{intorno a } x_0 \end{array} \right) \\ f \text{ è divergente negativamente in } x_0 &\implies \left(\begin{array}{c} f \text{ non è definitivamente limitata inferiormente} \\ \text{intorno a } x_0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di limite ■

Osservazione 15 Le implicazioni della proposizione precedente non sono invertibili. Ad esempio, una funzione può essere definitivamente limitata intorno al punto di accumulazione al finito x_0 , senza essere ivi convergente.

Proposizione 21 La funzione $\sin x$ è non regolare per $|x| \rightarrow +\infty$

Dimostrazione. Per $|x| \rightarrow +\infty$ la funzione $\sin x$ compie infinite oscillazioni tra -1 e 1 , per cui $\nexists l \in \mathbb{R} \mid |\sin x - l| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Idem per la divergenza.

Per il lettore che conosce la nozione di limite di una successione, proponiamo la seguente dimostrazione.

Posto $f(x) = \sin x$, osserviamo che i suoi zeri sono:

$$x_k = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

I punti in cui è $f(x) = 1$:

$$x'_k = \frac{\pi}{2} (1 + 4k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

I punti in cui è $f(x) = -1$:

$$x''_k = \frac{\pi}{2} (3 + 4k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

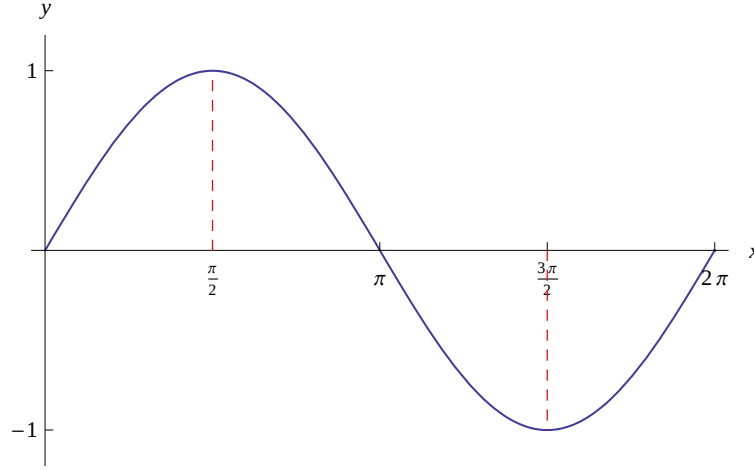
In fig. 2.13 riportiamo il diagramma cartesiano della restrizione di $f(x)$ all'intervallo $[0, 2\pi]$.

Restano così definite le successioni:

$$\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \{x'_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \{x''_k\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

che sono divergenti per $|k| \rightarrow +\infty$. Senza perdita di generalità, consideriamo il caso $k \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} x'_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} x''_k = +\infty \quad (2.28)$$


 Figura 2.13: Diagramma cartesiano di $\sin x$ per $x \in [0, 2\pi]$.

Applicando la definizione di limite di una successione:

$$\forall I_\sigma(+\infty), \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists n_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > n_\sigma \implies x_k \in I_\sigma(+\infty) \\ \exists n'_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > n'_\sigma \implies x'_k \in I_\sigma(+\infty) \\ \exists n''_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > n''_\sigma \implies x''_k \in I_\sigma(+\infty) \end{array} \right\},$$

dove $I_\sigma(+\infty) = (\sigma, +\infty)$ con $\sigma > 0$. Posto $\bar{n}_\sigma = \max \{n_\sigma, n'_\sigma, n''_\sigma\}$, si ha:

$$\forall I_\sigma(+\infty), \quad \exists \bar{n}_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > \bar{n}_\sigma \implies x_k, x'_k, x''_k \in I_\sigma(+\infty)$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} & \forall I_\sigma(+\infty), \quad \exists x, x', x'' \in I_\sigma(+\infty) \mid \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x') = 1 \\ f(x'') = -1 \end{array} \right\} \implies \\ & \implies (\nexists l \in \mathbb{R} \mid \forall J_\varepsilon(l), \quad \exists I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \implies f(x) \in J_\varepsilon(l)) \\ & \implies \nexists l \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \end{aligned}$$

■

La proposizione appena dimostrata si generalizza a una qualunque funzione periodica:

Proposizione 22

$$f \text{ è periodica} \implies f \text{ è non regolare per } |x| \rightarrow +\infty$$

Si osservi che l'implicazione non è invertibile:

$$f \text{ è non regolare per } |x| \rightarrow +\infty \nRightarrow f \text{ è periodica}$$

Cioè la non regolarità per $|x| \rightarrow +\infty$ è condizione necessaria ma non sufficiente per la periodicità. Un esempio è offerto dalla funzione $f(x) = \sin(x^2)$ che è manifestamente non periodica. Dal momento che anche questa funzione è limitata tra -1 e 1 , per cui se è regolare per $|x| \rightarrow +\infty$ è necessariamente convergente a $l \in [-1, 1]$. Tuttavia, a ogni intorno $J_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ possiamo associare intorni $I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) = (\delta_\varepsilon, +\infty)$ tali che $x \in I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \nRightarrow f(x) \in J_\varepsilon(l)$, come illustrato in fig. 2.14

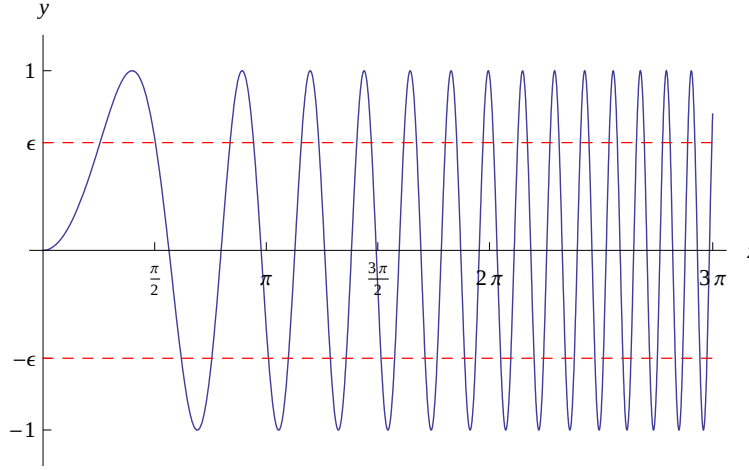


Figura 2.14: Diagramma cartesiano di $\sin(x^2)$ per $x \in [0, 3\pi]$. Preso ad arbitrio $J_\epsilon(l) = (l-1, l+1)$ (in questo caso abbiamo supposto $l = 0$) possiamo associare intorno $I_{\delta_\epsilon}(+\infty)$ tali che $x \in I_{\delta_\epsilon}(+\infty) \Rightarrow (x, \sin x^2) \in \mathcal{R}_\epsilon = I_{\delta_\epsilon}(+\infty) \times J_\epsilon(l)$.

Proposizione 23 La funzione $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è non regolare per $x \rightarrow 0$

Dimostrazione. Sia $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Tale funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$. Il punto $x = 0$ è di accumulazione per X . Nel tentativo di determinare $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ eseguiamo il cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$, per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \sin t$$

Ma per la proposizione (21) $\nexists \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \sin t$, onde l'asserto.

Alternativamente, osserviamo che gli zeri della funzione sono:

$$x_k = \frac{1}{k\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

I punti in cui $f(x) = +1$:

$$x'_k = \frac{2}{\pi(1+4k)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

I punti in cui $f(x) = -1$:

$$x''_k = \frac{2}{\pi(3+4k)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Restano così definite le successioni:

$$\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}}, \quad \{x'_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \{x''_k\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

che sono convergenti a 0 per per $|k| \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{|k| \rightarrow +\infty} x'_k = \lim_{|k| \rightarrow +\infty} x''_k = 0 \quad (2.29)$$

In altri termini, in ogni intorno di $x = 0$ cadono (infiniti) punti in cui la funzione vale 0, altri in cui assume il valore -1 e altri ancora in cui vale $+1$.

Per $k \rightarrow +\infty$ applicando la definizione di limite di una successione:

$$\forall I_\sigma(0), \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists n_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > n_\sigma \implies x_k \in I_\sigma(0) - \{0\} \\ \exists n'_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > n'_\sigma \implies x'_k \in I_\sigma(0) - \{0\} \\ \exists n''_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > n''_\sigma \implies x''_k \in I_\sigma(0) - \{0\} \end{array} \right. ,$$

dove $I_\sigma(0) = (-\sigma, \sigma)$. Posto $\bar{n}_\sigma = \max\{n_\sigma, n'_\sigma, n''_\sigma\}$, si ha:

$$\forall I_\sigma(0), \quad \exists \bar{n}_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > \bar{n}_\sigma \implies x_k, x'_k, x''_k \in I_\sigma(0) - \{0\}$$

Ripetendo lo stesso procedimento per $k \rightarrow -\infty$, si perviene a:

$$\forall I_\sigma(0), \quad \exists \tilde{n}_\sigma \in \mathbb{N} \mid k < -\tilde{n}_\sigma \implies x_k, x'_k, x''_k \in I_\sigma(0) - \{0\}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} & \forall I_\sigma(0), \quad \exists x, x', x'' \in I_\sigma(0) - \{0\} \mid \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x') = 1 \\ f(x'') = -1 \end{array} \right. \implies \\ & \implies (\nexists l \in \mathbb{R} \mid \forall J_\varepsilon(l), \quad \exists I_{\delta_\varepsilon}(0) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) - \{0\} \implies f(x) \in J_\varepsilon(l)) \\ & \implies \nexists l \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \end{aligned}$$

Infine, la funzione non può essere divergente a $\pm\infty$, in quanto è limitata nel proprio insieme di definizione. In Fig. 2.15 è riportato il grafico della funzione per $x \in [-a, a]$. ■

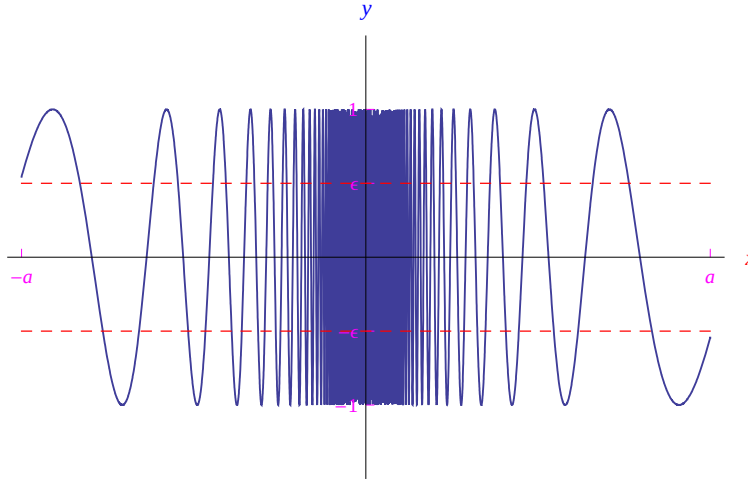


Figura 2.15: Per $x \rightarrow 0$ il grafico di $\sin \frac{1}{x}$ compie infinite oscillazioni tra -1 e $+1$. Pertanto, in ogni intorno di $x = 0$ la funzione assume infinite volte tutti i valori tra -1 e $+1$. Ciò implica che la funzione non converge per $x \rightarrow 0$, giacchè non esiste nessun $l \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$.

Per quanto precede, il grafico di $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ come infinite oscillazioni tra -1 e $+1$, in ogni intorno di $x = 0$ di raggio arbitrariamente piccolo. Ne consegue che è impossibile tracciare il grafico di $f(x)$ in prossimità dell'origine, come vediamo dalla Fig. 2.15. Il limite proposto è noto come *limite del topologo*.

Definizione 59 Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per X (al finito o all'infinito). La funzione f è **infinitesima** in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Definizione 60 Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per X (al finito o all'infinito). La funzione f è **infinita** in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$$

Proposizione 24 La funzione $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ è infinitesima in $x = 0$.

Dimostrazione. $|f(x)| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \underbrace{\left| \sin \frac{1}{x} \right|}_{\leq 1} \leq |x| \iff -x \leq f(x) \leq x$. Quindi il

grafico di f è contenuto nella regione:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, -x \leq y \leq x\}$$

Determiniamo i punti in cui il grafico interseca la retta $y = x$:

$$f(x) = x \iff \sin \frac{1}{x} = 1 \iff x_k = \frac{2}{\pi(1+4k)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ad esempio:

$$x_{-2} = -\frac{2}{7\pi}, \quad x_{-1} = -\frac{2}{3\pi}, \quad x_0 = \frac{2}{\pi}, \quad x_1 = \frac{2}{5\pi}, \quad x_2 = \frac{2}{9\pi}$$

I punti in cui il grafico interseca la retta $y = -x$:

$$f(x) = -x \iff \sin \frac{1}{x} = -1 \iff x'_k = \frac{2}{\pi(3+4k)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Una lista di punti è:

$$x'_{-2} = -\frac{2}{5\pi}, \quad x'_{-1} = -\frac{2}{\pi}, \quad x'_0 = \frac{2}{3\pi}, \quad x'_1 = \frac{2}{7\pi}, \quad x'_2 = \frac{2}{11\pi}$$

I punti x_k e x'_k si addensano intorno a $x = 0$. Come nel caso della funzione $\sin \frac{1}{x}$, il grafico di $x \sin \frac{1}{x}$ compie infinite oscillazioni intorno a $x = 0$. Però, ora, l'ampiezza delle oscillazioni non rimane costante e si smorza per $x \rightarrow 0$. Ciò implica per ogni intorno $J_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$, è sempre possibile associare un intorno $I_{\delta_\varepsilon}(0) = (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$ tale che $(x, f(x)) \in I_{\delta_\varepsilon}(0) \times J_\varepsilon(0)$, onde l'asserto. In Fig. 2.16 è illustrato l'andamento del grafico della funzione assegnata. Si noti che non è possibile tracciare in prossimità dell'origine. ■

Esaminiamo ora una questione già vista in una sezione precedente (nel caso $x \rightarrow \pm\infty$).

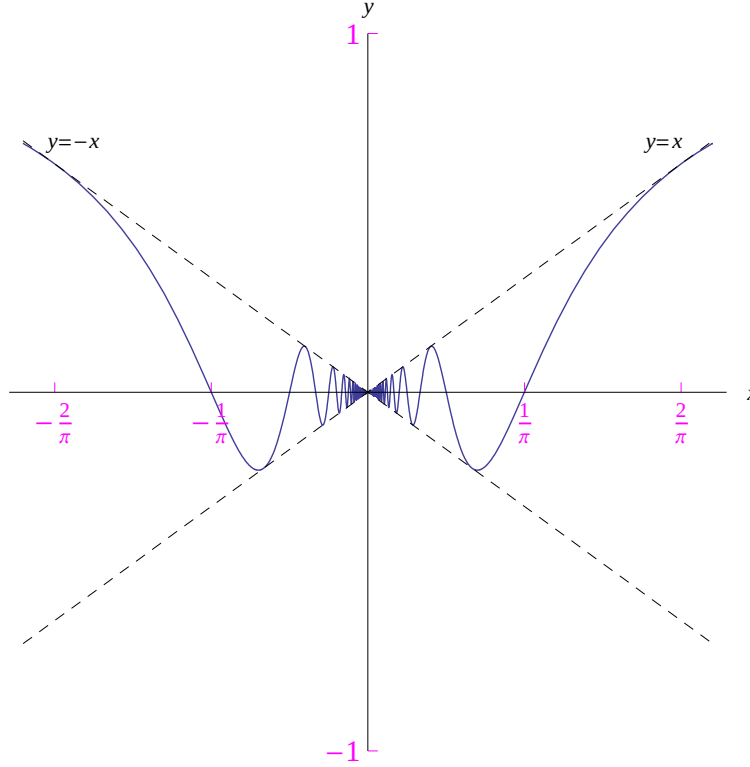


Figura 2.16: Grafico di $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. È un'oscillazione modulata da $\pm x$. Nelle applicazioni quest'ultimo è denominato *inviluppo di modulazione*.

Definizione 61 Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ convergente a l per $x \rightarrow x_0 \in \mathcal{D}(X)$. Diremo che la funzione f converge a l **per valori maggiori di l** , se è definitivamente $f(x) > l$ intorno a x_0 , cioè se

$$\exists I(x_0) \mid x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \implies f(x) > l \quad (2.30)$$

La proprietà (2.30) è espressa dalla notazione simbolica:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+$$

Tale definizione si generalizza al caso in cui x_0 è punto di accumulazione all'infinito. Ad esempio, se $x_0 = +\infty$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^+ \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists I(+\infty) \mid x \in X \cap I(+\infty) \implies f(x) > l)$$

Il diagramma di una funzione f tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+$ ha, localmente, l'andamento riportato in Fig. 2.17

Rammentiamo che la funzione può non essere definita in x_0 , oppure $x_0 \in X$ ma $f(x_0) \neq l$, come nel grafico di Fig. 2.18.

Definizione 62 Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ convergente a l per $x \rightarrow x_0$. Diremo che la funzione f converge a l **per valori minori di l** , se è definitivamente $f(x) < l$ intorno a x_0 , cioè se

$$\exists I(x_0) \mid x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \implies f(x) < l \quad (2.31)$$

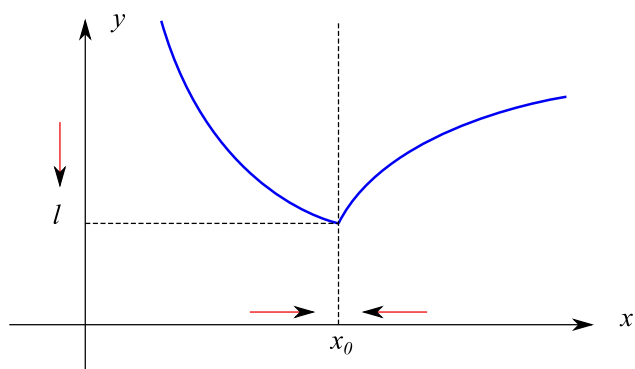


Figura 2.17: Per $x \rightarrow x_0$, la funzione tende a l per valori maggiori di l .

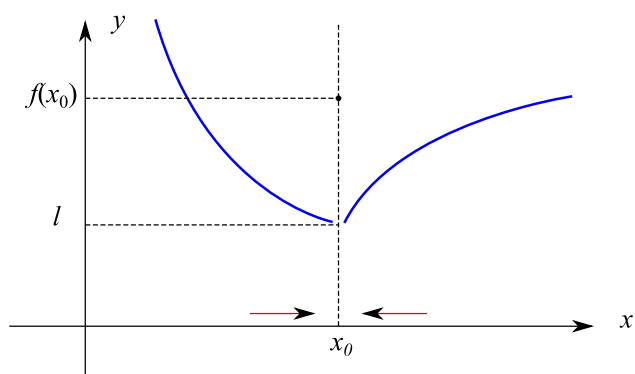


Figura 2.18: Per $x \rightarrow x_0$, la funzione tende a l per valori maggiori di l . Si osservi che $f(x_0) \neq l$.

La proprietà (2.30) è espressa dalla notazione simbolica:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^-$$

Tale definizione si generalizza al caso in cui x_0 è punto di accumulazione all'infinito. Ad esempio, se $x_0 = +\infty$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^- \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists I(+\infty) \mid x \in X \cap I(+\infty) \implies f(x) < l)$$

Il diagramma di una funzione f tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^-$ ha, localmente, l'andamento riportato in fig. 2.19

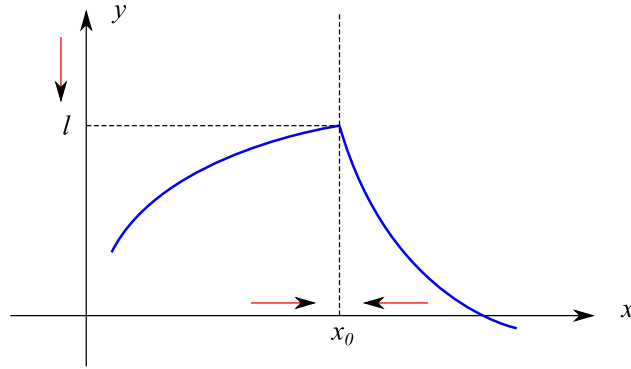


Figura 2.19: Per $x \rightarrow x_0$, la funzione tende a l per valori minori di l .

Se risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, segue che $g(x) = |f(x) - l|$ è infinitesima in x_0 . Più precisamente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l &\implies (|f(x) - l| \text{ è infinitesima in } x_0) \\ &\nRightarrow (|f(x) - l| \text{ è definitivamente decrescente intorno a } x_0) \end{aligned}$$

Stabiliamo come può essere la monotonia per una funzione divergente positivamente per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \implies (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, x > \delta_\varepsilon \implies f(x) > \varepsilon)$$

Tuttavia, per un assegnato $\varepsilon > 0$:

$$x', x'' \in X \mid x'' > x' > \delta_\varepsilon \nRightarrow f(x'') > f(x') \quad (2.32)$$

Infatti possiamo solo asserire che $f(x') > \varepsilon$, $f(x'') > \varepsilon$. A titolo d'esempio, consideriamo la funzione:

$$f(x) = x + 2\pi \sin x \quad (2.33)$$

La (2.33) è definita in $\mathbb{R}$. Il secondo termine a secondo membro della (2.33), cioè $2\pi \sin x$, è una funzione periodica di periodo 2π , ma $f(x)$ non è periodica (vedi def. (98)). Determiniamo la parità della funzione:

$$f(-x) = -x + 2\pi \sin(-x) = -x - 2\pi \sin x = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cioè la funzione è dispari. Quindi, per il suo studio basta limitarsi all'intervallo $[0, +\infty)$. Studiamo il comportamento per $x \rightarrow +\infty$. A tale scopo, osserviamo che:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \implies -2\pi \leq 2\pi \sin x \leq 2\pi$$

da cui:

$$x - 2\pi \leq f(x) \leq x + 2\pi, \quad \forall x \in [0, +\infty),$$

onde il diagramma cartesiano della funzione è contenuto nella regione:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, x - 2\pi \leq y \leq x + 2\pi\},$$

ovvero tra le due rette $r_- : y = x - 2\pi$, $r_+ : y = x + 2\pi$. In fig. 2.20 abbiamo tracciato tale diagramma con il programma di calcolo **Mathematica** per $x \in [0, 16\pi]$.

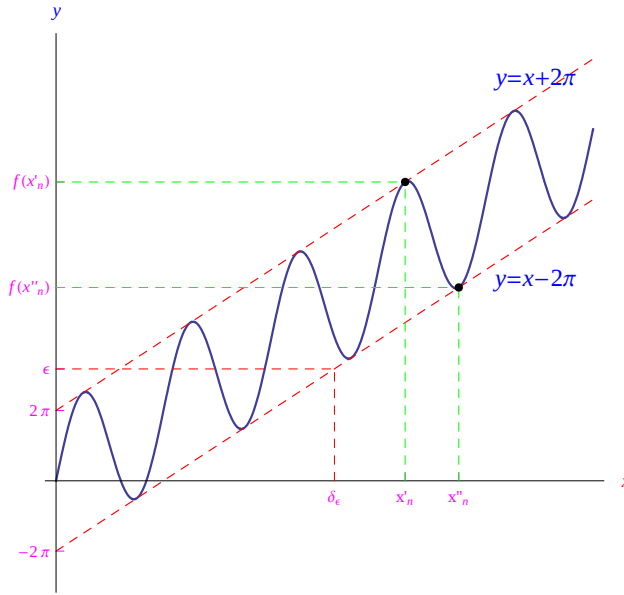


Figura 2.20: Grafico di $f(x) = x + 2\pi \sin x$ per $x \in [0, 16\pi]$.

La $f(x) \geq x - 2\pi$ implica che comunque prendiamo un $\varepsilon > 0$, se poniamo $\delta_\varepsilon = \varepsilon + 2\pi$ si ha $(\delta_\varepsilon, \varepsilon) \in r_-$ e quindi $x > \delta_\varepsilon \implies x - 2\pi > \varepsilon$. Ne consegue:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon + 2\pi > 0 \mid x > \delta_\varepsilon \implies f(x) \geq x - 2\pi > \varepsilon$$

ovvero:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2\pi \sin x) = +\infty \quad (2.34)$$

Ciò è illustrato in fig. 2.21.

Per quanto detto, la funzione è dispari, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2\pi \sin x) = -\infty$$

Il diagramma cartesiano Γ della funzione $f(x)$ interseca la retta r_+ nei punti le cui ascisse sono tali che:

$$x + 2\pi \sin x = x + 2\pi \iff \sin x = 1$$

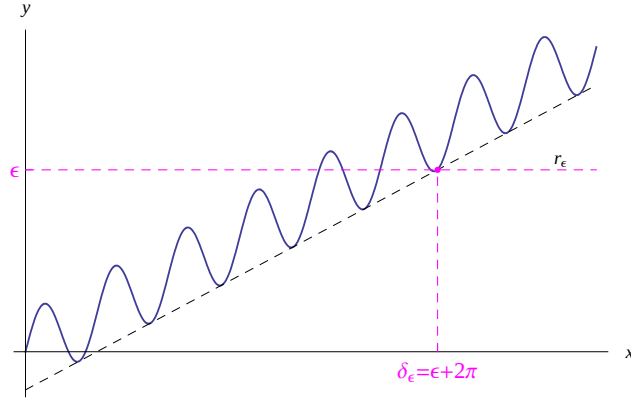


Figura 2.21: Risulta: $\forall r_\varepsilon : y = \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon + 2\pi \mid x > \delta_\varepsilon \implies (x, f(x)) \in \Gamma$ giace al di sopra della retta r_ε , dove Γ è il grafico della funzione f . Più precisamente, $(x, x + 2\pi \sin x) \in \mathcal{R}_\varepsilon = (\varepsilon + 2\pi, +\infty) \times (\varepsilon, +\infty)$.

Cioè:

$$x'_k = \frac{\pi}{2} (1 + 4k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

L'intersezione di Γ con r_- avviene, invece, nei punti di ascissa:

$$x''_k = \frac{\pi}{2} (3 + 4k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Siccome stiamo considerando l'intervallo $[0, +\infty)$, le precedenti si riscrivono:

$$x'_n = \frac{\pi}{2} (1 + 4n), \quad x''_n = \frac{\pi}{2} (3 + 4n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.35)$$

avendosi $x''_n > x'_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi con ovvio significato dei simboli:

$$P'_n(x'_n, x'_n + 2\pi) \in \Gamma \cap r_+, \quad P''_n(x''_n, x''_n - 2\pi) \in \Gamma \cap r_-$$

Segue

$$f(x'_n) - f(x''_n) = x'_n + 2\pi - (x''_n - 2\pi)$$

Tenendo conto delle (2.35):

$$f(x'_n) - f(x''_n) = 3\pi, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi la differenza $f(x'_n) - f(x''_n)$ è indipendente da n ed è pari a 3π . Risulta:

$$x''_n > x'_n, \quad f(x''_n) < f(x'_n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cosicchè:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon + 2\pi, \quad x''_n > x'_n > \delta_\varepsilon \implies f(x'_n) > f(x''_n) > \varepsilon, \quad (2.36)$$

come illustrato in fig. 2.20. Intuitivamente, il comportamento (2.36) è dovuto al fatto che la funzione, per $x \rightarrow +\infty$, tende a $+\infty$ “oscillando”. In fig. 2.22 riportiamo il diagramma cartesiano della funzione per $x \in [-7\pi, 7\pi]$. Si tratta, dunque, di un'oscillazione sinusoidale tra le rette r_- e r_+ .

Quindi, mentre nel caso della funzione $2\pi \sin x$, che è non regolare per $|x| \rightarrow +\infty$, la $f(x) = x + 2\pi \sin x$ risulta ivi regolare. Diamo una giustificazione intuitiva a tale comportamento. Il termine non periodico *ruota* la regione contenente il grafico attorno all'origine,

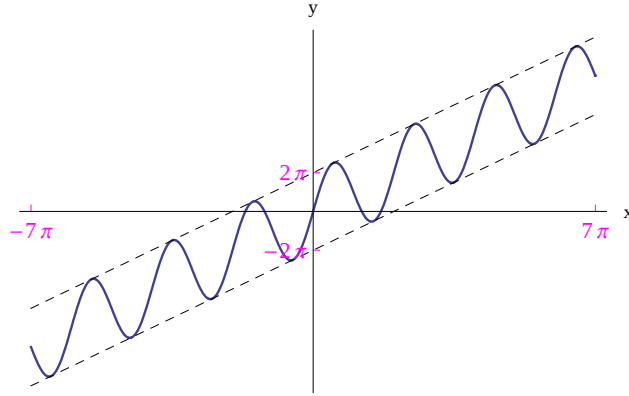


Figura 2.22: Andamento del grafico di $f(x) = x + 2\pi \sin x$ nell'intervallo $[-7\pi, 7\pi]$.

per cui la funzione perdendo la sua periodicità diviene regolare all'infinito. Ciò può essere visto controllando la rotazione attraverso un parametro $m \in \mathbb{R}$. A tale scopo, consideriamo la funzione:

$$f_m(x) = mx + 2\pi \sin x \quad (2.37)$$

Il grafico Γ è un'oscillazione sinusoidale tra le rette:

$$r_+ : y = mx + 2\pi, \quad r_- : y = mx - 2\pi,$$

per cui il parametro m è il coefficiente angolare delle rette che «involuppano» il grafico Γ che quindi risulta contenuto nella regione:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \quad mx - 2\pi \leq y \leq mx + 2\pi\} \quad (2.38)$$

Il caso banale $m = 0$ riproduce la funzione periodica $f(x) = 2\pi \sin x$ e la regione (2.38) diviene:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \quad -2\pi \leq y \leq +2\pi\},$$

cioè la striscia orizzontale compresa tra le rette orizzontali $r_+ : y = 2\pi$, $r_- : y = -2\pi$. Per $m \neq 0$ la regione $\mathcal{R}$ ruota attorno a un asse passante per l'origine e perpendicolare al piano cartesiano xy , di un angolo $\theta = \arctan m$. Nelle Figg. 2.23-2.24 riportiamo rispettivamente i casi $m = \frac{1}{10}$ e $m = -\frac{1}{10}$.

Per $m \neq 0$ determiniamo i punti di intersezione di Γ con le rette $r_{\pm} : y = mx \pm 2\pi$:

$$\begin{cases} y = mx + 2\pi \sin x \\ y = mx \pm 2\pi \end{cases} \implies \sin x = \pm 1,$$

cosicché le ascisse dei predetti punti non dipendono da m . Continuano quindi a valere le (2.35). Le ordinate i.e. i valori assunti da f_m in x'_n e in x''_n sono:

$$\begin{cases} f_m(x'_n) = \frac{m\pi}{2}(1 + 4n) + 2\pi \\ f_m(x''_n) = \frac{m\pi}{2}(3 + 4n) - 2\pi \end{cases}$$

Quindi, per un assegnato m :

$$f_m(x'_n) - f_m(x''_n) = (4 - m)\pi, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.39)$$

Se assumiamo (senza perdita di generalità) $m \geq 0$, si hanno i seguenti casi speciali:

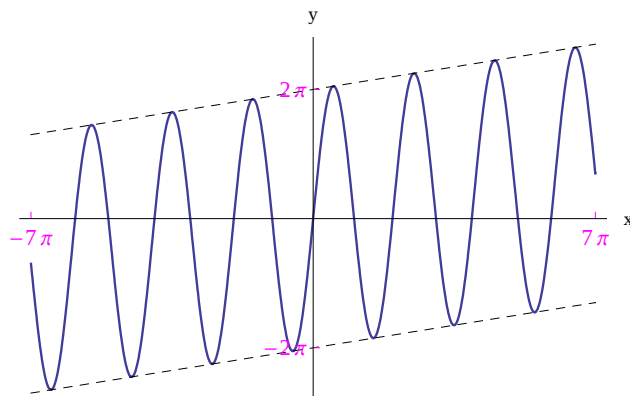


Figura 2.23: Andamento del grafico di $f(x) = mx + 2\pi \sin x$ nell'intervallo $[-7\pi, 7\pi]$. Qui è $m = \frac{1}{10}$, per cui la regione (2.38) è ruotata attorno a un asse passante per l'origine e perpendicolare al piano cartesiano xy , di un angolo $\theta = \arctan\left(\frac{1}{10}\right)$.

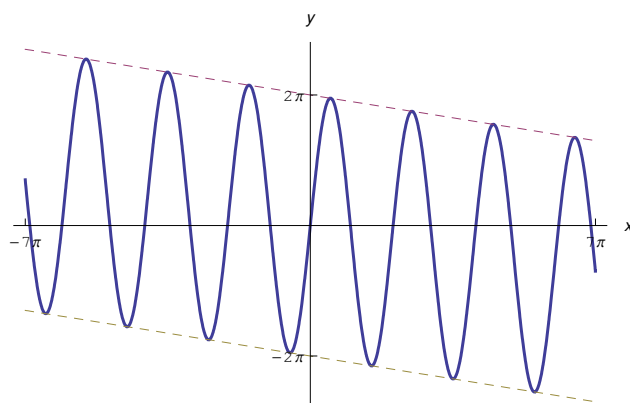


Figura 2.24: Andamento del grafico di $f(x) = mx + 2\pi \sin x$ nell'intervallo $[-7\pi, 7\pi]$. Qui è $m = -\frac{1}{10}$, per cui la regione (2.38) è ruotata attorno a un asse passante per l'origine e perpendicolare al piano cartesiano xy , di un angolo $\theta = \arctan\left(-\frac{1}{10}\right)$.

- $m = 0 \implies f_0(x'_n) = f_0(x''_n), \forall n \in \mathbb{N}$. È il caso banale perché il grafico è la classica sinusoide.
- $m = 4 \implies f_4(x'_n) = f_4(x''_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Più specificatamente, per $0 < m < 4$ è

$$f_m(x'_n) > f_m(x''_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

per cui valgono le argomentazioni esaminate nel caso $m = 1$. Precisamente:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \frac{1}{m}(\varepsilon + 2\pi) \mid x > \delta_\varepsilon \implies f_m(x) \geq mx - 2\pi > \varepsilon + 2\pi - 2\pi = \varepsilon \\ \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty \end{aligned}$$

e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \frac{1}{m}(\varepsilon + 2\pi) \mid x''_n > x'_n > \delta_\varepsilon \implies f_m(x'_n) > f_m(x''_n) > \varepsilon \quad (2.40)$$

Per quanto detto è $f_4(x'_n) = f_4(x''_n), \forall n \in \mathbb{N}$, come illustrato in Fig. 2.25, dove abbiamo posto $n = 3$.

$$x'_3 = \frac{13}{2}\pi, \quad x''_3 = \frac{15}{2}\pi, \quad f_4(x'_3) = f_4(x''_3) = 28\pi$$

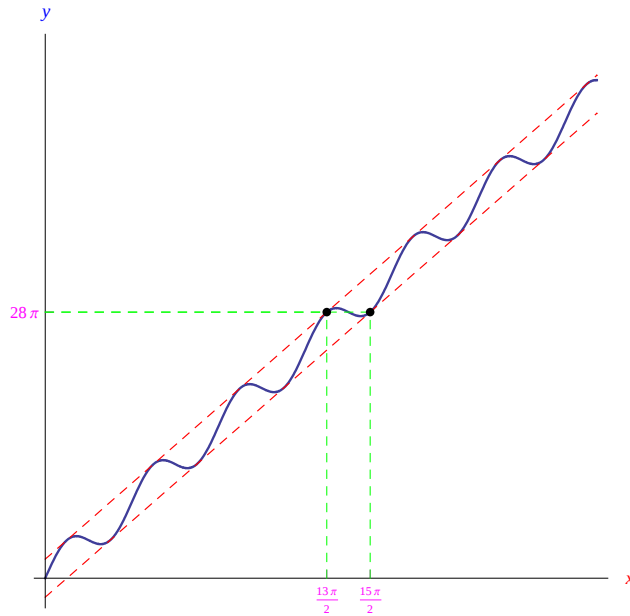


Figura 2.25: Andamento del grafico di $f(x) = mx + 2\pi \sin x$.

Per $m > 4$ la differenza $f_m(x'_n) - f_m(x''_n)$ inverte il proprio segno:

$$f_m(x''_n) > f_m(x'_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m > 4$$

2.3.2 Convergenza in modulo

Definizione 63 Si dice che la funzione $f(x)$ **converge in modulo** per $x \rightarrow x_0$, se $|f(x)|$ è ivi convergente, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \ell \quad (2.41)$$

Sussiste la seguente proposizione:

Proposizione 25 Se la funzione $f(x)$ converge a l per $x \rightarrow x_0$, allora converge in modulo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \quad (2.42)$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \implies (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Per una nota proprietà del valore assoluto:

$$||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

■

La proposizione 25 non si inverte, ad eccezione del caso $l = 0$. Cioè:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \neq 0 \nRightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Consideriamo ad esempio la funzione:

$$f(x) = (-1)^{[x]} \frac{|x|}{x}, \quad (2.43)$$

rammentando che $[x]$ denota la parte intera del numero reale x . Vediamo innanzitutto che la funzione non è definita in $x = 0$. Siccome è dispari possiamo limitarci a $(0, +\infty)$ dove $\frac{|x|}{x} = 1$, per cui

$$f(x) = (-1)^{[x]}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Esplicitiamo alcuni valori:

$$x \in (0, 1) \implies [x] = 0 \implies f(x) = +1$$

$$x \in [1, 2) \implies [x] = 1 \implies f(x) = -1$$

$$x \in [2, 3) \implies [x] = 2 \implies f(x) = +1$$

...

Cioè

$$x \in [n, n+1) \implies [x] = n \implies f(x) \underset{x>0}{=} (-1)^n = \begin{cases} +1, & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.44)$$

da cui il diagramma tracciato in fig. 2.26.

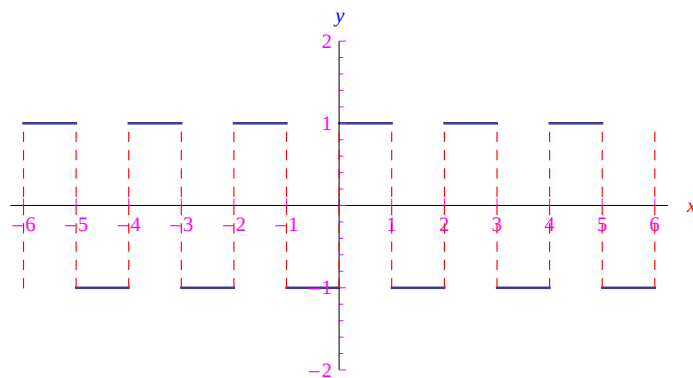


Figura 2.26: Diagramma cartesiano della funzione (2.43).

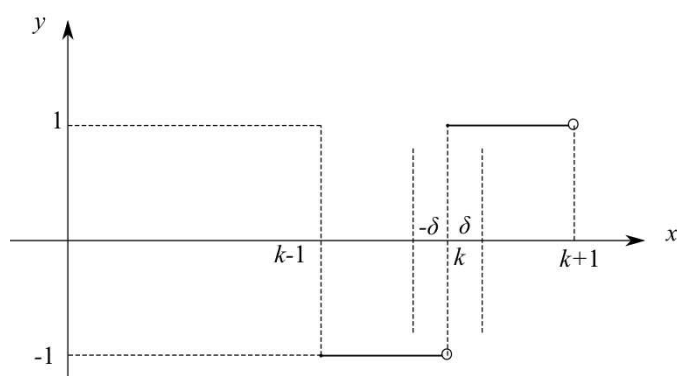


Figura 2.27: Diagramma cartesiano della funzione (2.43) in un intorno di un k pari.

Ne segue che la funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Mostriamo che ogni elemento di $\mathbb{Z}$ è punto di accumulazione per X ; si tratta di far vedere che comunque prendiamo $k \in \mathbb{Z}$, si ha:

$$\forall I_\delta(k) = (k - \delta, k + \delta), \exists x \in X \cap I_\delta(k) - \{k\} \quad (2.45)$$

Senza perdita di generalità, assumiamo $k > 1$ pari. Dalla (2.44):

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [k-1, k) \\ 1, & x \in [k, k+1) \end{cases}$$

come mostrato in Fig. 2.27, per cui è verificata la (2.45).

Sulla falsariga del procedimento utilizzato per la funzione parte intera, si giunge al seguente risultato:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow k} (-1)^{[x]} \frac{|x|}{x}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Anche $+\infty$ e $-\infty$ sono punti di accumulazione per X , e siccome in ogni intorno di $+\infty$ $[-\infty]$ la funzione assume i valori $+1$ e -1 si ha che la funzione è non regolare:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-1)^{[x]} \frac{|x|}{x} \quad (2.46)$$

Osservazione 16 *Alternativamente, la (2.46) si giustifica osservando che la funzione è periodica (di periodo 2).*

Prendiamo ora il valore assoluto

$$|f(x)| = \left| \frac{|x|}{x} \right| = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Per la proprietà (1) generalizzata a $X = (-\infty, +\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow k} |f(x)| = 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = 1$$

2.3.3 Funzioni divergenti in modulo

Definizione 64 Si dice che la funzione $f(x)$ è **divergente in modulo** per $x \rightarrow x_0$, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \quad (2.47)$$

Una locuzione alternativa è: $f(x)$ è **infinita** in x_0 e il punto x_0 è un **punto di infinito** per la funzione medesima.

Sussiste la seguente proposizione:

Proposizione 26 Se la funzione f è divergente in x_0 , allora f è ivi divergente in modulo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \quad (2.48)$$

Dimostrazione. Supponiamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Dalla definizione di divergenza positiva:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies f(x) > \varepsilon$$

D'altra parte

$$|f(x)| \geq f(x) > \varepsilon,$$

cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$. Supponiamo ora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies f(x) < -\varepsilon$$

D'altra parte $f(x) < -\varepsilon < 0 \implies |f(x)| > \varepsilon \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$. ■

La proposizione appena dimostrata non è invertibile:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

Per essere più precisi, la proposizione è invertibile solo se la funzione ha definitivamente segno costante intorno a x_0 . Ad esempio la funzione $f(x) = 1/x$ è divergente in modulo in $x = 0$, ma è ivi non regolare giacché intorno a $x = 0$ assume sia valori positivi che negativi (fig. 2.28), mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = +\infty$$

2.3.4 Il limite quale punto di aderenza per il codominio di una funzione

Proposizione 27 Se la funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è convergente in x_0 , il limite l è un punto di aderenza per il codominio $f(X)$.

Dimostrazione. L'asserto segue dalla definizione di limite:

$$\begin{aligned} \forall J_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon), \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) - \{x_0\} \\ \implies f(x) \in J_\varepsilon(l) \end{aligned}$$

illustrata in fig. 2.29. ■

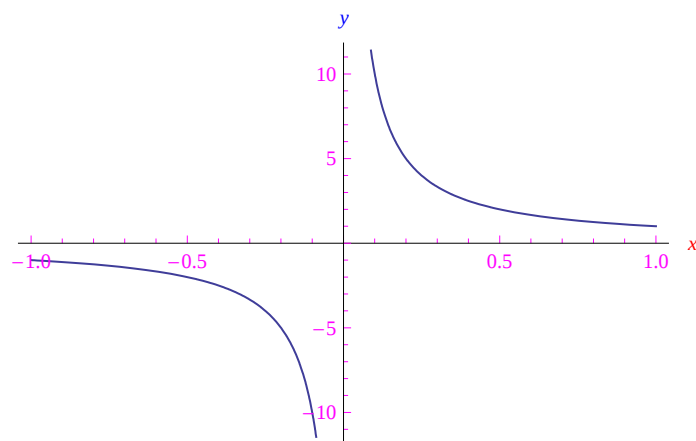


Figura 2.28: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = 1/x$.

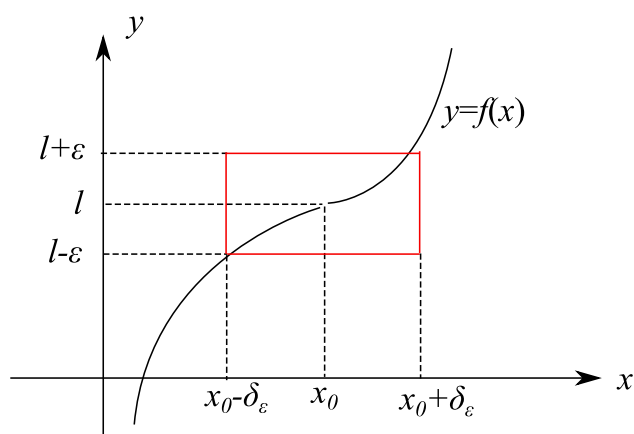


Figura 2.29: Proposizione 27.

2.3.5 Criteri di regolarità per restrizione

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}(X)$. Se $X' \subset X \mid x_0 \in \mathcal{D}(X')$:

Definizione 65 *Detta $f_{X'}$ la restrizione di f a X' , il limite (se esiste)*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_{X'}(x),$$

*si chiama **limite di f per $x \rightarrow x_0$ su X'** e si indica con il simbolo:*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X'}} f(x)$$

Sussiste il seguente criterio, di cui omettiamo la dimostrazione:

Criterio 1 ***Hp.** f è regolare in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$, cioè*

$$\exists l \in \bar{\mathbb{R}} \mid \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

***Th.** $\forall X' \subset X \mid X' \neq \emptyset, x_0 \in \mathcal{D}(X'), f_{X'}$ è regolare in x_0 e risulta:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_{X'}(x) = l$$

Nel formalismo dei connettivi logici, la proposizione precedente si scrive:

$$\left(\exists l \in \bar{\mathbb{R}} \mid \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \right) \implies \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_{X'}(x) = l, \forall X' \subset X \mid X' \neq \emptyset, x_0 \in \mathcal{D}(X') \right) \quad (2.49)$$

La (2.49) è invertibile:

$$\left(\exists l \in \bar{\mathbb{R}} \mid \lim_{x \rightarrow x_0} f_{X'}(x) = l, \forall X' \subset X \mid X' \neq \emptyset, x_0 \in \mathcal{D}(X') \right) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad (2.50)$$

Osservazione 17 *Nella (2.50) è implicita l'implicazione seguente:*

$$\forall X' \subset X \mid x_0 \in \mathcal{D}(X') \implies x_0 \in \mathcal{D}(X)$$

Le (2.49)-(2.50) si unificano nel seguente criterio che esprime una condizione necessaria e sufficiente affinché f sia regolare in x_0 :

Criterio 2 (**Primo criterio di regolarità per restrizione**)

$$\left(f \text{ è regolare in } x_0 \in \mathcal{D}(X) \right) \iff \left(f_{X'} \text{ è regolare in } x_0, \forall X' \subset X \mid X' \neq \emptyset, x_0 \in \mathcal{D}(X') \right)$$

Cioè, condizione necessaria e sufficiente affinché f sia regolare in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$ è che sia regolare la restrizione a *ogni* sottoinsieme non vuoto di X' che ammette x_0 come punto di accumulazione.

Tale criterio richiede la regolarità di $f_{X'}$ in x_0 per ogni $X' \subset X$ e *non per un solo sottoinsieme di X'* . In altri termini, la regolarità di $f_{X'}$ solo per alcuni sottoinsiemi X' (tali che $x_0 \in \mathcal{D}(X')$) non garantisce la regolarità di f in x_0 :

$$\exists X' \subset X \mid f_{X'} \text{ è regolare in } x_0 \not\Rightarrow f \text{ è regolare in } x_0$$

La regolarità in uno o più sottoinsiemi di X è una condizione necessaria ma non sufficiente per la regolarità di f in x_0 . Ad esempio, la funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$ ed è non regolare in $x_0 = 0$. Ora, consideriamo la sua restrizione all'insieme:

$$X' = \{x_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset X, \quad \text{con } x_k = \frac{2}{\pi(1+4k)}$$

Il punto $x_0 = 0$ è manifestamente punto di accumulazione⁴ per X' e la funzione f è ivi regolare. Infatti $\forall x \in X', f_{X'}(x) = 1$, onde per la proposizione 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_{X'}(x) = 1,$$

mentre $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. A tale conclusione fanno eccezione le restrizioni di f agli intorno di $x_0 = 0$. Infatti, per un intorno $I_\delta(x_0 = 0) = (-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$ preso ad arbitrio, si ha:

$$f_{X \cap I_\delta(0)}(x) = \sin \frac{1}{x},$$

per cui $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f_{X \cap I_\delta(0)}(x)$. Quindi:

Proposizione 28 Hp. $\exists I(x_0) \mid f_{X \cap I(x_0)}$ è regolare in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$. Cioè:

$$\exists l \in \bar{\mathbb{R}} \mid \lim_{x \rightarrow x_0} f_{X \cap I(x_0)}(x) = l$$

Th. f è regolare in x_0 , e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

La proposizione 28 è invertibile:

Proposizione 29 Hp. f è regolare in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$. Cioè:

$$\exists l \in \bar{\mathbb{R}} \mid \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Th. $\exists I(x_0) \mid f_{X \cap I(x_0)}$ è regolare in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$, risultando:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_{X \cap I(x_0)}(x) = l$$

Le proposizioni 28-29 si unificano nel criterio:

Criterio 3 (Secondo criterio di regolarità per restrizione)

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è regolare} \\ \text{in } x_0 \in \mathcal{D}(X) \end{array} \right) \iff (\exists I(x_0) \mid f_{X \cap I(x_0)} \text{ è regolare in } x_0)$$

Cioè, condizione necessaria e sufficiente affinché f sia regolare in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$, è l'esistenza di un intorno $I(x_0)$ del punto x_0 tale che $f_{X \cap I(x_0)}$ sia ivi regolare.

Concludiamo osservando che mentre il criterio 2 caratterizza *globalmente* la regolarità di f in x_0 , nel senso che vanno determinati tutti e soli i sottoinsiemi dell'insieme di definizione di f in cui la funzione medesima è regolare in x_0 , il criterio 3 caratterizza *localmente* la regolarità di f , poichè basta trovare un intorno di x_0 di ampiezza comunque piccola, in cui f è regolare in x_0 .

⁴Risulta $x_0 \notin X'$ e

$$x_0 = \lim_{|k| \rightarrow +\infty} x_k$$

Cioè la successione $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è infinitesima per $|k| \rightarrow +\infty$. Applicando la definizione di limite di una successione:

$$\forall I_\varepsilon(x_0), \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid k > \nu_\varepsilon \implies x_k \in I_\varepsilon(x_0),$$

cosicchè $\forall \varepsilon > 0, X' \cap I_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset \implies x_0 \in \mathcal{D}(X')$.

2.4 Limite sinistro e limite destro

Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Assegnato ad arbitrio $x_0 \in \mathbb{R}$, definiamo

Definizione 66 *L'insieme*

$$X(x_0^-) = \{x \in X \mid x < x_0\} \subseteq X, \quad (2.51)$$

è la parte di X a sinistra di x_0 . *L'insieme*

$$X(x_0^+) = \{x \in X \mid x > x_0\} \subseteq X,$$

è la parte di X a destra di x_0 .

Esempio 17 Se $X = [1, 4]$ e $x_0 = 3$

$$X(3^-) = [1, 3), \quad X(3^+) = (3, 4]$$

Se $x_0 = 5$

$$X(5^-) = X, \quad X(5^+) = \emptyset$$

Segue immediatamente la proposizione:

Proposizione 30

$$X(x_0^-) = X(x_0^+) = \emptyset \iff X = \{x_0\}$$

Inoltre:

$$X = \begin{cases} \{x_0\} \cup X(x_0^-) \cup X(x_0^+), & \text{se } x_0 \in X \\ X(x_0^-) \cup X(x_0^+), & \text{se } x_0 \notin X \end{cases} \quad (2.52)$$

Esplicitiamo la seconda delle (2.52) nei due casi distinti:

1. X è un intervallo limitato o illimitato (ma solo superiormente o inferiormente)

Cioè $X = [a, b]$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ tale che:

$$b = +\infty \implies a > -\infty$$

$$a = -\infty \implies b < +\infty$$

Abbiamo:

$$\forall x_0 \notin X, \exists \sigma \in \{+, -\} \mid X(x_0^\sigma) = \emptyset$$

Infatti, senza perdita di generalità, supponiamo che sia $x_0 < a$. Ciò implica:

$$X(x_0^-) = \emptyset, \quad X(x_0^+) = X,$$

onde:

$$X = X(x_0^-) \cup X(x_0^+),$$

giacchè $[a, b] = \emptyset \cup [a, b]$.

2. $X = \bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k]$ dove $a_k < b_k$ per $k = 1, 2, \dots, N$ e $\begin{cases} a_k < a_{k+1} \\ b_k < b_{k+1} \end{cases}$, $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Senza perdita di generalità supponiamo che sia $b_1 < x_0 < a_2$. Conseguentemente:

$$X(x_0^-) = [a_1, b_1] \subset X, \quad X(x_0^+) = \bigcup_{k=2}^N [a_k, b_k] \subset X,$$

da cui segue:

$$X = X(x_0^-) \cup X(x_0^+),$$

giacchè:

$$\bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k] = [a_1, b_1] \cup \left(\bigcup_{k=2}^N [a_k, b_k] \right)$$

È altrettanto immediata la proposizione:

Proposizione 31

$$x_0 \in \mathcal{D}(X) \implies \exists \sigma \in \{+, -\} \mid x_0 \in \mathcal{D}(X(x_0^\sigma)), \quad (2.53)$$

essendo $\mathcal{D}(X)$ il derivato di X , cioè l'insieme dei punti di accumulazione per X .

In altre parole, se x_0 è di accumulazione per X , necessariamente è di accumulazione per almeno uno dei due insiemi $X(x_0^-)$, $X(x_0^+)$. La negazione della (2.53) è la proposizione:

Proposizione 32

$$x_0 \notin \mathcal{D}(X) \implies \nexists \sigma \in \{+, -\} \mid x_0 \in \mathcal{D}(X(x_0^\sigma)), \quad (2.54)$$

equivalente a:

$$\forall x_0 \notin \mathcal{D}(X), \quad x_0 \notin \mathcal{D}(X(x_0^\pm))$$

Esempio 18 Consideriamo l'insieme:

$$X = \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

Posto $x_k = \frac{1}{k}$, si ha:

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} x_k = 0 \stackrel{\text{def}}{=} x_0$$

Risulta:

$$\forall I_\delta(x_0) = (-\delta, \delta), \quad X \cap I_\delta(x_0) - \{x_0\} \neq \emptyset \implies x_0 \in \mathcal{D}(X)$$

Cioè x_0 è di accumulazione per X . Inoltre:

$$X(x_0^-) = \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z}^- - \{0\} \right\}, \quad X(x_0^+) = \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z}^+ - \{0\} \right\},$$

risultando manifestamente $x_0 \in \mathcal{D}(X(x_0^-)), \mathcal{D}(X(x_0^+))$ e $X = \mathcal{D}(X(x_0^-)) \cup \mathcal{D}(X(x_0^+))$.



Figura 2.30: Esempio 19.

Definizione 67 Il punto x_0 è di **accumulazione a sinistra per** X se $x_0 \in \mathcal{D}(X(x_0^+))$ i.e. se x_0 è di accumulazione per la parte di X a destra di x_0 . Cioè:

$$\forall I_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta), \quad X \cap I_\delta^+(x_0) - \{x_0\} \neq \emptyset$$

Esempio 19 Sia dato l'insieme $X = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$. Posto $x_0 = 0$, segue immediatamente che tale punto è di accumulazione a sinistra per X . In Fig. 2.30 una rappresentazione grafica di X .

In maniera analoga:

Definizione 68 Il punto x_0 è di **accumulazione a destra per** X se $x_0 \in \mathcal{D}(X(x_0^-))$ i.e. se x_0 è di accumulazione per la parte di X a sinistra di x_0 . Cioè:

$$\forall I_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0), \quad X \cap I_\delta^-(x_0) - \{x_0\} \neq \emptyset$$

Esempio 20 Sia dato l'insieme $X = \{-\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$. Posto $x_0 = 0$, segue immediatamente che tale punto è di accumulazione a destra per X .

Definizione 69 Sia $x_0 \in \mathcal{D}(X(x_0^-))$

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è regolare} \\ \text{a sinistra in } x_0 \end{array} \right) \stackrel{def}{\iff} \left(f_{X(x_0^-)} \text{ è regolare in } x_0 \right)$$

Cioè f è regolare a sinistra in x_0 se esiste il limite di f per $x \rightarrow x_0$ su $X(x_0^-)$. Tale limite si chiama **limite sinistro** di f in x_0 e si indica con il simbolo seguente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \tag{2.55}$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X(x_0^-)}} f(x)$$

In maniera analoga definiamo:

Definizione 70 Sia $x_0 \in \mathcal{D}(X(x_0^+))$

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è regolare} \\ \text{a destra in } x_0 \end{array} \right) \stackrel{def}{\iff} \left(f_{X(x_0^+)} \text{ è regolare in } x_0 \right)$$

Cioè f è regolare a destra in x_0 se e solo se esiste il limite di f per $x \rightarrow x_0$ su $X(x_0^+)$. Tale limite si chiama **limite destro** di f in x_0 e si indica con il simbolo seguente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \tag{2.56}$$

Per quanto detto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X(x_0^+)}} f(x)$$

Nel caso di convergenza la (2.55) si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

ed esprime la seguente proprietà:

$$\forall J_\varepsilon(l), \exists I_{\delta_\varepsilon}^-(x_0) = (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}^-(x_0) - \{x_0\} \implies f(x) \in J_\varepsilon(l)$$

In maniera simile, la (2.56):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}, \quad (2.57)$$

ed esprime la seguente proprietà:

$$\forall J_\varepsilon(l), \exists I_{\delta_\varepsilon}^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}^+(x_0) - \{x_0\} \implies f(x) \in J_\varepsilon(l)$$

Spesso si utilizza la notazione compatta:

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Abbiamo perciò:

Proposizione 33

$$f \text{ è regolare in } x_0 \iff f(x_0^-) = f(x_0^+)$$

Esercizio 4 Assegnata la funzione:

$$f(x) = e^{1/x} \quad (2.58)$$

verificare:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^+ \quad (2.59)$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad (2.60)$$

Svolgimento.

La funzione assegnata è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ed è ivi positiva. Per verificare la scrittura (2.59) dobbiamo risolvere rispetto a x , la seguente disequazione:

$$|e^{1/x}| < \varepsilon \iff e^{1/x} < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Cioè

$$\frac{1}{x} < \ln \varepsilon \quad (2.61)$$

Dal momento che $\varepsilon > 0$ deve essere arbitrariamente piccolo, assumiamo $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \ln \varepsilon < 0$. Dalla fig. 2.31. vediamo che:

$$\frac{1}{x} < \ln \varepsilon \iff \frac{1}{\ln \varepsilon} < x < 0$$

onde:

$$\forall \varepsilon \in (0, 1), \exists \delta_\varepsilon = -\frac{1}{\ln \varepsilon} > 0 \mid -\delta_\varepsilon < x < 0 \implies |e^{1/x}| < \varepsilon,$$

cioè:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0,$$

ed è necessariamente 0^+ , giacchè $e^{1/x} > 0, \forall x \in X$. Per verificare la scrittura (2.60) dobbiamo risolvere:

$$e^{1/x} > \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Quindi

$$\frac{1}{x} > \ln \varepsilon \tag{2.62}$$

Dal momento che $\varepsilon > 0$ deve essere arbitrariamente grande, assumiamo $\varepsilon > 1 \Rightarrow \ln \varepsilon > 0$. Dalla fig. 2.32. vediamo che:

$$\frac{1}{x} > \ln \varepsilon \iff 0 < x < \frac{1}{\ln \varepsilon}$$

onde:

$$\forall \varepsilon > 1, \exists \delta_\varepsilon = \frac{1}{\ln \varepsilon} > 0 \mid 0 < x < \delta_\varepsilon \implies |e^{1/x}| > \varepsilon \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Ne concludiamo che in $x_0 = 0$ la funzione assegnata è non regolare (i.e. non ammette

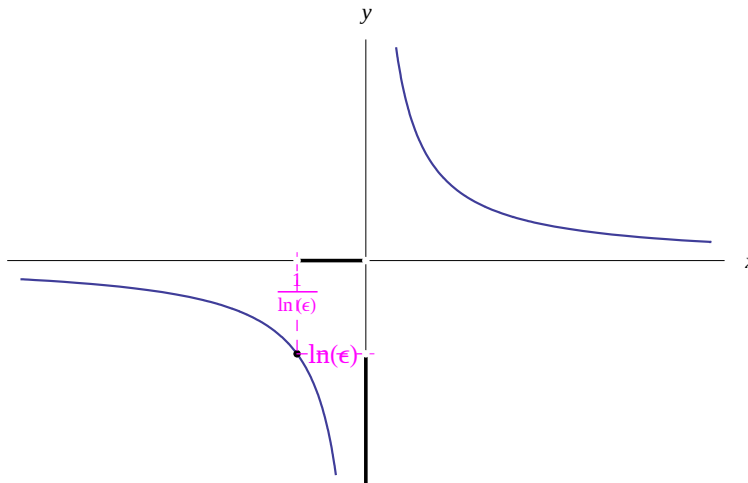


Figura 2.31: Ricerca delle soluzioni della disequazione (2.61).

limite), risultando regolare a sinistra e a destra. Precisamente, è infinitesima a sinistra e infinita a destra. Utilizzando un linguaggio suggestivo ma efficace, possiamo asserire che $e^{1/x}$ «esplode in singolarità» per $x \rightarrow 0^+$, e «muore dolcemente» per $x \rightarrow 0^-$. In fig. 2.33 è graficata localmente la funzione assegnata.

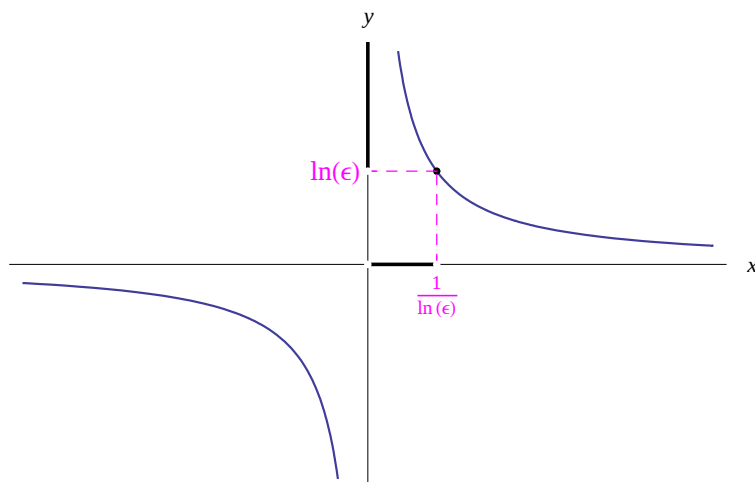


Figura 2.32: Ricerca delle soluzioni della disequazione (2.62).

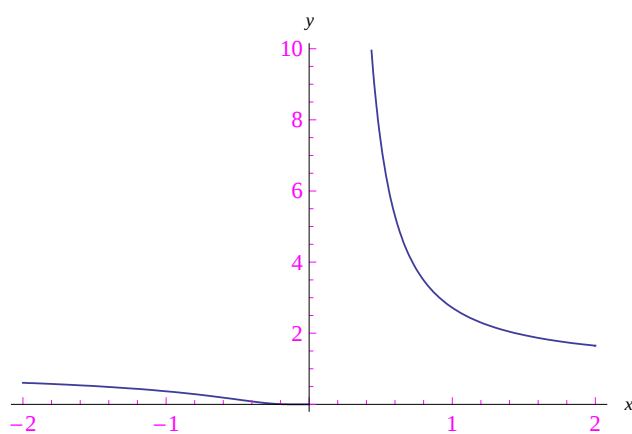


Figura 2.33: Grafico di $f(x) = e^{1/x}$ in un intorno di $x = 0$.

Esercizio 5 Analoga questione per la funzione:

$$f(x) = \theta(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

dove $\theta(x)$ è la funzione di Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Svolgimento.

Come è noto, la funzione $\sin \frac{1}{x}$ è non regolare in $x_0 = 0$. Più precisamente, è non regolare nè a sinistra e nè a destra di x_0 . La restrizione di f a $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ è la funzione identicamente nulla:

$$f_{\mathbb{R}^-}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-,$$

onde per definizione di limite sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_{\mathbb{R}^-}(x) = 0$$

Cioè la funzione è regolare a sinistra in x_0 , risultando ivi infinitesima. La restrizione di f a $\mathbb{R}^+$ è:

$$f_{\mathbb{R}^+}(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

onde $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f_{\mathbb{R}^+}(x)$ e, per definizione di limite destro, $\nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Pertanto, la funzione assegnata è non regolare a destra. In fig. 2.34 riportiamo il diagramma cartesiano della funzione assegnata.

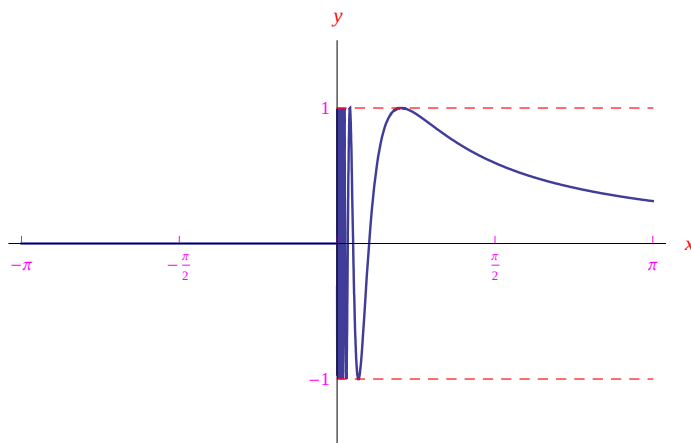


Figura 2.34: Grafico della funzione $f(x) = \theta(x) \sin \frac{1}{x}$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Alternativamente, l'esercizio può essere risolto in maniera più semplice, osservando

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

per cui $x = 0$ è di accumulazione sia a sinistra che a destra:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

e quest'ultimo limite non esiste.

2.5 Teoremi sui limiti

Teorema 3 (Teorema della permanenza del segno)

Una funzione che in un punto ha limite positivo [negativo], è definitivamente positiva [negativa] intorno a quel punto.

Dimostrazione. L'asserto è banale se la funzione diverge. Consideriamo dunque il caso della convergenza. Supponiamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0, \quad x_0 \text{ punto di accumulazione al finito}$$

Dalla definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Siccome ε deve essere arbitrariamente piccolo:

$$\forall \varepsilon \in (0, l), \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies f(x) > l - \varepsilon > 0$$

Allo stesso modo se x_0 è punto di accumulazione all'infinito. Ad esempio, se $x_0 = +\infty$

$$\forall \varepsilon \in (0, l), \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, x > \delta_\varepsilon \implies f(x) > l - \varepsilon > 0$$

Per $l < 0$ si procede in maniera simile. ■

Il Teorema 3 non si inverte. Cioè, se f è definitivamente di segno costante intorno a x_0 ed è ivi convergente a l , non è detto che $f(x) \cdot l > 0$. Ad esempio, assegnata la funzione $f(x) = x^2$, si ha manifestamente $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Tuttavia è $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, cioè $f(x)$ è definitivamente positiva intorno a $x = 0$.

D'altra parte, se $f(x)$ è definitivamente positiva intorno a x_0 , ed è ivi regolare, non può essere $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$. Abbiamo quindi:

Teorema 4 Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ regolare in x_0 .

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ è definitivamente} \\ \text{positiva intorno a } x_0 \end{array} \right) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ è definitivamente} \\ \text{negativa intorno a } x_0 \end{array} \right) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$$

Il teorema della permanenza del segno è un caso particolare del seguente

Teorema 5 Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, si ha definitivamente $f(x) < g(x)$ intorno a x_0 .

Il teorema 4 è un caso particolare del seguente

Teorema 6 Siano f e g sono regolari in x_0 .

$$f(x) < g(x) \text{ intorno a } x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

2.6 Criteri di regolarità per confronto

In questa sezione dimostriamo alcune condizioni sufficienti ma non necessarie, di regolarità per confronto.

Criterio 4 (**Teorema dei due carabinieri**)

Siano $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, mentre x_0 è un punto di accumulazione per i rispettivi insiemi di definizione.

• **Ipotesi.**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ intorno a } x_0$$

• **Tesi**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Dimostrazione. Per ipotesi, le funzioni f e g convergono allo stesso limite l per $x \rightarrow x_0$. Quindi:

$$\forall J_\varepsilon(l), \exists I_{\delta_\varepsilon^{(1)}}(x_0), \exists I_{\delta_\varepsilon^{(2)}}(x_0) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon^{(1)}}(x_0) \cap I_{\delta_\varepsilon^{(2)}}(x_0) - \{x_0\} \implies g(x), h(x) \in J_\varepsilon(l)$$

Per ipotesi:

$$\exists I(x_0) \mid x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \implies f(x) \in [g(x), h(x)]$$

Consideriamo il seguente intorno di x_0 :

$$I_{\Delta_\varepsilon}(x_0) = I(x_0) \cap I_{\delta_\varepsilon^{(1)}}(x_0) \cap I_{\delta_\varepsilon^{(2)}}(x_0) = (x_0 - \Delta_\varepsilon, x_0 + \Delta_\varepsilon),$$

onde:

$$\begin{aligned} x \in X \cap I_{\Delta_\varepsilon}(x_0) - \{x_0\} &\implies g(x), h(x) \in J_\varepsilon(l) \implies \\ &\implies J_\varepsilon(l) \supseteq [g(x), h(x)] \ni f(x) \implies f(x) \in J_\varepsilon(l) \end{aligned}$$

Cioè:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

■

Il teorema conserva la propria validità anche nel caso di divergenza. Ad esempio:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) &= +\infty \\ \exists I(x_0) \mid x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} &\implies g(x) \leq f(x) \leq h(x) \end{aligned}$$

Implica:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Esempio 21 Riprendiamo l'esempio della funzione (2.33), cioè $f(x) = x + 2\pi \sin x$. Applicando la definizione di limite avevamo stabilito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Al medesimo risultato si giunge più velocemente applicando il teorema dei carabinieri. Infatti:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

essendo $g(x) = x - 2\pi$, $h(x) = x + 2\pi$. Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allo stesso modo si dimostra che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. In fig. 2.35 riportiamo i grafici delle funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

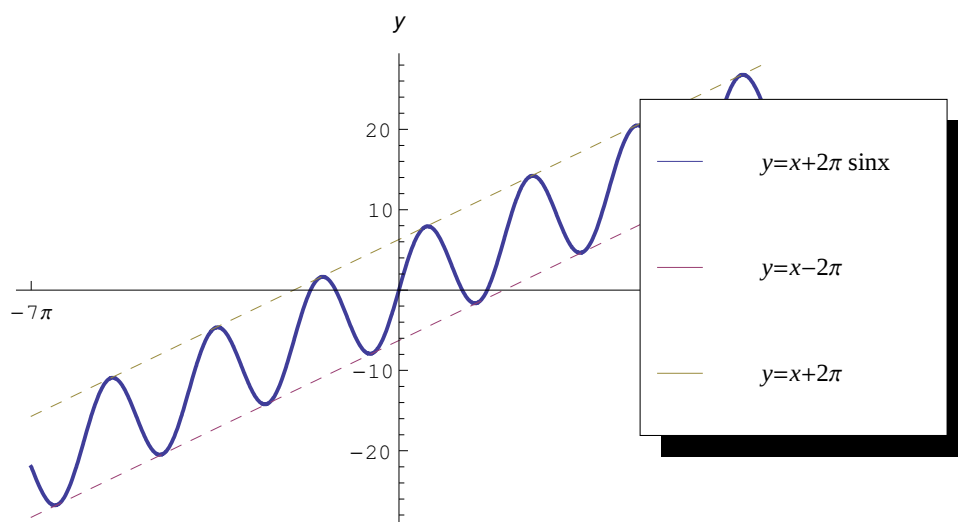


Figura 2.35: Andamento del grafico della funzione $f(x) = x + 2\pi \sin x$ nell'intervallo $[-7\pi, 7\pi]$.

Esempio 22 Assegnata la funzione:

$$f(x) = x \cos \left(\frac{1}{\ln |x|} \right), \quad (2.63)$$

dimostriamo che è infinitesima in $x_0 = 0$.

Svolgimento

Osserviamo innanzitutto che la funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{1\}$. Inoltre:

$$|f(x)| = \left| x \cos \left(\frac{1}{\ln |x|} \right) \right| = |x| \underbrace{\left| \cos \left(\frac{1}{\ln |x|} \right) \right|}_{\leq 1} \leq |x|$$

Cioè

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \forall x \in X,$$

dove

$$g(x) = -x, \quad h(x) = x,$$

riuscendo manifestamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0,$$

onde per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{\ln|x|}\right) = 0,$$

come illustrato in fig. 2.36.

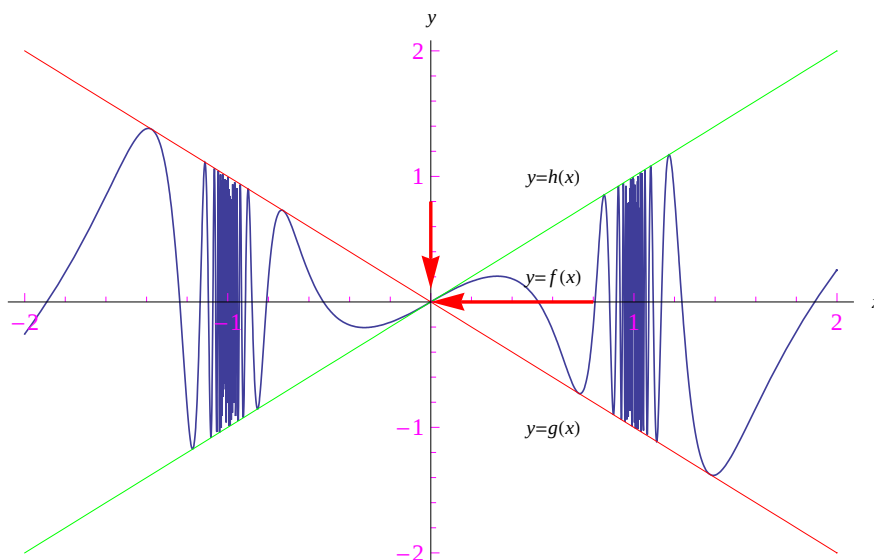


Figura 2.36: Applicazione del teorema dei carabinieri all'esempio 22.

Il codice Mathematica per la generazione del grafico di fig. 2.36 può essere prelevato da questa [risorsa online](#).

Esempio 23 Calcoliamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) \ln|x - \pi + 1| \quad (2.64)$$

Posto

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) \ln|x - \pi + 1|, \quad (2.65)$$

vediamo che tale funzione non è definita in π . Più precisamente, l'insieme di definizione è:

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi - 1, x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

Inoltre:

$$|f(x)| = \left| \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) \ln|x - \pi + 1| \right| = \left| \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) \right| |\ln|x - \pi + 1||,$$

da cui:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \forall x \in X, \quad (2.66)$$

essendo:

$$g(x) = -\ln|x - \pi + 1|, \quad h(x) = \ln|x - \pi + 1|$$

Riesce:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} h(x) = 0,$$

onde per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) \ln|x - \pi + 1| = 0$$

Il diagramma cartesiano Γ della funzione $f(x)$ è riportato in fig. 2.37 da cui vediamo che in ogni intorno di raggio comunque piccolo di $x_0 = \pi$, il diagramma compie infinite oscillazioni che si smorzano per $x \rightarrow \pi$.

Il codice Mathematica per la generazione del grafico di fig. 2.36 può essere prelevato da questa [risorsa online](#).

Nel caso di divergenza, il teorema si specializza nei seguenti criteri:

Criterio 5 Siano $f(x)$, $g(x)$ definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ e regolari in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$.

• **Ipotesi**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \\ \exists I(x_0) \mid x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \implies g(x) \leq f(x) \end{aligned}$$

• **Tesi**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) - \{x_0\} \implies g(x) > \varepsilon)$$

Per ipotesi:

$$\exists I(x_0) \mid x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \implies g(x) \leq f(x)$$

Consideriamo il seguente intorno di x_0 :

$$I_{\Delta_\varepsilon}(x_0) = I(x_0) \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \Delta_\varepsilon, x_0 + \Delta_\varepsilon),$$

onde:

$$x \in X \cap I_{\Delta_\varepsilon}(x_0) - \{x_0\} \implies f(x) \geq g(x) > \varepsilon$$

da cui:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

■

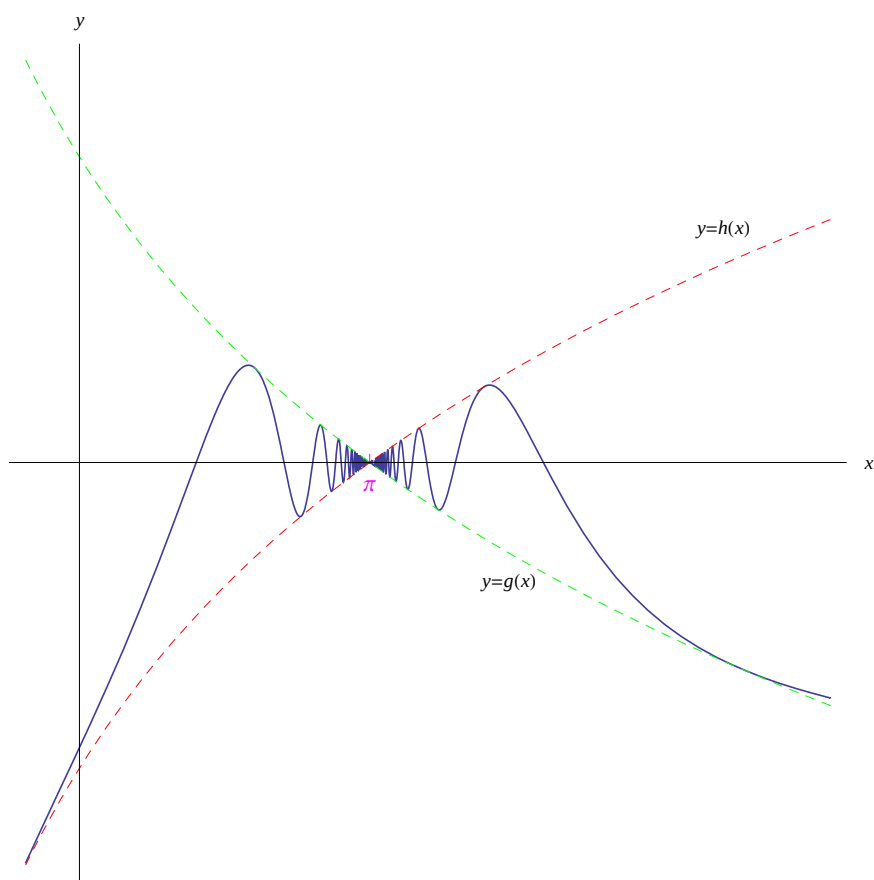


Figura 2.37: Applicazione del teorema dei carabinieri per calcolare il limite (2.64).

Criterio 6 Siano $f(x)$, $h(x)$ definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ e regolari in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$.

• **Ipotesi**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = -\infty$$

$$\exists I(x_0) \mid x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \implies f(x) \leq h(x)$$

Tesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = -\infty \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) - \{x_0\} \implies h(x) < -\varepsilon)$$

Per ipotesi:

$$\exists I(x_0) \mid x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \implies f(x) \leq h(x)$$

Consideriamo il seguente intorno di x_0 :

$$I_{\Delta_\varepsilon}(x_0) = I(x_0) \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \Delta_\varepsilon, x_0 + \Delta_\varepsilon),$$

onde:

$$x \in X \cap I_{\Delta_\varepsilon}(x_0) - \{x_0\} \implies f(x) \leq h(x) < -\varepsilon$$

da cui:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

■

2.7 Operazioni sui limiti

Assegnate le funzioni $f_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, eseguiamo le operazioni:

$$f_1 + f_2 : X_1 \cap X_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_1 \cdot f_2 : X_1 \cap X_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{f_1}{f_2} : X' \rightarrow \mathbb{R},$$

dove:

$$X' = \{x \in X_1 \cap X_2 \mid f_2(x) \neq 0\}$$

Teorema 7 Assegnato $x_0 \in \mathcal{D}(X_1 \cap X_2)$

• **Ipotesi**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = l_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l_2 \in \mathbb{R} \quad (2.67)$$

• *Tesi*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = l_1 + l_2 \quad (2.68)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = l_1 \cdot l_2$$

e se $l_2 \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad (2.69)$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima delle (2.68).

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f_1(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}, |f_2(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies |f_1(x) + f_2(x) - (l_1 + l_2)| &\leq \underbrace{|f_1(x) - l_1|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f_2(x) - l_2|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

onde l'asserto. ■

Casi particolari:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [c + f(x)] = c + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

2.7.1 Estensione del dominio di validità del teorema 7 - Forme indeterminate

Estensione di $\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$

Consideriamo il caso in cui una delle due funzione diverge positivamente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = l \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = +\infty$$

Applicando la definizione di limite si perviene al seguente risultato:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = +\infty$$

In altri termini, se una delle funzioni converge e l'altra diverge positivamente, la somma diverge positivamente. Ciò suggerisce di adottare la seguente notazione convenzionale (per un assegnato $l \in \mathbb{R}$):

$$l + (+\infty) = +\infty \quad (2.70)$$

Osservazione 18 Si tratta di una notazione convenzionale, poichè mentre l è un numero reale, $+\infty$ non lo è. Ricordiamo, infatti, che $+\infty$ e $-\infty$ sono simboli che verificano la seguente proprietà:

$$-\infty < x < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cioè $+\infty$ è maggiore di un qualunque numero reale, mentre $-\infty$ è minore di un qualunque numero reale.

Esempio 24 $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = \frac{1}{x-2}$. Applicando la definizione di limite si perviene a:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f_1(x) = \ln 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f_2(x) = +\infty,$$

onde la somma è divergente in $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\ln x + \frac{1}{x-2} \right) = \ln 2 + (+\infty) = +\infty$$

Se la funzione $f_2(x)$ diverge negativamente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = l \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = -\infty$$

Applicando la definizione di limite si perviene al seguente risultato:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = -\infty$$

In altri termini, se una delle funzioni converge e l'altra diverge negativamente, la somma diverge negativamente. Ciò suggerisce di adottare la seguente notazione convenzionale (per un assegnato $l \in \mathbb{R}$):

$$l + (-\infty) = -\infty \quad (2.71)$$

Esempio 25 *Riprendendo le funzioni dell'esempio precedente:*

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\ln x + \frac{1}{x-2} \right) = \ln 2 + (-\infty) = -\infty \quad (2.72)$$

Se entrambe le funzioni sono divergenti positivamente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = +\infty$$

Applicando la definizione di limite si perviene al seguente risultato:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = +\infty$$

In altri termini, se entrambe le funzioni divergono positivamente, la somma diverge positivamente. Ciò suggerisce di adottare la seguente notazione convenzionale:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad (2.73)$$

Esempio 26 $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = |\ln x|$. Applicando la definizione di limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln x| = +\infty,$$

per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + |\ln x| \right) = +\infty$$

Similmente:

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty \quad (2.74)$$

Le notazioni convenzionali (2.70)-(2.72)-(2.73)-(2.74) possono essere riassunte nella seguente tabella⁵:

$l + (+\infty) = +\infty$	$l + (-\infty) = -\infty$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

Se una delle due funzioni diverge positivamente e l'altra negativamente, la somma $f_1 + f_2$ si presenta nella **forma indeterminata** $\infty - \infty$. Ad esempio, se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = -\infty,$$

⁵La notazione convenzionale $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ si giustifica in modo analogo alla $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = \infty - \infty \quad (2.75)$$

L'indeterminazione è dovuta al fatto che la somma $f_1 + f_2$ può essere convergente, divergente o non regolare.

Esempio 27

$$f_1(x) = x + 1, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = -3x, \quad f_4(x) = x + \cos x$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f_4(x) &= -\infty \end{aligned}$$

I primi tre limiti sono immediati. Per giustificare il quarto, osserviamo che si tratta di un caso simile a quello del limite (2.34), in cui abbiamo dimostrato la divergenza applicando la definizione di limite. Ora, però, conosciamo i criteri di confronto, per cui osserviamo che:

$$x + \cos x \leq x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi:

$$\exists I(-\infty) \mid x \in I(-\infty) \implies x + \cos x \leq x + 1$$

Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$$

Per il criterio di confronto 5, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_4(x) = -\infty$$

Eseguendo il limite della somma:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \infty - \infty$$

Ma $f_1(x) + f_2(x) = 1$, onde

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

La somma $f_1 + f_3$ si presenta, per $x \rightarrow +\infty$, nella forma indeterminata $\infty - \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_1(x) + f_3(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = \infty - \infty$$

Ma $f_1(x) + f_3(x) = 1 - 2x$, onde

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_1(x) + f_3(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2x) = -\infty$$

La somma $-f_3 + f_2$ si presenta, per $x \rightarrow -\infty$, nella forma indeterminata $\infty - \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [-f_3(x) + f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-f_3(x)) + \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = \infty - \infty$$

Ma $-f_3(x) + f_2(x) = 2x$, onde

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = +\infty$$

La somma $f_2 + f_4$ si presenta, per $x \rightarrow -\infty$, nella forma indeterminata $\infty - \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_2(x) + f_4(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_4(x) = \infty - \infty$$

Ma $f_2(x) + f_4(x) = \cos x$, onde tale somma è non regolare per $x \rightarrow +\infty$.

Estensione di $\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$

Consideriamo il caso:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = l \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = +\infty$$

Applicando la definizione di limite si perviene al seguente risultato:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \begin{cases} +\infty, & \text{se } l > 0 \\ -\infty, & \text{se } l < 0 \end{cases}$$

Ciò suggerisce di adottare la seguente convenzione:

$$l \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } l > 0 \\ -\infty, & \text{se } l < 0 \end{cases}$$

Alla stessa maniera si dimostra che:

$$l \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{se } l > 0 \\ +\infty, & \text{se } l < 0 \end{cases}$$

Se una delle funzioni f_1, f_2 è infinitesima in x_0 e l'altra infinita, il prodotto $f_1 f_2$ si presenta, in x_0 , nella **forma indeterminata** $0 \cdot \infty$. C'è indeterminazione poichè il prodotto può essere ivi convergente, divergente o non regolare. Senza perdita di generalità:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = -\infty$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = 0 \cdot (-\infty) = 0 \cdot \infty$$

Esempio 28 $f_1(x) = \frac{1}{x^n}, f_2(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Applicando la definizione di limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty,$$

onde:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0 \cdot \infty$$

Ma:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = 1 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = 1$$

Esempio 29 $f_1(x) = \frac{1}{x^n}, f_2(x) = x^{n+1}$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Applicando la definizione di limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty,$$

onde:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0 \cdot \infty$$

Ma:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = x \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = +\infty$$

Esempio 30 $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{\sin x}{x}$. Dall'esempio precedente segue: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$. Per determinare il secondo limite, osserviamo che $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$, ma:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \implies -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \\ \implies -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Per il teorema dei carabinieri (criterio 4):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Perciò:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = (+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot \infty$$

Ma:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = \sin x \implies \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} [f_1(x) \cdot f_2(x)]$$

Estensione di $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)}$

Premessa:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+ &\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^- &\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty &\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^-, \end{aligned}$$

Cioè:

$$\frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

E ancora:

$$\frac{1}{+\infty} = 0^+, \quad \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

In base a questa premessa, scriviamo il rapporto come

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(x)}$$

Tenendo conto dei risultati precedenti, se risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = 0^+,$$

si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = +\infty$$

Cioè:

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

Allo stesso modo, se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = 0^-,$$

si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = -\infty$$

Cioè:

$$\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

Se invece:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = +\infty,$$

si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0^+$$

Perveniamo dunque alle seguenti relazioni convenzionali:

$$\begin{aligned} \frac{+\infty}{0^\pm} &= \pm\infty, \quad \frac{-\infty}{0^\pm} = \mp\infty \\ \frac{0^+}{\pm\infty} &= 0^\pm, \quad \frac{0^-}{\pm\infty} = 0^\mp \end{aligned}$$

Riassumendo:

$-(+\infty) = -\infty$	$l \cdot (+\infty) = +\infty \quad (l > 0)$
$+(-\infty) = -\infty$	$-l \cdot (+\infty) = -\infty \quad (l > 0)$
$l + (+\infty) = +\infty$	$l \cdot (-\infty) = -\infty \quad (l > 0)$
$l + (-\infty) = -\infty$	$-l \cdot (-\infty) = +\infty \quad (l > 0)$
$l - (-\infty) = +\infty$	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
$(+\infty) - (-\infty) = +\infty$	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
$\frac{+\infty}{0^\pm} = \pm\infty$	$\frac{-\infty}{0^\pm} = \mp\infty$
$\frac{0^+}{\pm\infty} = 0^\pm$	$\frac{0^-}{\pm\infty} = 0^\mp$

2.7.2 Osservazioni importanti

Nelle (2.68) la regolarità di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ è condizione sufficiente ma non necessaria per la regolarità di $f_1(x) + f_2(x)$ e di $f_1(x)f_2(x)$. Ad esempio:

$$f_1(x) = \frac{1}{x} + \sin x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x} - \sin x,$$

sono entrambe non regolari per $x \rightarrow +\infty$. Ma la somma $f_1(x) + f_2(x) = \frac{2}{x}$ è ivi regolare, giacchè $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$. Per quanto riguarda la seconda delle (2.68), sussiste il teorema:

Teorema 8 *Ipotesi*

$f_1(x)$ è infinitesima in x_0
 $f_2(x)$ è ivi definitivamente limitata

Tesi:

$f_1(x) f_2(x)$ è infinitesima in x_0

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, supponiamo che f_1 e f_2 siano entrambe definite in X .

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \setminus \{x_0\} \implies |f_1(x)| < \varepsilon \\ \exists I_\Delta(x_0) \mid x \in X \cap I_\Delta(x_0) \setminus \{x_0\} \implies |f_2(x)| < M \end{aligned}$$

Ne segue

$$x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap I_\Delta(x_0) \setminus \{x_0\} \implies |f_1(x) + f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)| < \varepsilon + M$$

cioè l'asserto. ■

In maniera analoga si dimostra il teorema

Teorema 9 *Ipotesi*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = +\infty \quad [-\infty]$$

*Intorno a x_0 , $f_2(x)$ è definitivamente maggiore [minore]
 di un numero positivo [negativo]*

Tesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) f_2(x) = +\infty \quad [-\infty]$$

Ad esempio:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = e^{\sin x}$$

da cui

$$f_2(x) \geq \frac{1}{e} > 0, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

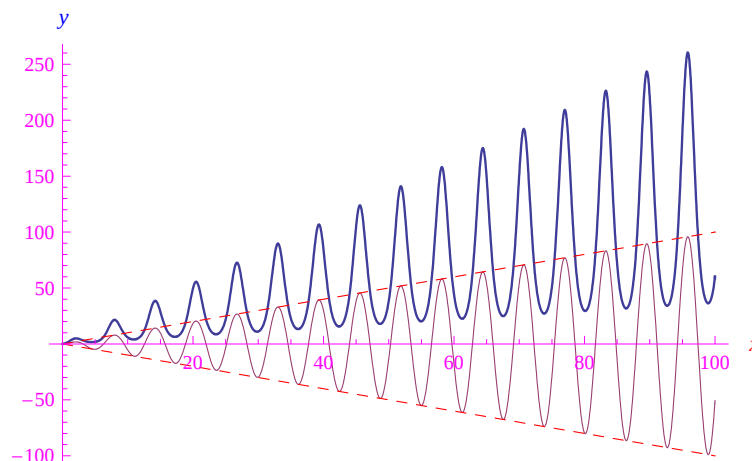
Ne segue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\sin x} = +\infty$$

Di contro, se $f_2(x) = \sin x$ si ha che tale funzione non è definitivamente maggiore di un numero positivo (in un intorno di $+\infty$) per cui è violata una delle ipotesi del teorema. D'altra parte è facile convincersi che

$$\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$$

In fig. 2.38 riportiamo il grafico di entrambe le funzioni.


 Figura 2.38: Grafico delle funzioni $x e^{\sin x}$ e $x \sin x$.

2.8 Le funzioni continue

2.8.1 Definizione di continuità

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X \cap \mathcal{D}(X)$. Supponiamo che la funzione sia convergente in x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Il numero reale l non è legato al valore assunto dalla funzione in x_0 , ovvero al numero reale $f(x_0)$. Tuttavia, esiste una speciale classe di funzioni per le quali risulta $f(x_0) = l$. Sono le cosiddette **funzioni continue**. Più precisamente, sussiste la seguente definizione:

Definizione 71 *Assegnata la funzione reale di variabile reale $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, se $x_0 \in X \cap \mathcal{D}(X)$, diremo che la funzione è **continua in** x_0 se risulta:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (2.76)$$

Cioè:

$$\forall J_\varepsilon(f(x_0)), \exists I_\delta(x_0) \mid x \in X \cap I_\delta(x_0) \implies f(x) \in J_\varepsilon(f(x_0)) \quad (2.77)$$

La (2.77) può essere scritta in termini del raggio dei rispettivi intorno:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Osservazione 19 *La continuità di una funzione è una particolare convergenza della funzione medesima.*

Esempio 31 *Verifichiamo la continuità della funzione identica $f(x) = x$ in un punto arbitrario $x_0 \in \mathbb{R}$. Risulta:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon \mid x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta_\varepsilon \xRightarrow{x=f(x)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

da cui la continuità, in forza dell'arbitrarietà del punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Per una generica f continua in x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ma, in virtù dell'esempio precedente, $x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x$, onde:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) \quad (2.78)$$

Formalmente, il simbolo funzionale f può essere interpretato come un operatore che applicato a x , restituisce il numero reale $f(x)$. Allo stesso modo, il simbolo $\lim_{x \rightarrow x_0}$ denota l'operatore limite. Riscrivendo la (2.78):

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f\right)(x) = \left(f \lim_{x \rightarrow x_0}\right)(x), \quad \forall x \in X,$$

dove $f \lim_{x \rightarrow x_0}$ denota il prodotto degli operatori f e $\lim_{x \rightarrow x_0}$. Da ciò segue, da un punto di vista formale,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = f \lim_{x \rightarrow x_0}, \quad \forall f \text{ continua in } x_0$$

che denota la commutatività del prodotto degli operatori $\lim_{x \rightarrow x_0}$ e f . Per quanto detto, tale proprietà è valida solo per le funzioni continue. All'atto pratico, si dice che nel caso di una funzione continua, il limite si calcola *per continuità*.

Nella definizione di continuità è $x_0 \in X \cap \mathcal{D}(X)$, cioè x_0 è un punto di accumulazione per X appartenente a X . Tuttavia, è possibile estendere tale definizione al caso in cui x_0 è **punto isolato** per X : $x_0 \in X$, $x_0 \notin \mathcal{D}(X)$. Abbiamo:

$$x_0 \in X, x_0 \notin \mathcal{D}(X) \implies \exists I_0(x_0) \mid X \cap I_0(x_0) = \{x_0\},$$

onde:

$$\forall J_\varepsilon(f(x_0)), \exists I_0(x_0) \mid x \in X \cap I_0(x_0) \implies f(x) = f(x_0) \in J_\varepsilon(f(x_0)),$$

da cui la continuità di f in x_0 . La definizione di continuità nei punti isolati di X ci consente di estendere la definizione 71:

Definizione 72 La funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in X se è continua in ogni punto $x \in X$.

Teorema 10

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ è continua} \\ \text{in } x_0 \end{array} \right) \iff \forall I_\delta(x_0), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(f, X \cap I_\delta(x_0)) = 0,$$

dove $\Omega(f, X \cap I_\delta(x_0))$ è l'*oscillazione* della funzione in $X \cap I_\delta(x_0)$.

Dimostrazione. Implicazione inversa.

Per ipotesi è

$$\forall I_\delta(x_0), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(f, X \cap I_\delta(x_0)) = 0$$

Per definizione di oscillazione di una funzione:

$$\Omega(f, X \cap I_\delta(x_0)) = \sup_{x', x'' \in X \cap I_\delta(x_0)} |f(x') - f(x'')|$$

Quindi:

$$\forall x \in X \cap I_\delta(x_0), 0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq \Omega(f, X \cap I_\delta(x_0))$$

Ma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Omega(f, X \cap I_\delta(x_0)) \stackrel{(x \rightarrow x_0 \Rightarrow \delta \rightarrow 0)}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(f, X \cap I_\delta(x_0)) = 0,$$

e banalmente $\lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$, onde per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0,$$

da cui:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Implicazione diretta.

Per ipotesi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Cioè:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

che implica:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \mid x', x'' \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) &\Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x') - f(x'')| &= |f(x') - f(x_0) + f(x_0) - f(x'')| \\ &\leq \underbrace{|f(x') - f(x_0)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f(x'') - f(x_0)|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \mid x', x'' \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) &\Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x') - f(x'')| & \\ \leq \underbrace{\sup_{x', x'' \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0)} |f(x') - f(x'')|}_{= \Omega(f, X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0))} &< 2\varepsilon, \end{aligned}$$

onde l'asserto. ■

La proposizione 33 applicata al caso della convergenza, porge:

$$f \text{ è convergente in } x_0 \iff f(x_0^-) = f(x_0^+)$$

Nel caso della continuità:

Proposizione 34

$$f \text{ è continua in } x_0) \iff \left(\begin{array}{l} f \text{ è continua a sinistra} \\ \text{e a destra in } x_0 \end{array} \right.$$

Cioè:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Dalla proposizione 20 segue quest'altra:

Proposizione 35

$$f \text{ è continua in } x_0) \implies \left(\begin{array}{l} f \text{ è definitivamente} \\ \text{limitata intorno a } x_0 \end{array} \right.$$

Per la proposizione 25, si ha:

Proposizione 36

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è continua} \\ \text{in } X \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{l} |f| \text{ è continua} \\ \text{in } X \end{array} \right) \not\Leftarrow$$

Osservazione 20 Dalla continuità di $f(x) = x$ in $\mathbb{R}$, segue per la proposizione precedente la continuità di $|x|$ in $\mathbb{R}$.

2.8.2 Teoremi sulle funzioni continue

Per quanto visto, la continuità di una funzione è una particolare convergenza della funzione medesima. Ciò implica che i teoremi enunciati sui limiti diventano altrettanti teoremi sulle funzioni continue. Ad esempio, il teorema della permanenza del segno 3:

Teorema 11 Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X \cap \mathcal{D}(X)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0 \implies \left(\begin{array}{l} f \text{ ha definitivamente} \\ \text{lo stesso segno di } f(x_0) \\ \text{intorno a } x_0 \end{array} \right) \quad (2.79)$$

Corollario 1 Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X \cap \mathcal{D}(X)$.

$$\forall I(x_0), \exists x', x'' \mid f(x') > 0, f(x'') < 0 \implies f(x_0) = 0 \quad (2.80)$$

Teorema 12

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è continua} \\ \text{nell'intervallo } X \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{l} f^{-1} \text{ è continua nel proprio} \\ \text{insieme di definizione} \end{array} \right.$$

Osservazione 21 Il teorema 12 può essere violato se l'insieme di definizione di f non è un intervallo. Ad esempio, consideriamo il caso in cui X è l'unione degli intervalli $[-3, -2]$ e $(0, 1]$. Precisamente:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \in [-3, -2] \\ x, & \text{se } x \in (0, 1] \end{cases} \quad (2.81)$$

Tale funzione è manifestamente continua in X (il grafico è in fig. 2.39)

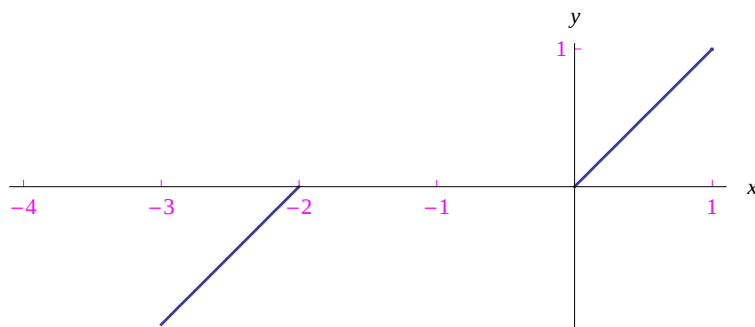


Figura 2.39: Grafico della funzione (2.81)

La funzione inversa è:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y - 2, & \text{se } y \in [-1, 0] \\ y, & \text{se } y \in (0, 1] \end{cases} \quad (2.82)$$

La funzione (2.82) è definita in $Y = [-1, 1]$ e non è regolare in $y_0 = 0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} f^{-1}(y) = -2^-, \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} f^{-1}(y) = 0^+$$

Conseguentemente, non è continua in y_0 . Il grafico è riportato in fig. 2.40.

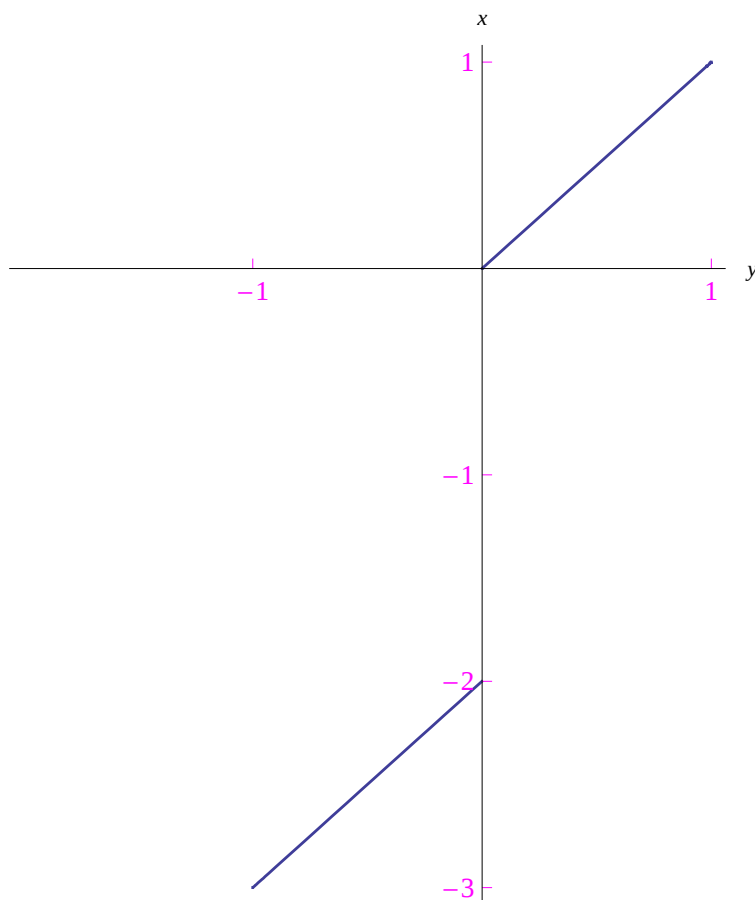


Figura 2.40: Grafico della funzione (2.82).

2.9 Punti di discontinuità

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}(X)$.

Definizione 73 La funzione f è **discontinua** in x_0 se **non** risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se f è discontinua in x_0 , significa che i casi possibili sono:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$, $l \in \mathbb{R}$
2. $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$

Nel caso 1 si dice che x_0 è un **punto di discontinuità eliminabile** (o **rimovibile** o **apparente**). Tale denominazione si giustifica osservando che la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq x_0 \\ l, & \text{se } x = x_0 \end{cases}, \quad (2.83)$$

è continua in x_0 . A questo punto, possono presentarsi due sottocasi. Il primo è quello in cui la funzione f non è definita in x_0 ; si dirà quindi che la funzione (2.83) è ottenuta *prolungando per continuità la funzione f* . Nel secondo, invece, diremo che la funzione (2.83) è ottenuta *modificando il valore di f in x_0* .

Nei casi 2 e 3, si dice che x_0 è una **punto di discontinuità non eliminabile**.

Esempio 32 La funzione $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ha in $x = 0$ una discontinuità eliminabile. Infatti, per la proposizione (24) risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

per cui la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

è continua in $x = 0$.

Le discontinuità non eliminabili si classificano in:

- A. Discontinuità di prima specie.
- B. Discontinuità di seconda specie o singolarità.

Esaminiamole separatamente.

2.9.1 Discontinuità di prima specie

In questo caso la funzione è convergente a sinistra e a destra di x_0 . Cioè:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R} - \{l_1\}$$

Osservazione 22 È spesso utilizzata la notazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

La grandezza

$$s(x_0) = l_2 - l_1 \neq 0,$$

è il **salto di discontinuità** della funzione in x_0 . Se la funzione è definita in x_0 e riesce:

$$f(x_0) = \frac{l_1 + l_2}{2},$$

diremo che x_0 è una **discontinuità simmetrica**. Il grafico di una funzione che ha una discontinuità di prima specie in x_0 , presenta un'interruzione in corrispondenza della retta di equazione $x = x_0$. Il valore assoluto $|s(x_0)|$ del salto $s(x_0)$ è la misura (lunghezza) del segmento $\overline{P'_0 P''_0}$, essendo $P'_0(x_0, f(x_0^+))$ e $P''_0(x_0, f(x_0^-))$. Nel caso di una discontinuità simmetrica, il punto $P_0(x_0, f(x_0))$ è il punto medio del segmento $\overline{P'_0 P''_0}$. Consultare la fig. 2.41.

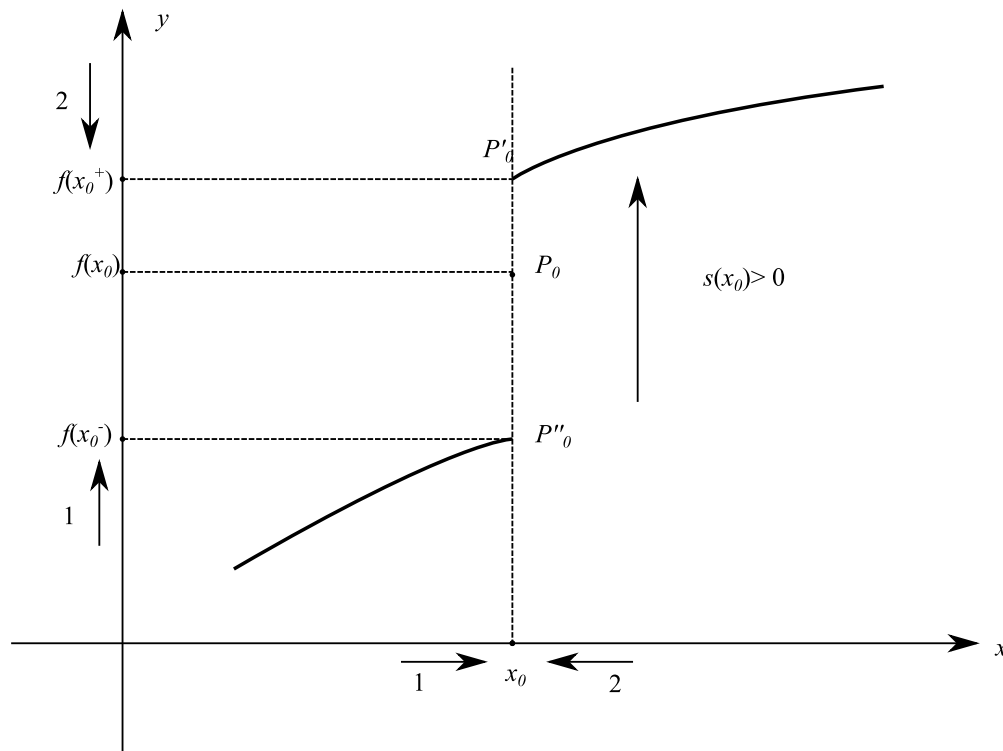


Figura 2.41: Grafico di una funzione che ha in x_0 una discontinuità di prima specie. In questo caso non si tratta di una discontinuità simmetrica, giacchè P_0 non è il punto medio del segmento $\overline{P'_0 P''_0}$. Il salto di discontinuità è $s(x_0) > 0$.

Esempio 33 La funzione *signum* (esempio 15) ha in $x = 0$ una discontinuità finita, in quanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +1$$

Il salto di discontinuità è:

$$s(0) = +1$$

Si tratta manifestamente di una discontinuità simmetrica.

Esempio 34 Mostriamo che la funzione $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ ha una discontinuità di prima specie in $x = 0$.

Esplicitando il valore assoluto, si trova:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x > 0 \\ x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

onde:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

Il salto di discontinuità è $s(0) = 2$. Il grafico è riportato in fig. 2.42.

2.9.2 Discontinuità di seconda specie

Sono tutte e sole le discontinuità non eliminabili che non siano di prima specie. Quindi si verifica una delle circostanze seguenti:

1. $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
2. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \nexists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$
3. $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \mp\infty$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$

Se x_0 è un punto di discontinuità di seconda specie, e ad esempio, non esiste il limite sinistro di f per $x \rightarrow x_0$, in ogni intorno sinistro di x_0 la funzione è infinitamente oscillante, nel senso che compie infinite oscillazioni che non si smorzano per $x \rightarrow x_0$.

Esempio 35 Determiniamo i punti di discontinuità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x < 0 \\ \sin 200x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}, \quad (2.84)$$

il cui grafico è riportato in fig. 2.43. In $x = 0$ la funzione è non regolare a sinistra, giacchè:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x},$$

mentre è continua a destra di tale punto, avendosi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin 200x = 0^+$$

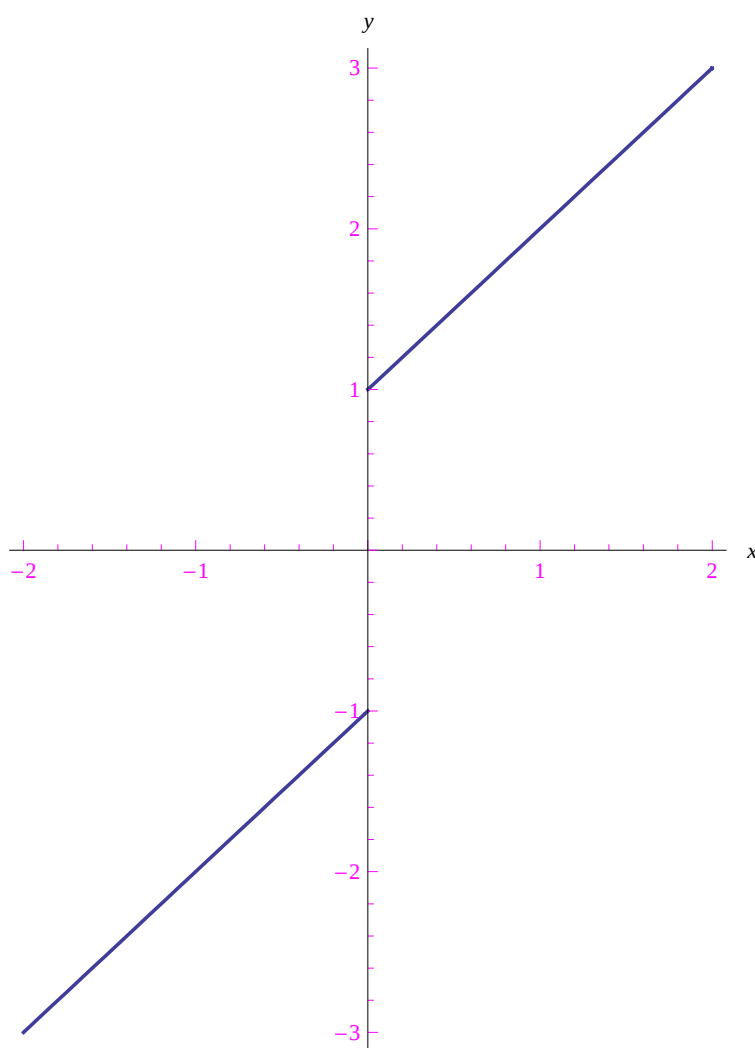


Figura 2.42: Grafico della funzione $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$.

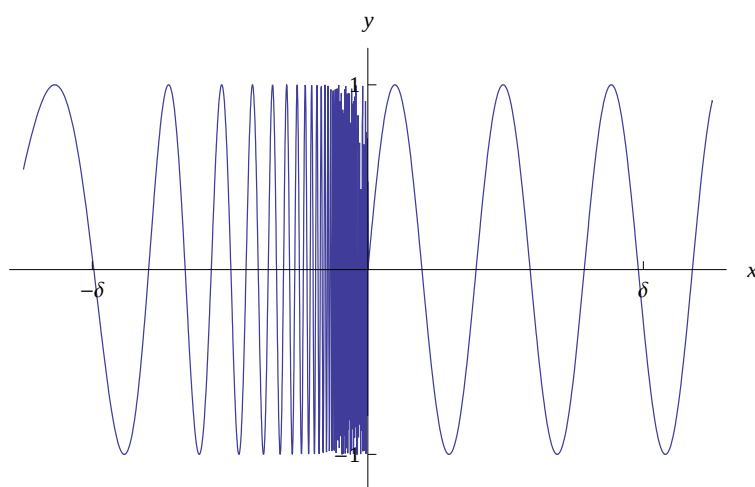


Figura 2.43: Grafico della funzione (2.81)

2.9.3 Funzioni generalmente continue

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, dove X è un intervallo (limitato o illimitato). Definiamo:

$$S = \{\xi \in \mathcal{D}(X) \mid \xi \text{ è punto di discontinuità per } f\}$$

Sussiste la seguente definizione:

Definizione 74 f è **generalmente continua** in X se $S \neq \emptyset$ e $\mathcal{D}(S) = \emptyset$, cioè se l'insieme dei punti di discontinuità è privo di punti di accumulazione al finito.

Conclusione 3 Se f è generalmente continua in X , in ogni intervallo non vuoto $(a, b) \subset X$, esiste al più un numero finito di punti di discontinuità.

Esempio 36 Consideriamo la funzione parte intera di x (sezione (1.2.6)). Riguardo alla continuità, ogni punto di ascissa intera è punto di discontinuità di prima specie. Sia:

$$x_0 \in \mathbb{R} - \{0\} \mid [x_0] = x_0$$

Distinguiamo i due casi:

- $x_0 > 0$

Qui è (fig. 2.44):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} [x] = x_0 - 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} [x] = x_0,$$

cioè una discontinuità di prima specie. Il salto è $s(x_0) = 1$. Inoltre, avendosi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} [x] = x_0 = [x_0]$, si ha che in x_0 la funzione è continua a destra.

- $x_0 < 0$

Qui è (fig. 2.45):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} [x] = x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} [x] = x_0 + 1,$$

cioè una discontinuità di prima specie. Il salto è $s(x_0) = 1$. Inoltre, avendosi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} [x] = x_0 = [x_0]$, si ha che in x_0 la funzione è continua a sinistra.

Ne concludiamo che la funzione $[x]$ è generalmente continua. L'insieme dei punti di discontinuità è $\mathbb{N} - \{0\}$.

Esercizio 6 Determinare i punti di discontinuità della funzione $f(x) = x - [x]$.

Soluzione. Se $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si ha:

$$\begin{aligned} x \in [n-1, n) &\implies f(x) = x - (n-1) \\ x \in (-n, -n+1] &\implies f(x) = x - (-n+1) \end{aligned}$$

Esplicitiamo alcuni valori di n :

$$\begin{aligned} n = 1 &\implies \begin{cases} x \in [0, 1) \implies f(x) = x \\ x \in (-1, 0] \implies f(x) = x \end{cases} \\ n = 2 &\implies \begin{cases} x \in [1, 2) \implies f(x) = x - 1 \\ x \in (-2, -1] \implies f(x) = x + 1 \end{cases} \\ n = 3 &\implies \begin{cases} x \in [2, 3) \implies f(x) = x - 2 \\ x \in (-3, -2] \implies f(x) = x + 3 \end{cases} \\ &\dots, \end{aligned}$$

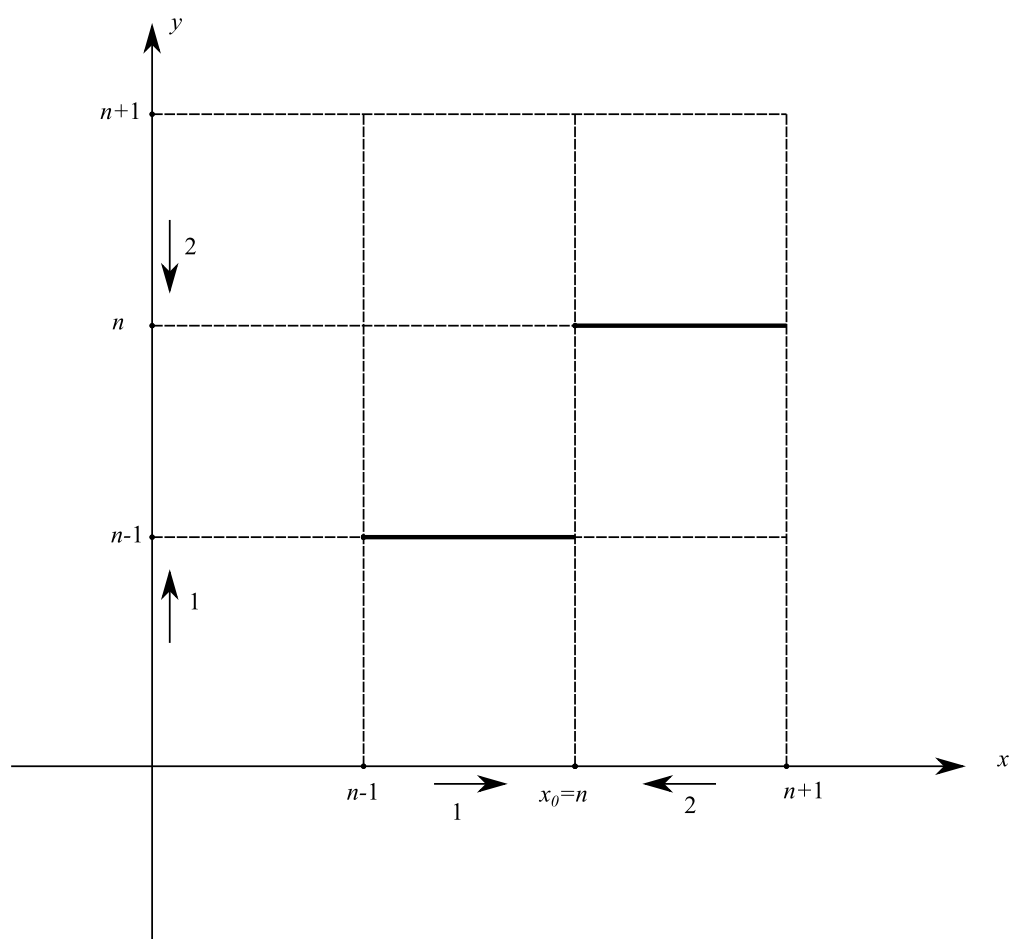


Figura 2.44: Il punto $x_0 > 0$ è di discontinuità di prima specie per la funzione $[x]$.

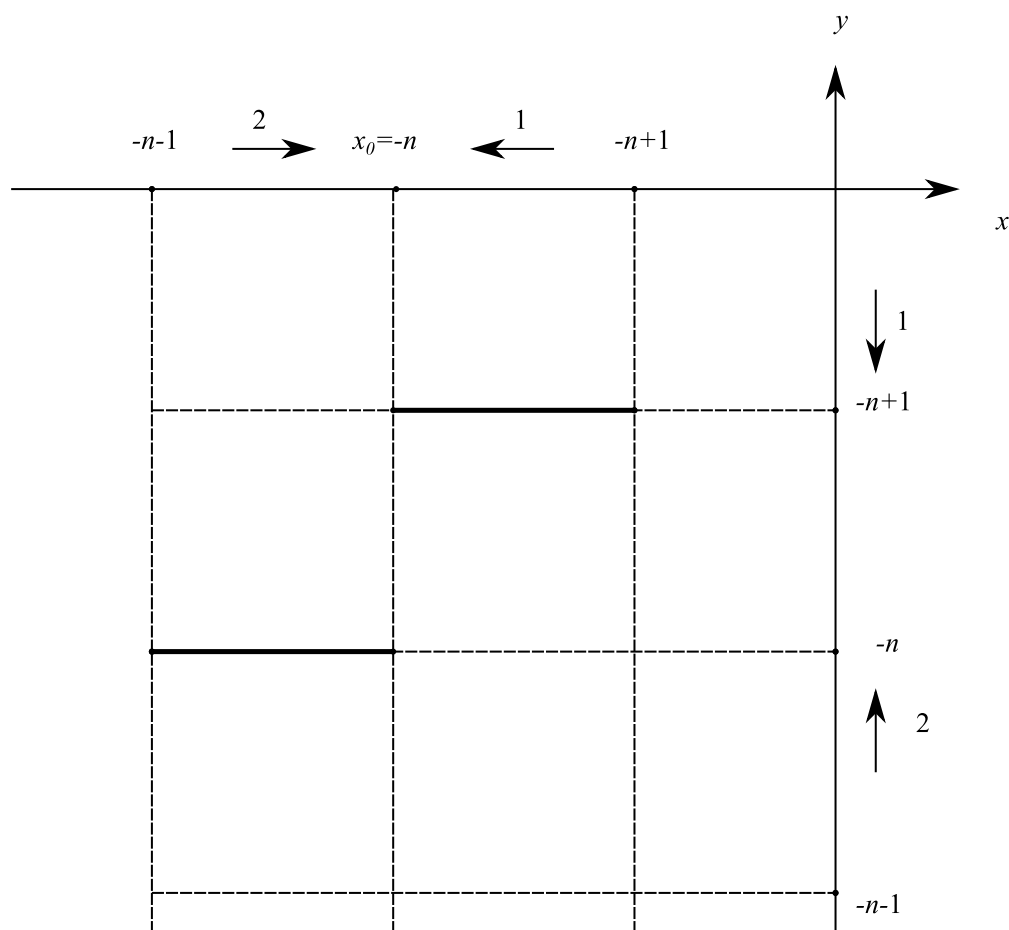


Figura 2.45: Il punto $x_0 < 0$ è di discontinuità di prima specie per la funzione $[x]$.

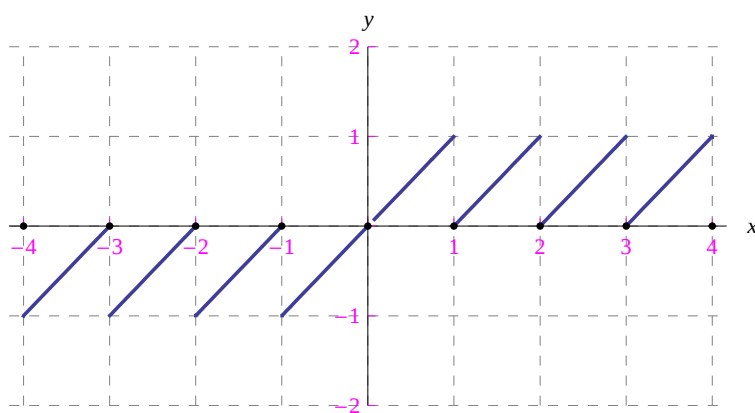


Figura 2.46: Grafico della funzione $f(x) = x - [x]$

da cui segue il grafico riportato in fig. 2.46. Riguardo alla continuità, ogni punto di ascissa intera è punto di discontinuità di prima specie. Sia:

$$x_0 \in \mathbb{R} - \{0\} \mid [x_0] = x_0$$

Distinguiamo i due casi:

- $x_0 > 0$

Qui è (fig. 2.47):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} (x - [x]) = 1^-, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x - [x]) = 0^+,$$

cioè una discontinuità di prima specie. Il salto è $s(x_0) = -1$. Inoltre, avendosi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} (x - [x]) = 0 = x_0 - [x_0]$, si ha che in x_0 la funzione è continua a destra.

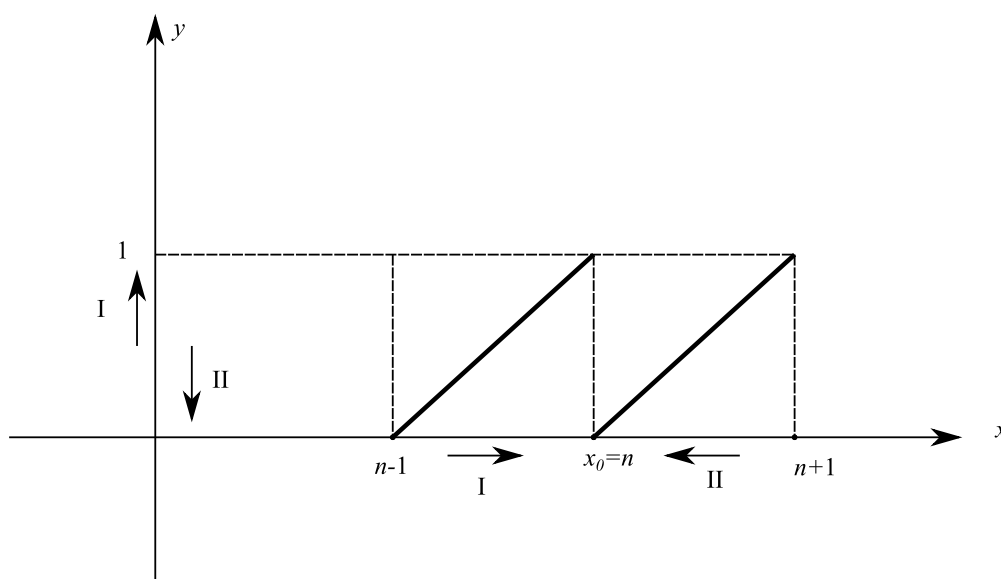


Figura 2.47: Il punto $x_0 > 0$ è di discontinuità di prima specie per la funzione $x - [x]$.

- $x_0 < 0$

Qui è (fig. 2.48):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} (x - [x]) = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x - [x]) = -1^+,$$

cioè una discontinuità di prima specie. Il salto è $s(x_0) = -1$. Inoltre, avendosi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} (x - [x]) = 0 = x_0 - [x_0]$, si ha che in x_0 la funzione è continua a sinistra.

Ne concludiamo che la funzione $x - [x]$ è generalmente continua. L'insieme dei punti di discontinuità è $\mathbb{Z} - \{0\}$.

Esercizio 7 Determinare i punti di discontinuità di $f(x) = \frac{[x]}{x}$.

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$. Riesce:

$$x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \implies f(x) = 0$$

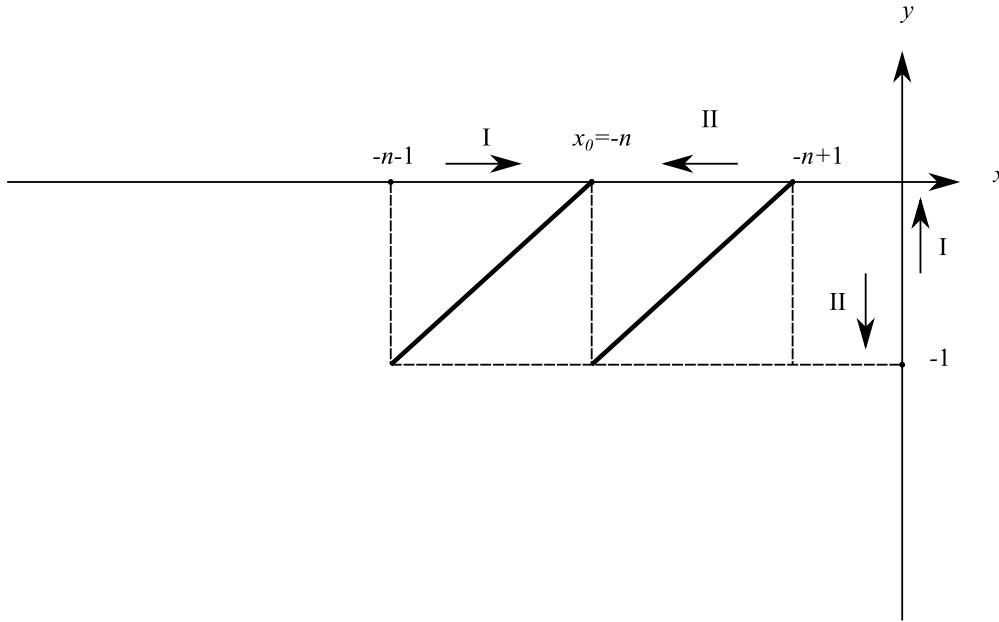


Figura 2.48: Il punto $x_0 < 0$ è di discontinuità di prima specie per la funzione $x - [x]$.

Per $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} x \in [n-1, n) &\implies [x] = n-1 \implies f(x) = \frac{n-1}{x} \\ x \in (-n, -n+1] &\implies [x] = -n+1 \implies f(x) = \frac{-n+1}{x} \end{aligned}$$

Esplicitiamo alcuni valori di n :

$$\begin{aligned} n=2 &\implies \begin{cases} x \in [1, 2) \implies f(x) = \frac{1}{x} \\ x \in (-2, -1] \implies f(x) = -\frac{1}{x} \end{cases} \\ n=3 &\implies \begin{cases} x \in [2, 3) \implies f(x) = \frac{2}{x} \\ x \in (-3, -2] \implies f(x) = -\frac{2}{x} \end{cases} \\ n=4 &\implies \begin{cases} x \in [3, 4) \implies f(x) = \frac{3}{x} \\ x \in (-4, -3] \implies f(x) = -\frac{3}{x} \end{cases} \\ &\dots, \end{aligned}$$

Se ci limitiamo a $x > 0$, vediamo che il grafico di f è composto dall'unione di un numero infinito di archi di iperbole:

$$\Gamma_n : y = \frac{n-1}{x},$$

come illustrato in fig. 2.49, da cui vediamo che i punti di ascissa intera sono punti di discontinuità di prima specie. Più precisamente, per $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

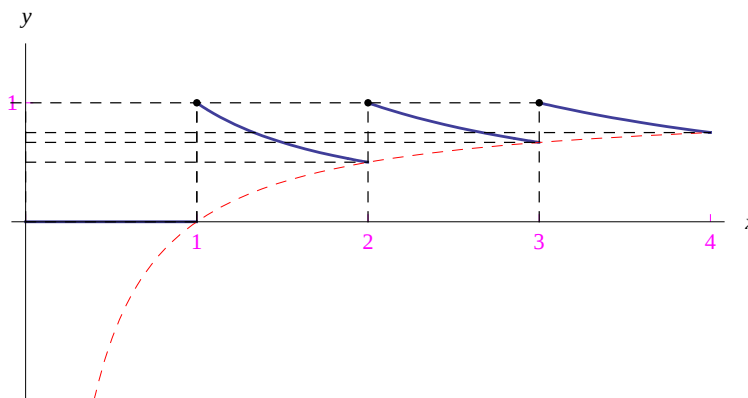
$$\lim_{x \rightarrow n^+} \frac{[x]}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{[x]}{x} = \frac{n-1}{n}$$

Il salto di discontinuità è:

$$s(n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Posto $y_n = f(n) = \frac{n-1}{n}$, si ha che $P_n(n, y_n) \in \gamma : y = \frac{x-1}{x}$, come illustrato in fig. 2.49.

Ne concludiamo che la funzione $\frac{[x]}{x}$ è generalmente continua.


 Figura 2.49: Grafico della funzione $\frac{[x]}{x}$ per $x > 0$.

Esercizio 8 Determinare i punti di discontinuità della funzione $\frac{x}{[x]}$ (per $x > 0$).

Svolgimento

È la reciproca della funzione dell'esercizio precedente. Osserviamo che $x \in (0, 1) \implies [x] = 0$, per cui la funzione non è definita in $(0, 1)$. Dobbiamo allora studiare il comportamento della funzione in $[1, +\infty)$.

Per $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$:

$$x \in [n-1, n) \implies [x] = n-1 \implies f(x) = \frac{x}{n-1}$$

Esplicitiamo alcuni valori di n :

$$n = 2 \implies x \in [1, 2) \implies f(x) = x$$

$$n = 3 \implies x \in [2, 3) \implies f(x) = \frac{x}{2}$$

$$n = 4 \implies x \in [3, 4) \implies f(x) = \frac{x}{3}$$

$$n = 5 \implies x \in [4, 5) \implies f(x) = \frac{x}{4}$$

...

Ne consegue che il grafico $\Gamma : y = f(x)$ è l'unione di infiniti segmenti semiaperti a destra. Infatti, posto:

$$\Gamma_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n-1 \leq x < n, \quad y = \frac{x}{n-1} \right\} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0, 1\},$$

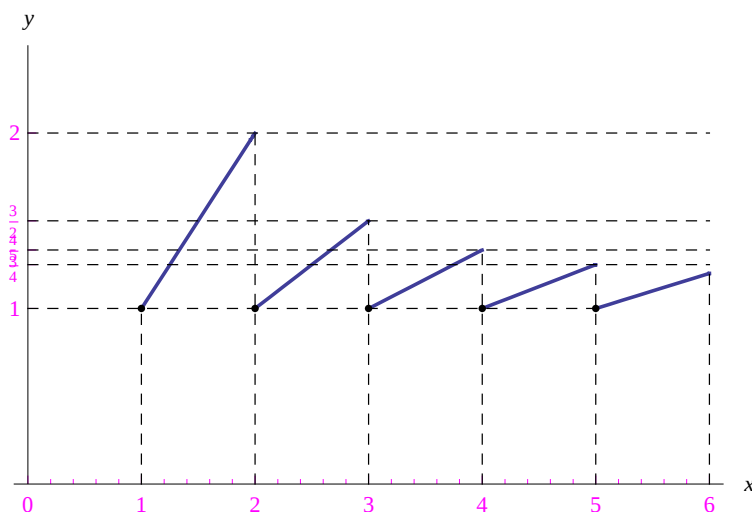
cioè

$$\Gamma_n : y = \frac{x}{n-1}, \quad x \in [n-1, n) \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

Riesce

$$\Gamma = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \Gamma_n$$

Il grafico della funzione è riportato in fig. 2.50.


 Figura 2.50: Grafico della funzione $\frac{x}{[x]}$ per $x > 0$.

Determiniamo ora il comportamento di $\frac{x}{[x]}$ in un intorno di $x = n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Dalla fig. 2.51 deduciamo che:

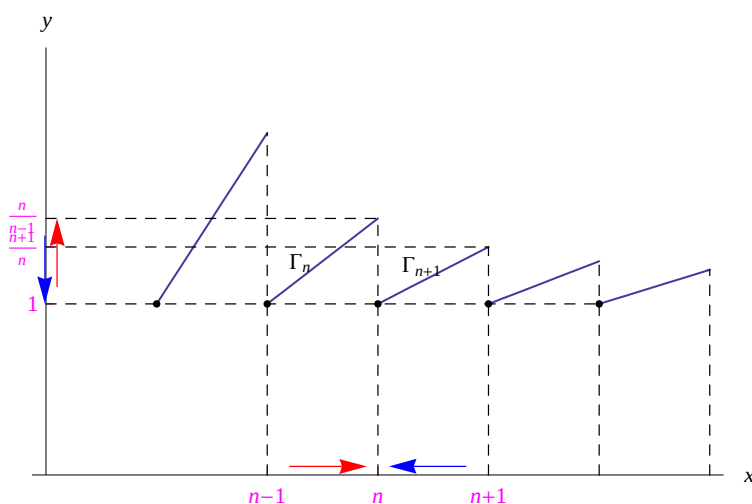
$$\lim_{x \rightarrow n^-} \frac{x}{[x]} = \frac{n}{n-1}, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{x}{[x]} = 1,$$

per cui $x = n$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto

$$s(n) = -\frac{1}{n-1} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

Al crescere indefinito di n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = 0$$


 Figura 2.51: Grafico della funzione $\frac{x}{[x]}$ per $x > 0$.

Esercizio 9 Determinare i punti di discontinuità della reciproca della funzione parte intera di x , per $x > 0$.

Svolgimento

La funzione proposta è

$$f(x) = \frac{1}{[x]}$$

Per $x \in (0, 1)$ è $[x] = 0$, per cui la funzione non è definita in $(0, 1)$. Riferiamoci quindi all'intervallo illimitato $X = [1, +\infty)$. Per $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$:

$$x \in [n-1, n) \implies [x] = n-1 \implies f(x) = \frac{1}{n-1}$$

Esplicitiamo alcuni valori di n :

$$n = 2 \implies x \in [1, 2) \implies f(x) = 1$$

$$n = 3 \implies x \in [2, 3) \implies f(x) = \frac{1}{2}$$

$$n = 4 \implies x \in [3, 4) \implies f(x) = \frac{1}{3}$$

$$n = 5 \implies x \in [4, 5) \implies f(x) = \frac{1}{4}$$

...

Ne consegue che il grafico $\Gamma : y = f(x)$ è l'unione di infiniti segmenti semiaperti a destra. Infatti, posto:

$$\Gamma_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n-1 \leq x < n, \ y = \frac{1}{n-1} \right\} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0, 1\},$$

cioè

$$\Gamma_n : y = \frac{1}{n-1}, \quad x \in [n-1, n) \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

Riesce

$$\Gamma = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \Gamma_n$$

Il grafico della funzione è riportato in fig. 2.52.

Determiniamo ora il comportamento di $\frac{x}{[x]}$ in un intorno di $x = n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Dalla fig. 2.53 deduciamo che:

$$\lim_{x \rightarrow n^-} \frac{1}{[x]} = \frac{1}{n-1}, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{1}{[x]} = \frac{1}{n},$$

per cui $x = n$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto

$$s(n) = -\frac{1}{n-1} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

Al crescere indefinito di n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = 0$$

Esercizio 10 Classificare i punti di discontinuità della funzione $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$.

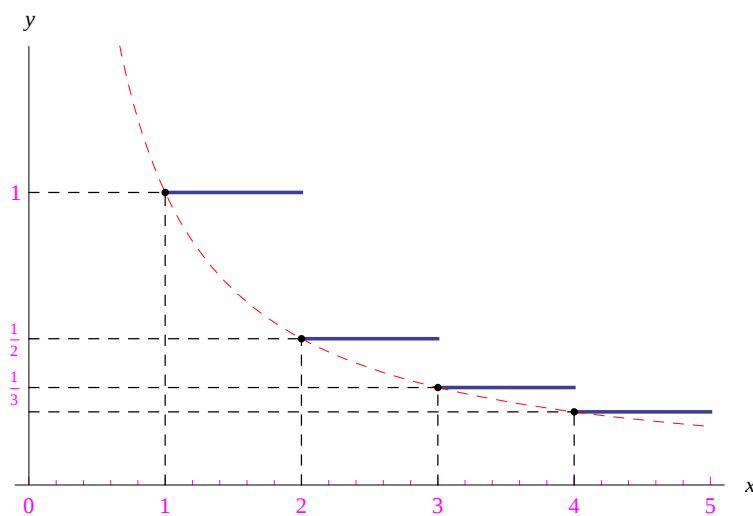


Figura 2.52: Grafico della funzione $\frac{1}{[x]}$ per $x > 0$. I punti $P_n \left(n, \frac{1}{n} \right)$ appartengono all'iperbole $y = \frac{1}{x}$.

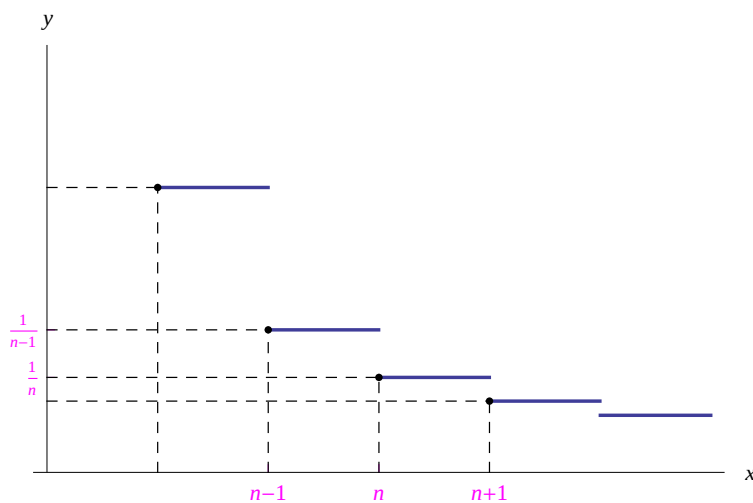


Figura 2.53: Grafico della funzione $\frac{1}{[x]}$ per $x > 0$.

Svolgimento

Osserviamo subito che tale funzione è definita in $(0, +\infty)$. Inoltre:

$$\forall x \in (1, +\infty), \quad 0 < \frac{1}{x} < 1 \implies \left[\frac{1}{x} \right] = 0$$

Cioè f è identicamente nulla in $(1, +\infty)$. Viceversa per

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \quad \text{con } n > 1,$$

si ha:

$$\frac{1}{x} \geq n, \quad \frac{1}{x} < n+1$$

Esplicitiamo alcuni valori di n :

$$\begin{aligned} n=1 &\implies \frac{1}{2} < x \leq 1 \implies \frac{1}{x} \geq 1, \quad \frac{1}{x} < 2 \implies \left[\frac{1}{x} \right] = 1 \\ n=2 &\implies \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \implies \frac{1}{x} \geq 2, \quad \frac{1}{x} < 3 \implies \left[\frac{1}{x} \right] = 2 \\ n=3 &\implies \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3} \implies \frac{1}{x} \geq 3, \quad \frac{1}{x} < 4 \implies \left[\frac{1}{x} \right] = 3 \\ n=4 &\implies \frac{1}{5} < x \leq \frac{1}{4} \implies \frac{1}{x} \geq 4, \quad \frac{1}{x} < 5 \implies \left[\frac{1}{x} \right] = 4 \\ &\dots \end{aligned}$$

Ne consegue che il grafico di f è:

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma',$$

dove

$$\Gamma_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < +\infty, \quad y = 0 \right\},$$

e

$$\Gamma' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n,$$

essendo

$$\Gamma_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \quad y = \frac{1}{n}, \quad \text{con } n > 1 \right\}$$

In altri termini, il grafico di $\left[\frac{1}{x} \right]$ è l'unione di un numero infinito di segmenti. In particolare, la lunghezza dei segmenti Γ_n è decrescente al crescere di n . Possiamo infatti riferirci alla successione reale:

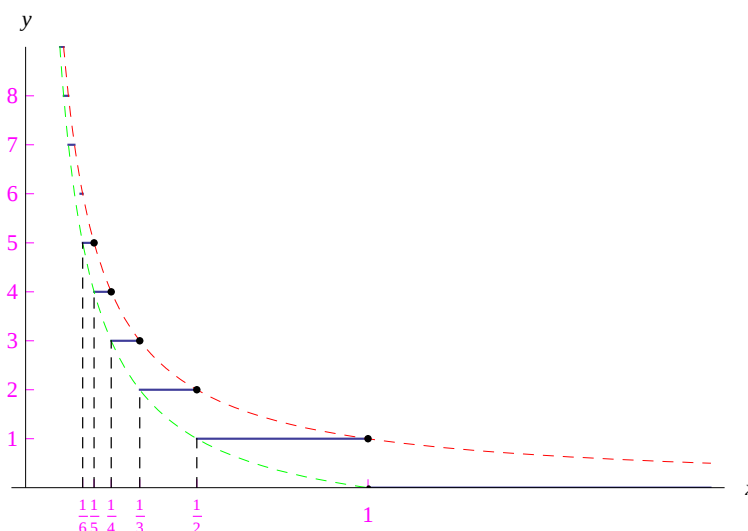
$$\{l_n\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}},$$

dove l_n è la lunghezza di Γ_n :

$$l_n = \frac{1}{n+1}$$

Dalla relazione precedente ricaviamo immediatamente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = 0$$


 Figura 2.54: Grafico della funzione $\left[\frac{1}{x}\right]$ per $x > 0$.

È facile convincersi che gli estremi del segmento n -esimo i.e. i punti $(\frac{1}{n}, 1 - n)$, $(\frac{1}{n}, n)$, appartengono rispettivamente a $\gamma_1 : y = \frac{x-1}{x}$ e $\gamma_2 : y = \frac{1}{x}$, come illustrato in fig. 2.54.

Ne concludiamo che la funzione $\left[\frac{1}{x}\right]$ ha infiniti punti di discontinuità di prima specie in $\frac{1}{n}$ per ogni $n \geq 1$. Il salto di discontinuità è:

$$s\left(x = \frac{1}{n}\right) = 1, \quad \forall n \geq 1$$

2.10 Limiti di alcune funzioni elementari

È facile mostrare che le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione. Non ci resta quindi che studiare il comportamento di tali funzioni nei punti di accumulazione non appartenenti a tali insiemi.

2.10.1 Potenza di esponente reale

È la funzione:

$$f(x) = x^\alpha, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

È istruttivo distinguere i due casi $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$.

1. $\alpha > 0$

Osserviamo innanzitutto che

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty \quad (2.85)$$

Consideriamo poi α razionale: $\alpha \in \mathbb{Q} \implies \alpha = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$ ($n \neq 0$). Riguardo all'insieme di definizione di f , abbiamo i seguenti casi:

$$\begin{aligned} n \text{ pari} &\implies f(x) = \sqrt[n]{x^m} \text{ è definita in } X = [0, +\infty) \\ n \text{ dispari} &\implies f(x) = \sqrt[n]{x^m} \text{ è definita in } X = (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

Per n dispari, ridefiniamo l'esponente $\alpha = \frac{m}{2n-1}$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, cosicchè $f(x) = \sqrt[2n-1]{x^m}$. Il comportamento per $x \rightarrow -\infty$, si deduce dalla (2.85) sfruttando la parità della funzione. Precisamente:

$$\begin{aligned} m \text{ pari} &\implies f \text{ è pari} \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[2n-1]{x^m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[2n-1]{x^m} = +\infty \\ m \text{ dispari} &\implies f \text{ è dispari} \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[2n-1]{x^m} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[2n-1]{x^m} = -\infty \end{aligned}$$

Esempio 37 Per $m = 3$, $n = 4$, abbiamo la funzione $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$, il cui grafico è riportato in fig. 2.55. Risulta:

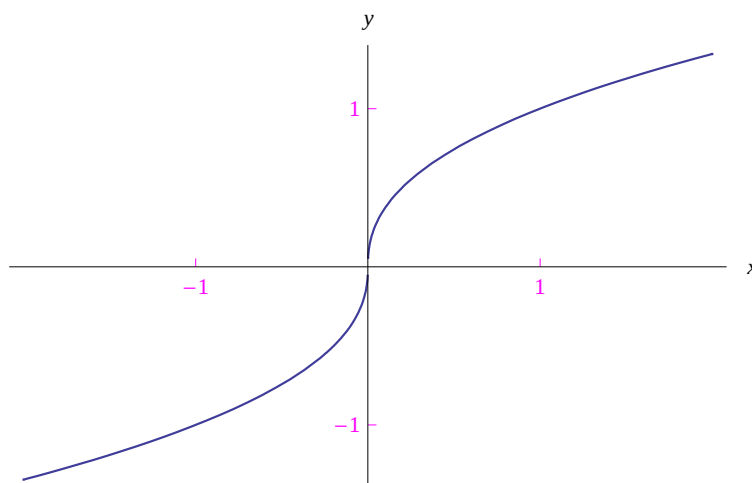


Figura 2.55: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^3} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{x^3} = -\infty$$

Per $m = 3$, $n = 1$, abbiamo la funzione $f(x) = x^3$, il cui grafico è la parabola cubica, riportata in fig. 2.56. Risulta:

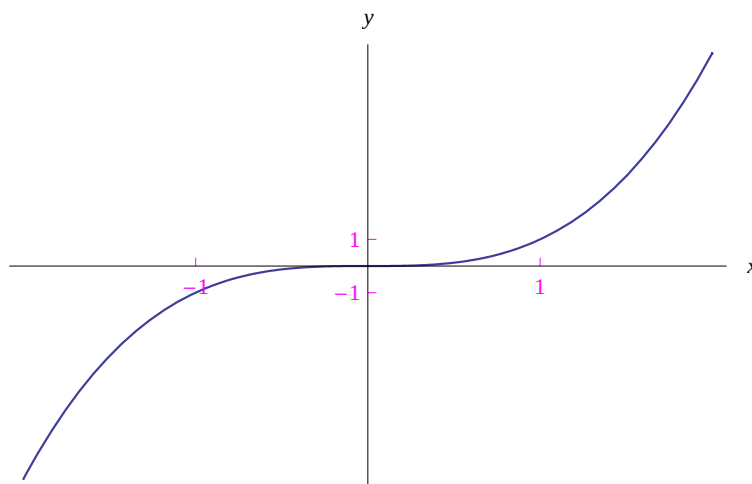


Figura 2.56: Grafico della funzione $f(x) = x^3$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Esempio 38 Per $m = 2$, $n = 5$, abbiamo la funzione $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, il cui grafico è riportato in fig. 2.57

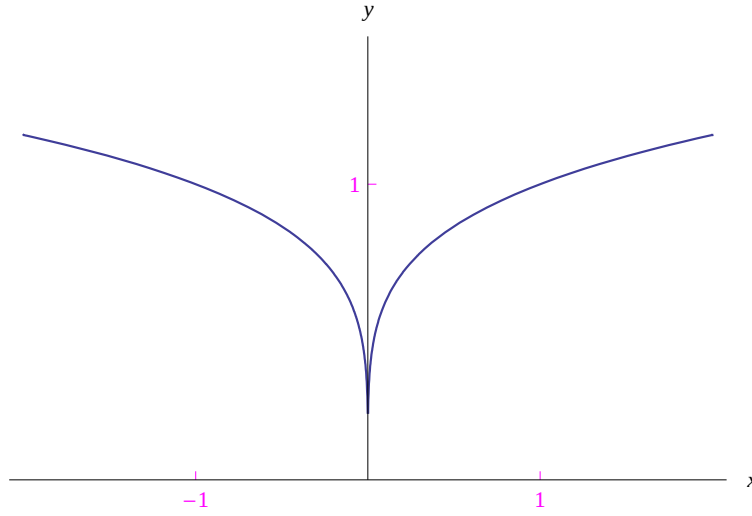


Figura 2.57: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{x^2} = +\infty$$

2. $\alpha < 0$

Scriviamo:

$$f(x) = x^{-|\alpha|} = \frac{1}{|x|^{|\alpha|}} \quad (2.86)$$

Abbiamo i seguenti casi:

$$\begin{aligned} |\alpha| = \frac{m}{n}, n \text{ dispari} &\implies X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ |\alpha| = \frac{m}{n}, n \text{ pari} &\implies X = (0, +\infty) \\ |\alpha| \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} &\implies X = (0, +\infty) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Nel primo caso i punti di accumulazione non appartenenti a X sono $0, +\infty, -\infty$. Nei rimanenti due casi, invece, abbiamo i punti 0 e $+\infty$. In virtù della (2.86):

$$\forall \alpha \in (-\infty, 0), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-|\alpha|} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{|\alpha|}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Consideriamo la prima delle (2.87), ridifinendo $|\alpha| = \frac{m}{2n-1}$:

$$x^{-|\alpha|} = \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \begin{cases} \frac{1}{-\infty} = 0^-, & \text{se } m \text{ è dispari} \\ \frac{1}{+\infty} = 0^+, & \text{se } m \text{ è pari} \end{cases}$$

Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-|\alpha|} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{|\alpha|}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Osserviamo poi che per $|\alpha| = \frac{m}{n}$, con n dispari, possiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-|\alpha|}$, giacchè la funzione è definita anche per $x < 0$. Abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \begin{cases} \frac{1}{0^-} = -\infty, & \text{se } m \text{ è dispari} \\ \frac{1}{0^+} = +\infty, & \text{se } m \text{ è pari} \end{cases}$$

Ricapitolando:

$$m \text{ dispari} \implies \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} = -\infty \end{cases},$$

cioè, per m dispari, $\frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}}$ è non regolare in $x = 0$.

$$m \text{ pari} \implies \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} = +\infty \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} = +\infty,$$

cioè, per m pari, $\frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}}$ è regolare in $x = 0$, risultando ivi divergente positivamente.

Esempio 39 La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, il cui grafico è un'iperbole equilatera (fig. 2.58), rientra nel caso precedente. Precisamente è m, n dispari. Quindi la funzione è definita in $\mathbb{R} - \{0\}$, avendosi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} &= 0^-, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= +\infty \end{aligned}$$

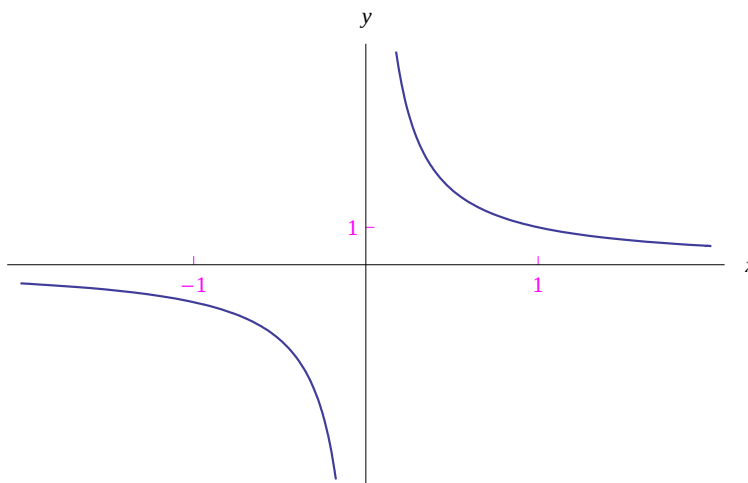


Figura 2.58: Grafico della funzione $\frac{1}{x}$.

Esempio 40 La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{x^4}}$, il cui grafico è riportato in fig. 2.59, rientra nel caso precedente. Precisamente è m pari, n dispari. Quindi la funzione è definita in $\mathbb{R} - \{0\}$, avendosi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt[9]{x^4}} &= 0^+, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[9]{x^4}} &= 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[9]{x^4}} &= +\infty \end{aligned}$$

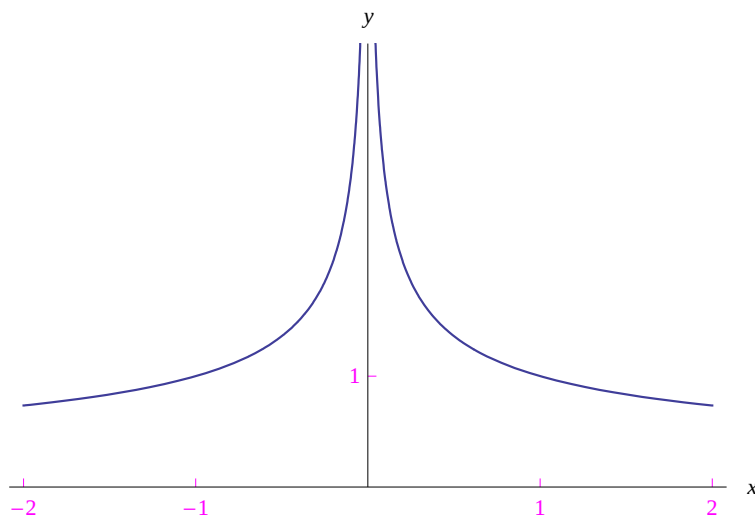


Figura 2.59: Grafico della funzione $\frac{1}{x^4}$.

Di seguito riportiamo i grafici che riassumono i vari casi.

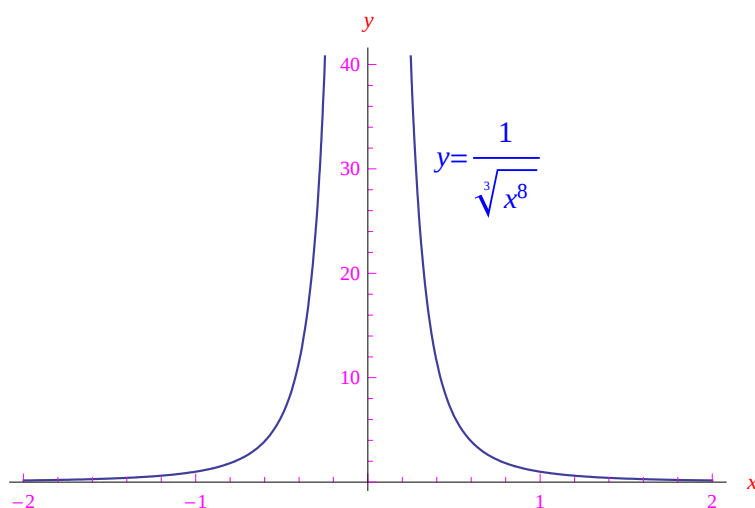


Figura 2.60: Nel diagramma cartesiano di $\frac{1}{x^{2m}}$ stiamo considerando $2m > 2n - 1$.

2.10.2 Polinomi

Consideriamo il polinomio di grado $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ sul campo reale:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0) \quad (2.88)$$

Tale funzione è definita in $(-\infty, +\infty)$, per cui calcoliamo i limiti per $x \rightarrow \pm\infty$. Agli estremi dell'insieme di definizione, il polinomio (2.88) si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$. Per rimuovere l'indeterminazione, applichiamo il seguente artificio:

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} \right)$$

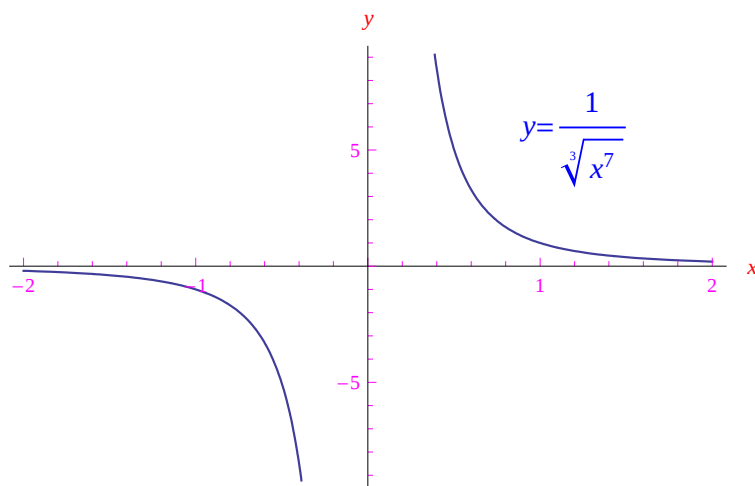
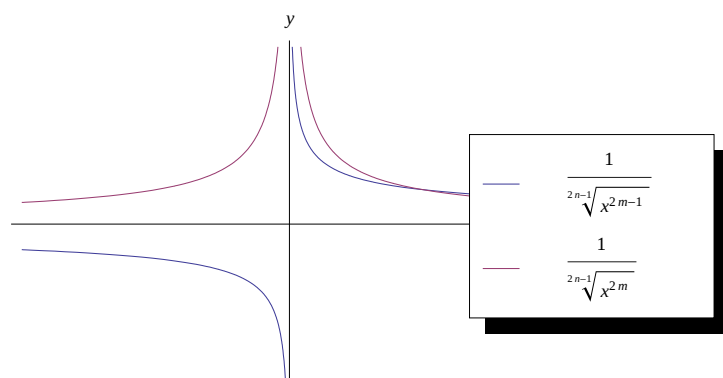


Figura 2.61: Nel diagramma cartesiano di $\frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^{2m}}}$ stiamo considerando $2m < 2n - 1$.



Quindi:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \right) \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} \right) \right] \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \right) \left[\underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}_{=1} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} \right)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}} \right)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} \right)}_{=0} \right]
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

Cioè:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_n \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = a_n \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

Procedendo allo stesso modo per $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a_n \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} a_n \cdot (+\infty), & \text{se } n \text{ è pari} \\ a_n \cdot (-\infty), & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Esempio 41 Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, dove $f(x) = -5x^4 + 3x^2 + \sqrt{2}x - 1$. Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -(+\infty) + 3(+\infty) + (+\infty) = \infty - \infty$$

Applicando l'artificio (2.89):

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-5x^4 \left(1 - \frac{3}{5x^2} - \frac{\sqrt{2}}{5x^3} + \frac{1}{x^4} \right) \right] \\
 &= -5 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = -5(+\infty) = -\infty
 \end{aligned}$$

Per $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -5 \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = -5(+\infty) = -\infty$$

Esempio 42 Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, dove $f(x) = 4x^5 - x^4 + 12x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Applicando l'artificio (2.89):

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4x^5 \left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2x^5} \right) \right] \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^5 \right) \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2x^5} \right) \right] \\
 &= (+\infty) \cdot (1 + 0) = +\infty
 \end{aligned}$$

Per $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^5) = -\infty$$

2.10.3 Funzione esponenziale

Scriviamo:

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, a \neq 1 \quad (2.90)$$

La funzione (2.90) è definita in $(-\infty, +\infty)$ e risulta $\forall x, f(x) > 0$, per cui il codominio di f è $(0, +\infty)$. Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} a > 0 &\implies a^x \text{ è strettamente crescente} \\ 0 < a < 1 &\implies a^x \text{ è strettamente decrescente} \end{aligned}$$

Il diagramma cartesiano della funzione esponenziale è riportato in fig. 2.62.

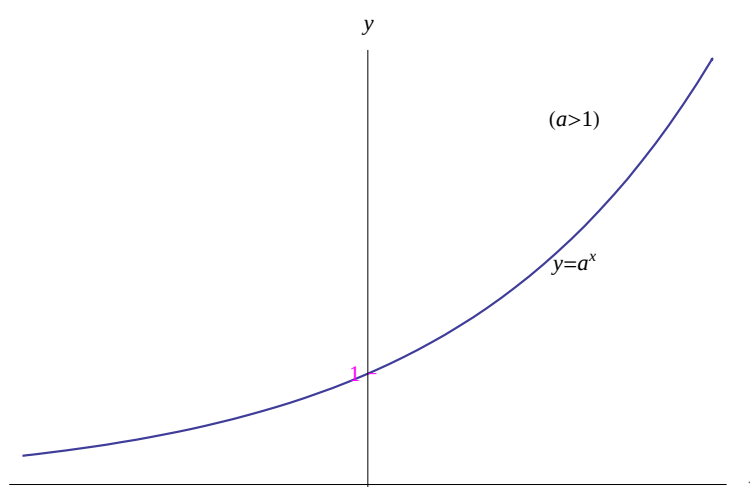


Figura 2.62: Diagramma cartesiano della funzione esponenziale.

Si deduce facilmente che:

$$\begin{aligned} a > 1 &\implies \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0^+ \end{cases} \\ 0 < a < 1 &\implies \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

Un caso speciale è $a = e$, essendo e la costante di Nepero.

2.10.4 Funzione logaritmo

Ricordiamo che tale funzione è l'inversa della funzione esponenziale a^x . Infatti, a^x è strettamente monòtona in $(-\infty, +\infty)$, onde è ivi invertibile. Per determinare l'inversa, utilizziamo il procedimento standard e cioè risolviamo la seguente equazione rispetto alla variabile x :

$$y = a^x \implies x = \lg_a y$$

Qui y appartiene al codominio della funzione esponenziale, cioè $y \in (0, +\infty)$. Ridifinendo la variabile y nella variabile indipendente x , otteniamo l'espressione analitica della funzione logaritmo di base a :

$$f(x) = \lg_a x, \quad (2.91)$$

definita in $X = (0, +\infty)$. Il codominio di (2.91) è manifestamente $f(X) = (-\infty, +\infty)$. Dalla monotonia della funzione a^x , deduciamo la monotonia di $\lg_a x$:

$$a > 0 \implies \lg_a x \text{ è strettamente crescente}$$

$$0 < a < 1 \implies \lg_a x \text{ è strettamente decrescente}$$

Il diagramma cartesiano della funzione logaritmo di base a è riportato nelle figg. 2.63-2.64.

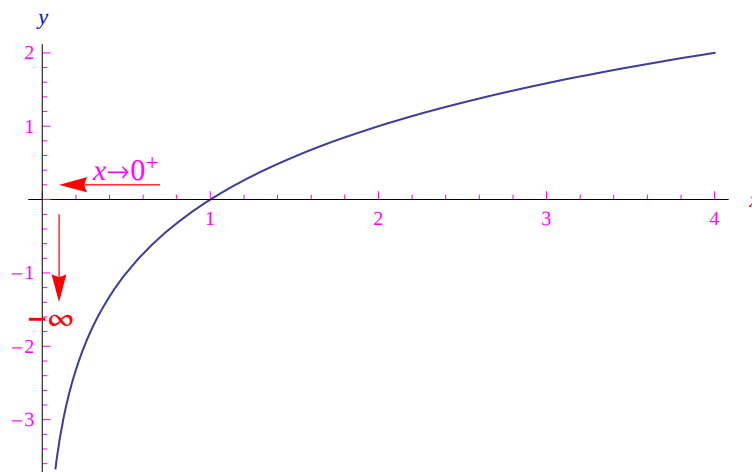


Figura 2.63: Diagramma cartesiano della funzione logaritmo di base $a > 1$.

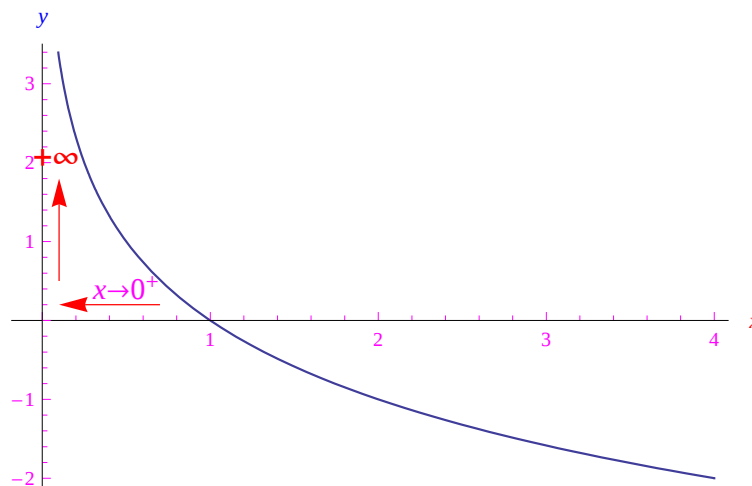


Figura 2.64: Diagramma cartesiano della funzione logaritmo di base $0 < a < 1$.

Si deduce facilmente che:

$$a > 1 \implies \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \lg_a x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg_a x = +\infty \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \implies \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \lg_a x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg_a x = -\infty \end{cases}$$

Un caso speciale è $a = e$, essendo e la costante di Nepero. In tal caso si ottiene il logaritmo neperiano $\ln x$.

Osservazione 23 Quando si esegue il calcolo di un limite di funzioni contenenti il logaritmo, si scrive rapidamente:

$$\ln 0^+ = -\infty, \ln(+\infty) = +\infty$$

Esempio 43 Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

dove $f(x) = \frac{a^{nx}}{b^{mx}}$ con $a, b > 0$ e $a \neq b$.

Prendiamo il logaritmo della funzione:

$$\ln f(x) = \ln \frac{a^{nx}}{b^{mx}} = x(n \ln a - m \ln b),$$

per cui:

$$f(x) = e^{x(n \ln a - m \ln b)}$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^\lambda,$$

dove

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(n \ln a - m \ln b) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a^n > b^m \\ -\infty, & \text{se } a^n < b^m \end{cases}$$

Ne consegue:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a^n > b^m \\ 0^+, & \text{se } a^n < b^m \end{cases}$$

2.10.5 Funzioni trigonometriche

Nella sezione 2.3 abbiamo visto (proposizione 21) che la funzione $\sin x$ è non regolare per $x \rightarrow \pm\infty$. In generale, tutte le funzioni periodiche il cui insieme di definizione ha $+\infty$ e $-\infty$ come punti di accumulazione, non sono regolari per $x \rightarrow \pm\infty$. Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 75 Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è **periodica** se esiste un numero reale $T > 0$ tale che:

- $x \in X \implies \forall k \in \mathbb{Z}, (x + kT) \in X$
- $\forall x \in X, f(x + kT) = f(x), \forall k \in \mathbb{Z}$

Il numero reale $T > 0$ è il **periodo fondamentale** (o semplicemente il **periodo**) della funzione.

Osservazione 24 Se $X = \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \tau_n = nT$, è un periodo. Infatti:

$$f(x + k\tau_n) = f(x + k'T) = f(x),$$

dove $\mathbb{Z} \ni k' = kn, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Osservazione 25 Una funzione costante è periodica e ogni $T \in (0, +\infty)$ è un periodo fondamentale. Infatti, posto $f(x) = c$, si ha:

$$\forall T \in (0, +\infty), \forall k \in \mathbb{Z}, f(x + kT) = c = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Se l'insieme di definizione X è illimitato superiormente e inferiormente, ci poniamo il problema di studiare la regolarità di f nei punti di accumulazione all'infinito $+\infty$ e $-\infty$. Ma in virtù della periodicità, per $x \rightarrow \pm\infty$, la funzione assume infinite volte tutti i valori $f(x) \in f(\mathbb{R})$. Nell'ipotesi in cui f non sia una funzione costante⁶, si ha:

$$\nexists l \in \mathbb{R} \mid \forall J_\varepsilon(l), \exists I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \implies f(x) \in J_\varepsilon(l) \\ \implies \nexists l \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

Alla stessa conclusione si perviene nel limite per $x \rightarrow -\infty$.

Osservazione 26 Per esprimere il comportamento non regolare delle funzioni periodiche, alcuni software di computer algebra utilizzano una notazione simbolica del tipo (nel caso della funzione $\sin x$):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x = [-1, 1],$$

per indicare appunto che per $x \rightarrow \pm\infty$, la funzione $\sin x$ assume infinite volte tutti i valori appartenenti al suo codominio, cioè l'intervallo compatto $[-1, 1]$. In fig. ?? è riportata la notazione utilizzata da Mathematica.

```
In[1]:= Limit[Sin[x], x -> ∞]
Out[1]:= Interval[{-1, 1}]
```

Figura 2.65: Nella cella di input chiediamo a Mathematica di calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$. La cella di output visualizza il risultato e cioè l'intervallo chiuso $[-1, 1]$.

Le funzioni $\tan x$ e $\cot x$ (periodo fondamentale $T = \pi$) hanno punti di accumulazione al finito non appartenenti all'insieme di definizione.

- $\tan x$ è definita in:

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

Il grafico è riportato in fig. 2.66.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad (2.92)$$

Tenendo conto della periodicità:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+} \tan x = -\infty \quad (2.93)$$

- $\cot x$ è definita in:

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$$

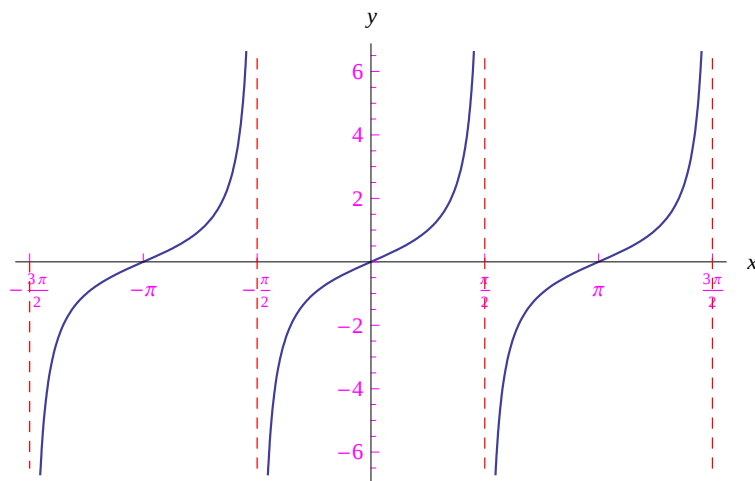


Figura 2.66: Diagramma cartesiano di $\tan x$ nell'intervallo $[-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

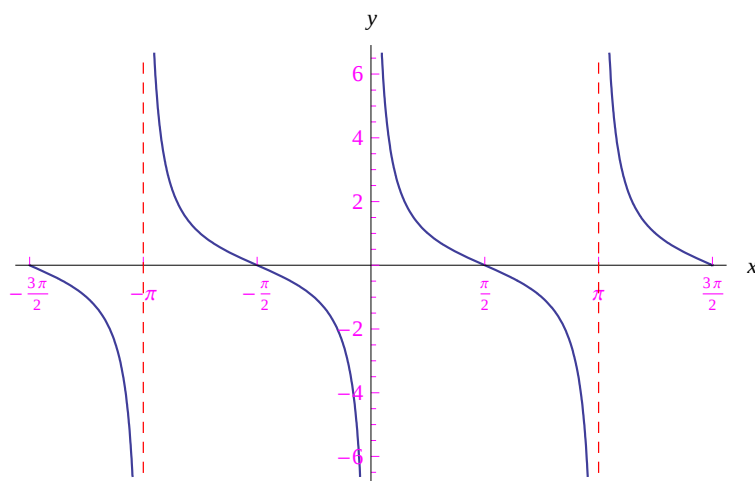


Figura 2.67: Diagramma cartesiano di $\cot x$ nell'intervallo $[-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

Il grafico è riportato in fig. 2.67.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x = -\infty \quad (2.94)$$

Tenendo conto della periodicità:

$$\lim_{x \rightarrow k\pi^+} \cot x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow k\pi^-} \cot x = -\infty \quad (2.95)$$

2.10.6 Funzioni trigonometriche inverse

Le funzioni trigonometriche inverse $\arcsin x$ e $\arccos x$ sono definite in $[-1, 1]$, pertanto non esistono punti di accumulazione non appartenenti all'insieme di definizione. I grafici di tali funzioni sono riportati nelle figg. 2.68-2.69.

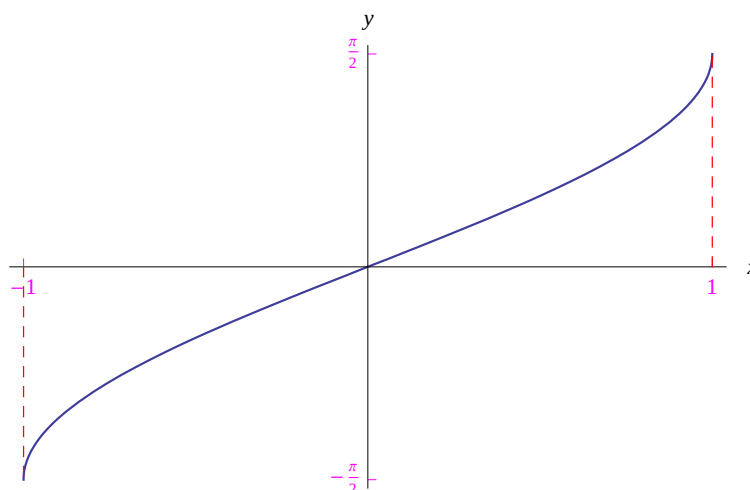


Figura 2.68: Diagramma cartesiano di $\arcsin x$.

Il grafico della funzione $\arctan x$ è riportato in fig. 2.70.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad (2.96)$$

Il grafico della funzione $\operatorname{arccot} x$ è riportato in fig. 2.71.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi^- \quad (2.97)$$

⁶In tal caso è $f(\mathbb{R}) = \{c\}$, onde la funzione assume infinite volte il valore c , ed è regolare per $x \rightarrow \pm\infty$, avendosi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$$

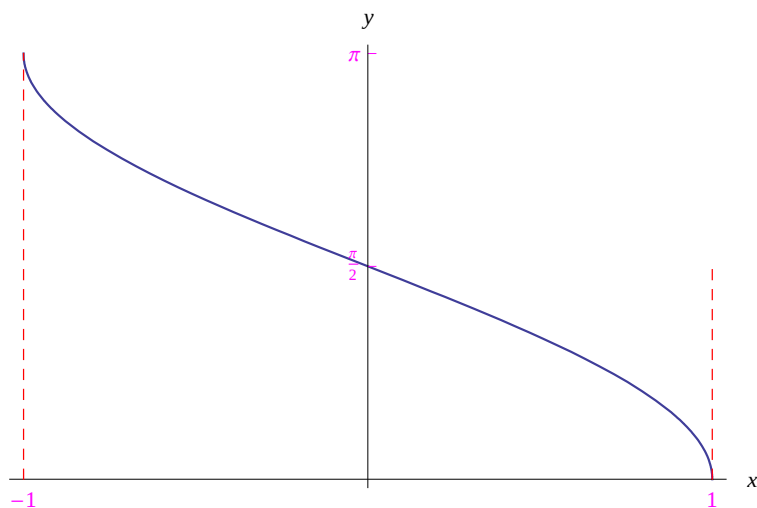


Figura 2.69: Diagramma cartesiano di $\arccos x$.

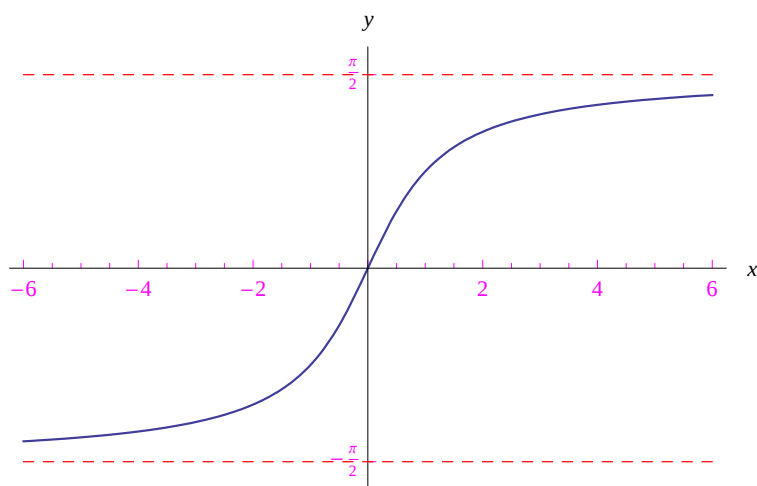


Figura 2.70: Diagramma cartesiano di $\arctan x$.

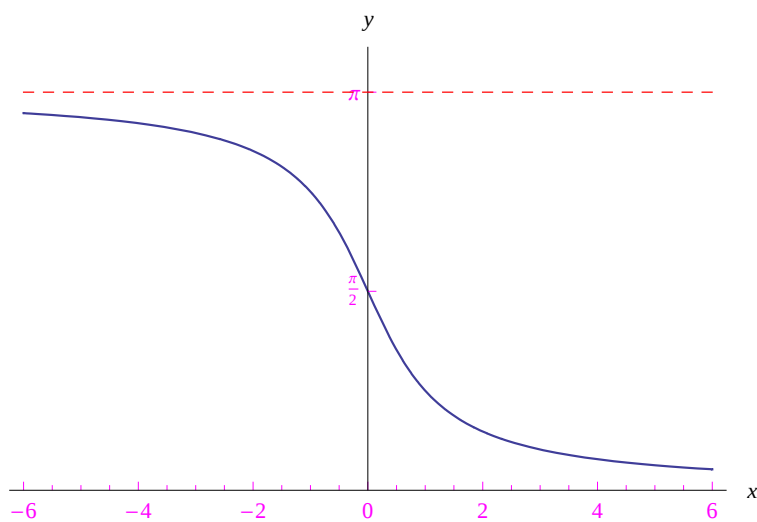


Figura 2.71: Diagramma cartesiano di $\operatorname{arccot} x$.

Esercizio 11 Classificare i punti di discontinuità della funzione:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Svolgimento

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, e il punto $x = 0$ è manifestamente di accumulazione per X . È istruttivo determinare dapprima il segno della funzione. Riesce:

$$f(x) > 0 \iff \frac{1}{x^2} > 0,$$

che è verificata $\forall x \in X$. Si noti che la funzione è priva di zeri al finito:

$$f(x) = 0 \iff \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{mai!}$$

Ne consegue che la funzione è positiva in X , per cui il suo grafico è contenuto nel semipiano $y > 0$. Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{0^+}\right) = \arctan(+\infty) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$

Cioè il punto $x = 0$ è una discontinuità eliminabile, per cui prolungando per continuità:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Il grafico è riportato in fig. 2.72.

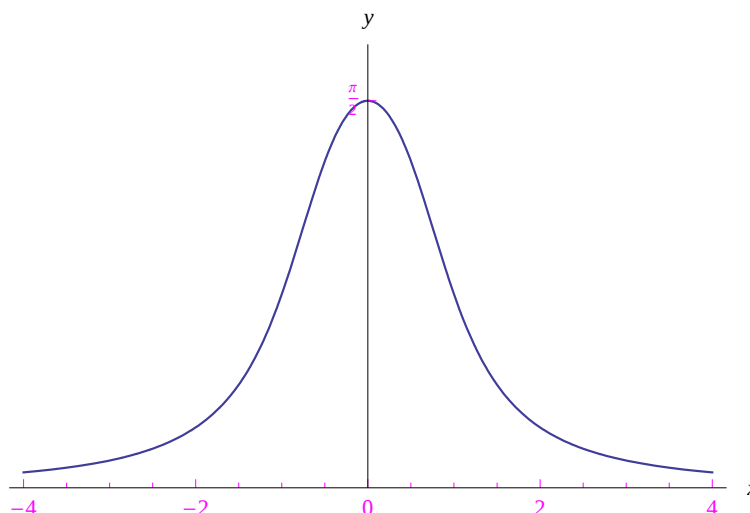


Figura 2.72: Diagramma cartesiano di $\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Esercizio 12 Classificare i punti di discontinuità della funzione

$$f(x) = \sin \ln x$$

Svolgimento

La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$. Per il calcolo del limite per $x \rightarrow 0^+$ eseguiamo il cambio di variabile $t = \ln x$, onde:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \sin t,$$

che non esiste. Più precisamente, in ogni intorno destro di $x = 0$ il diagramma di f è infinitamente oscillante. Quindi $x = 0$ è una singolarità per f . Il grafico è riportato in fig. 2.73.

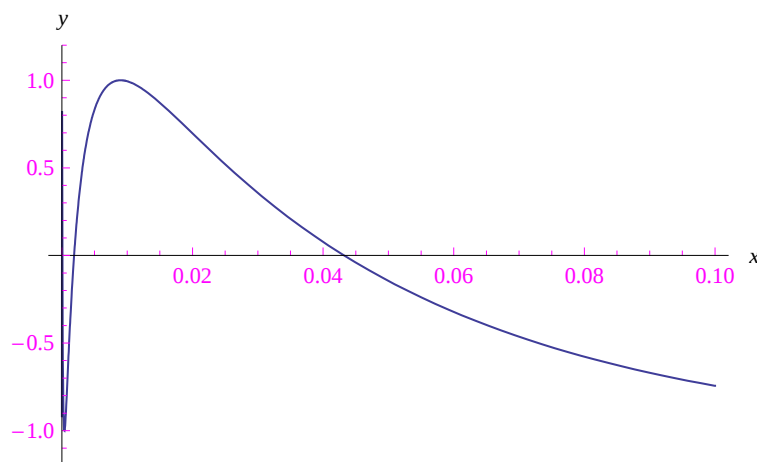


Figura 2.73: Diagramma cartesiano di $\sin \ln x$.

Il codice Mathematica per la generazione di grafici e relative animazioni .gif, può essere prelevato da questa [risorsa online](#).

2.10.7 Funzioni iperboliche e iperboliche inverse

Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned} \quad (2.98)$$

Le (2.98) sono definite in $(-\infty, +\infty)$. Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{-x}) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = -\infty \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che $\sinh x$ è una funzione dispari. Il grafico di $\sinh x$ è riportato in fig. 2.74. Passiamo a $\cosh x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che $\cosh x$ è una funzione pari. Il grafico di $\cosh x$ è riportato in fig. 2.75. Passiamo a $\tanh x$:

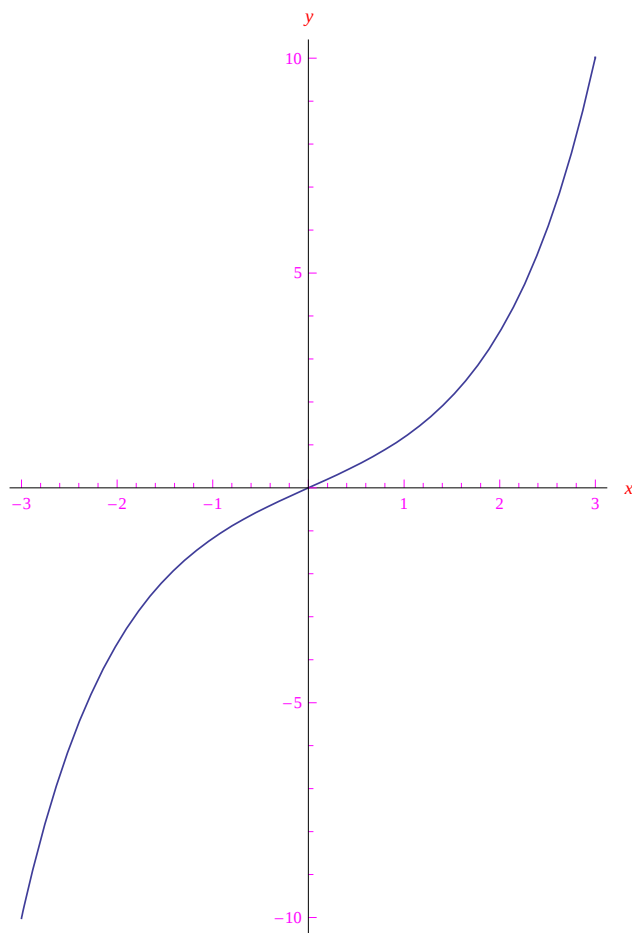


Figura 2.74: Diagramma cartesiano di $\sinh x$

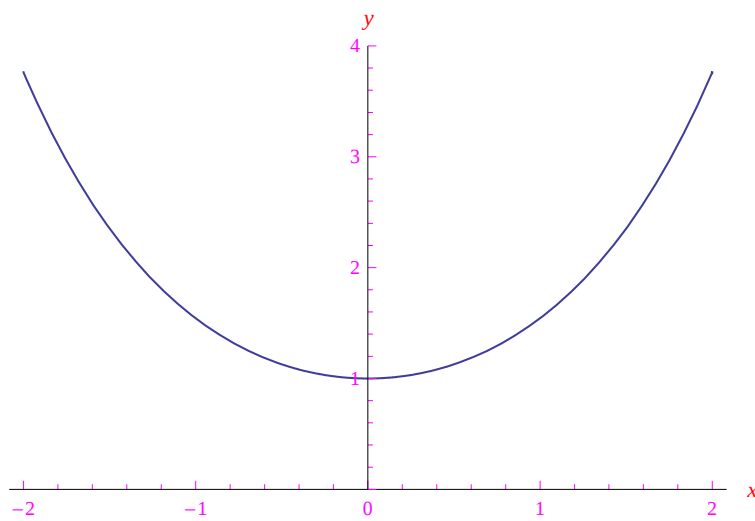


Figura 2.75: Diagramma cartesiano di $\cosh x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Per rimuovere l'indeterminazione, utilizziamo il seguente artificio: $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$, onde:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Per $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = -1$$

Tale passaggio si giustifica osservando che $\tanh x$ è una funzione dispari. Il grafico di $\tanh x$ è riportato in fig. 2.76.

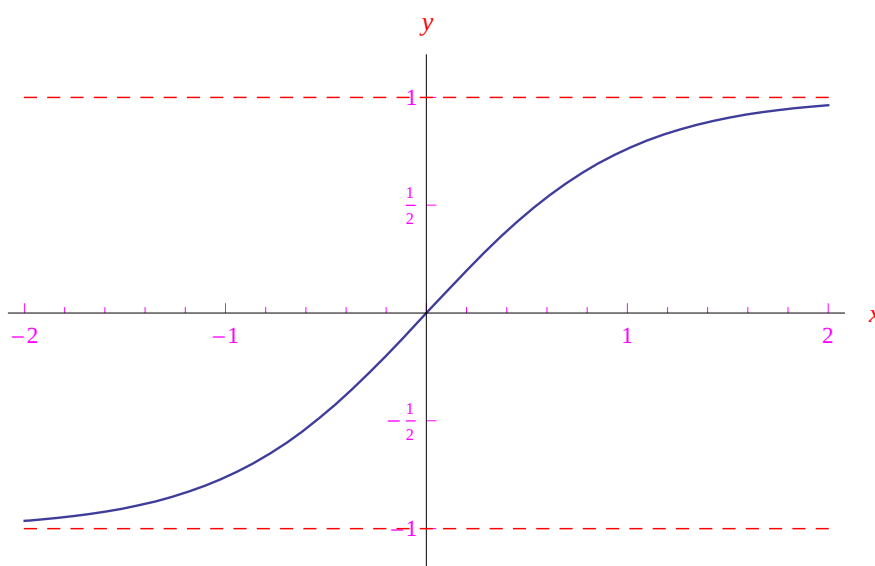


Figura 2.76: Diagramma cartesiano di $\tanh x$

Le espressioni analitiche delle funzioni iperboliche inverse sono^{7, 8}:

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \sinh x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad \operatorname{arc} \cosh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\ \operatorname{arc} \tanh x &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) \end{aligned}$$

$\operatorname{arcsinh} x$ è definita in $(-\infty, +\infty)$, $\operatorname{arccosh} x$ in $[1, +\infty)$ ⁹, $\operatorname{arctanh} x$ in $(-1, 1)$. Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc} \sinh x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arc} \sinh x &= -\infty \end{aligned}$$

Il grafico di $\operatorname{arcsinh} x$ è riportato in fig. 2.77. Passiamo a $\operatorname{arccosh} x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc} \cosh x = +\infty$$

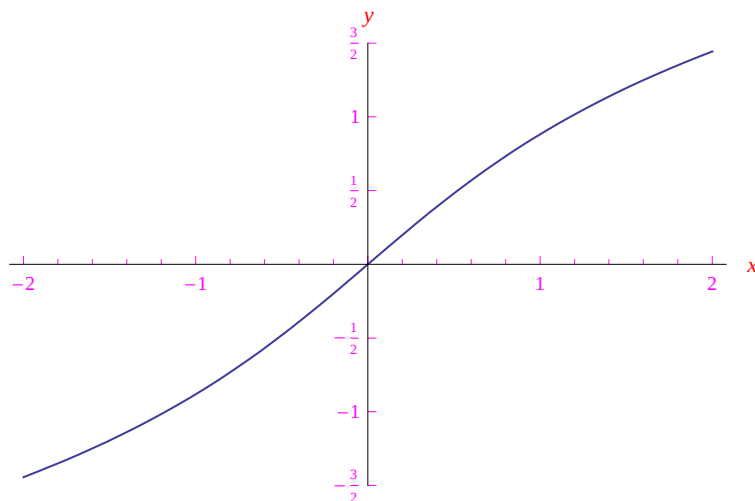


Figura 2.77: Diagramma cartesiano di $\operatorname{arcsinh} x$.

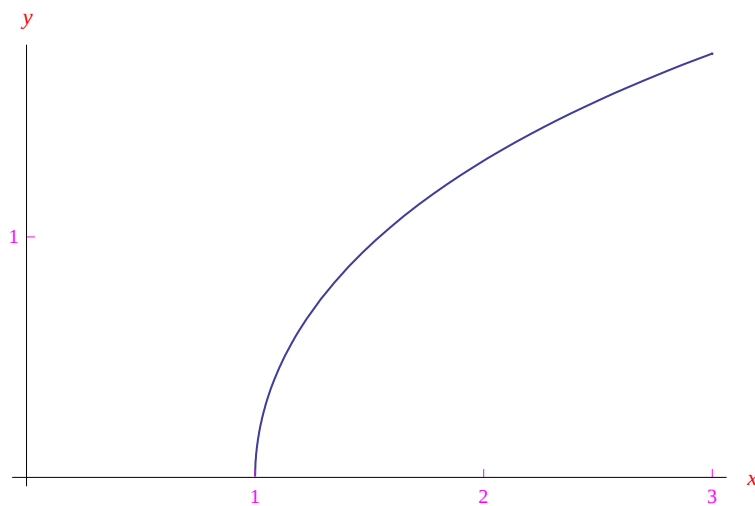


Figura 2.78: Diagramma cartesiano di $\operatorname{arccosh} x$

Il grafico di $\operatorname{arccosh} x$ è riportato in fig. 2.78. Passiamo a $\operatorname{arctanh} x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctanh} x &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{0^+} \right) = \frac{1}{2} \ln(+\infty) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \operatorname{arctanh} x &= - \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctanh} x = -\infty\end{aligned}$$

Il grafico di $\operatorname{arctanh} x$ è riportato in fig. 2.79.

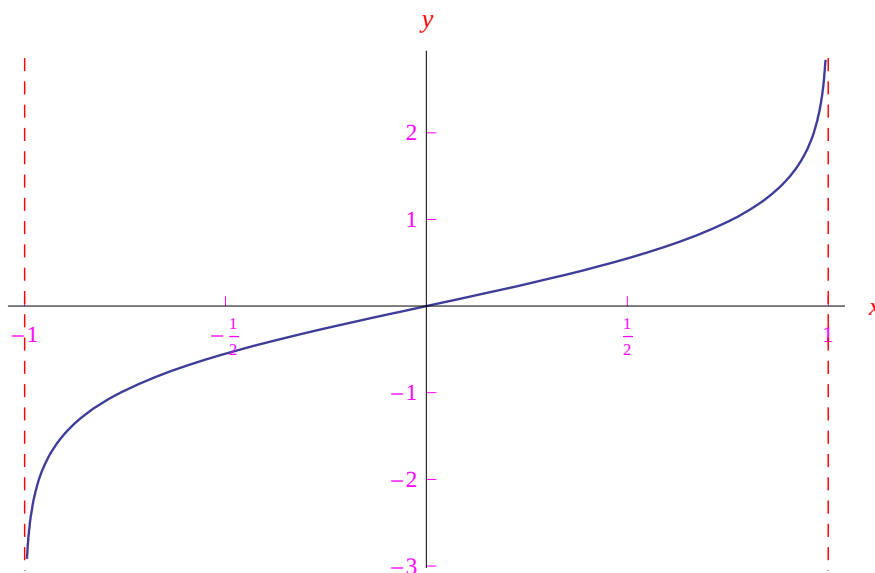


Figura 2.79: Diagramma cartesiano di $\operatorname{arctanh} x$

2.11 Le forme indeterminate 0^0 , 1^∞ , ∞^0

Consideriamo una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ la cui espressione analitica è:

$$f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)},$$

essendo φ e ψ funzioni reali.

Teorema 13 Se x_0 è punto di accumulazione per X e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lambda_1 > 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lambda_2, \quad (2.99)$$

allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x)} \quad (2.100)$$

⁷Al solito, per ottenere l'espressione della funzione inversa di una assegnata $f(x)$ invertibile, si risolve (rispetto a x) l'equazione $y = f(x)$.

⁸Alcuni autori denotano le funzioni iperboliche inverse con $\operatorname{settsinh} x, \operatorname{settcosh} x, \operatorname{setttanh} x$. Noi utilizzeremo entrambe le notazioni.

⁹Osserviamo che $\cosh x$ è invertibile solo localmente.

Dimostrazione. Scriviamo:

$$f(x) = e^{\ln f(x)} = e^{\ln \varphi(x)^{\psi(x)}} = e^{\psi(x) \ln \varphi(x)}, \quad \forall x \in X, \quad (2.101)$$

cosicchè:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\psi(x) \ln \varphi(x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow x_0} [\psi(x) \ln \varphi(x)]} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Per un noto teorema (limite del prodotto di funzioni):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [\psi(x) \ln \varphi(x)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \ln \varphi(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) \cdot \ln \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \\ &= \lambda_2 \ln \lambda_1, \end{aligned} \quad (2.103)$$

Cioè:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = e^{\lambda_2 \ln \lambda_1} = \lambda_1^{\lambda_2} \quad (2.104)$$

■

Osserviamo che $\varphi(x)^{\psi(x)}$ si presenta in una forma indeterminata quando il prodotto $\psi(x) \ln \varphi(x)$ si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Ciò accade in tre casi distinti:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0 \implies \varphi(x)^{\psi(x)}$ si presenta nella forma indeterminata 0^0
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1 \implies \varphi(x)^{\psi(x)}$ si presenta nella forma indeterminata 1^∞
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = +\infty \implies \varphi(x)^{\psi(x)}$ si presenta nella forma indeterminata ∞^0

Esempio 44 *Calcoliamo*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$$

Riesce:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}$$

Vedremo in seguito che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = e^0 = 1$$

Il grafico della funzione $x^{1/x}$ è riportato in fig. 2.80.

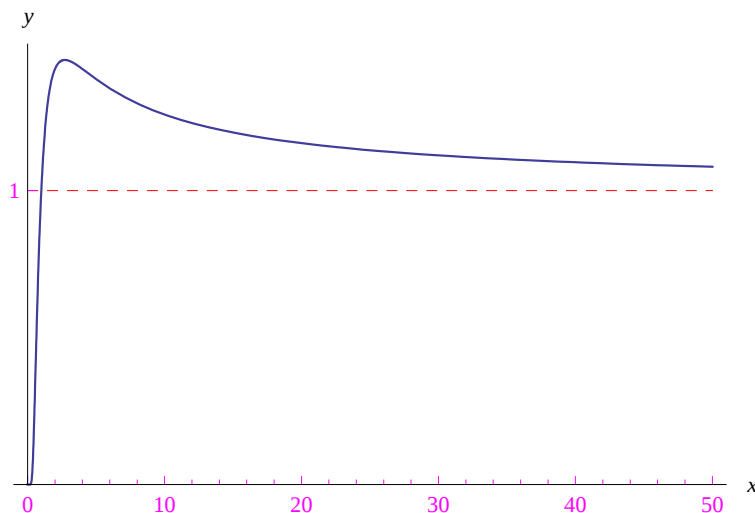


Figura 2.80: Diagramma cartesiano di $x^{1/x}$. La retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a destra.

2.12 Limiti di successioni

2.12.1 Successioni convergenti

Ricordiamo (§ 1.1.1) che una *successione di elementi di $\mathbb{R}$* (o semplicemente *successione*) è una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto y_n = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.105)$$

spesso simboleggiata da:

$$\{y_n\} : y_0, y_1, \dots, y_n, \dots \quad (2.106)$$

ove l'intero naturale n è l'*indice* del termine considerato. Nel caso delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ avevamo introdotto la seguente locuzione: *la funzione f verifica definitivamente la proprietà $\mathcal{P}$ intorno a x_0* , essendo x_0 un punto di accumulazione per l'insieme di definizione di f . È essenziale estendere tale locuzione alle successioni, tenendo conto che l'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$ è $+\infty$.

Definizione 76 La successione $\{y_n\}$ verifica **definitivamente** la proprietà $\mathcal{P}$, se esiste un indice ν tale che $\mathcal{P}$ è verificata da y_n per ogni $n > \nu$.

Ciò premesso, sussiste la seguente definizione:

Definizione 77 La successione $\{y_n\}$ è **convergente** se esiste un numero reale l tale che lo scarto $|y_n - l|$ è definitivamente minore di un qualunque numero reale positivo. Cioè

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies |y_n - l| < \varepsilon \quad (2.107)$$

Si scrive:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = l \quad (2.108)$$

Osservazione 27 Nella definizione di convergenza abbiamo utilizzato il pedice ε in ν_ε giacché tale intero dipende da ε . Quindi ci aspettiamo indici diversi per ε diversi.

Ad esempio proviamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + (-1)^n}{n + 1} = 1$$

A tale scopo poniamo

$$y_n = \frac{n + (-1)^n}{n + 1} \quad (2.109)$$

Cioè

$$y_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n+1} = 1, & n \text{ pari} \\ \frac{n-1}{n+1}, & n \text{ dispari} \end{cases} \quad (2.110)$$

Per n dispari:

$$y_n = \frac{n + 1 - 2}{n + 1} = 1 - \frac{2}{n + 1}$$

Congetturiamo $l = 1$

$$|y_n - 1| = \frac{2}{n + 1} < \varepsilon \implies n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

Quindi

$$\forall \varepsilon \in (0, 2), \exists \nu_\varepsilon = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right\rceil \mid n > \nu_\varepsilon \implies |y_n - 1| < \varepsilon$$

onde l'asserto. In fig. 2.81 riportiamo il grafico della successione, da cui vediamo che y_n tende a 1 per valori minori di 1. Inoltre, la successione non è crescente e la tendenza al limite avviene *oscillando*. Si noti, infine, che il limite 1 è l'unico punto di accumulazione per il codominio della successione.

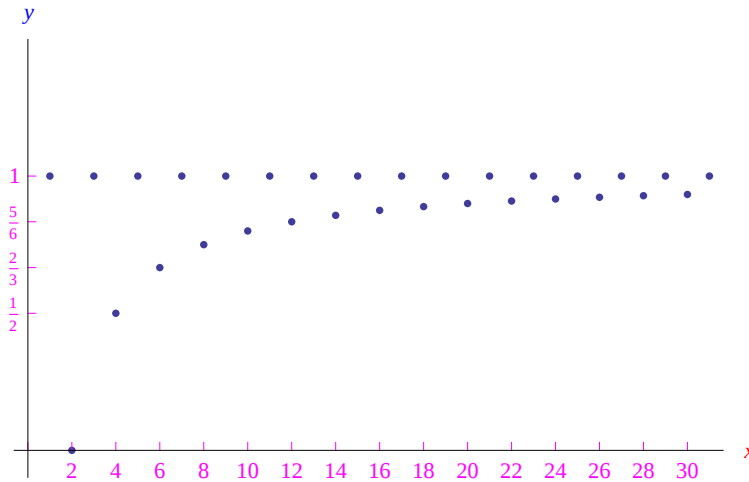


Figura 2.81: “Grafico” della successione (2.109).

2.12.2 Successioni divergenti

Definizione 78 La successione $\{y_n\}$ è **divergente positivamente** se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies y_n > \varepsilon \quad (2.111)$$

Si scrive:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty \quad (2.112)$$

Cioè se y_n è definitivamente maggiore di un numero reale positivo assegnato ad arbitrio.

Ad esempio:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 1}{n} = +\infty$$

Per verificare tale scrittura dobbiamo risolvere la seguente disequazione in n

$$\frac{n^2 - 1}{n} > \varepsilon \xRightarrow{n > 0} n^2 - \varepsilon n - 1 > 0$$

per un assegnato $\varepsilon > 0$ preso ad arbitrio. Determiniamo le radici dell'equazione di secondo grado

$$n^2 - \varepsilon n - 1 = 0$$

Cioè

$$n_{\pm} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}$$

Ne segue che la disequazione è verificata per

$$n < n_- \quad \text{e} \quad n > n_+$$

Dal momento che n è un intero positivo, deve essere

$$n > n_+ = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}$$

In definitiva, denotando con $[x]$ il più grande intero $\geq x$, si ha:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_{\varepsilon} = \left\lceil \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} \right\rceil \quad | \quad n > \nu_{\varepsilon} \implies \frac{n^2 - 1}{n} > \varepsilon$$

da cui il risultato.

Definizione 79 La successione $\{y_n\}$ è **divergente negativamente** se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_{\varepsilon} \in \mathbb{N} \quad | \quad n > \nu_{\varepsilon} \implies y_n < -\varepsilon \quad (2.113)$$

Si scrive:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = -\infty \quad (2.114)$$

Cioè se y_n è definitivamente minore di un numero reale negativo assegnato ad arbitrio.

Ad esempio:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - n^2}{n} = -\infty$$

Per verificare tale scrittura dobbiamo risolvere la seguente disequazione in n

$$\frac{1 - n^2}{n} < -\varepsilon \xRightarrow{n > 0} n^2 - \varepsilon n - 1 > 0$$

che è identica a quella ricavata nell'esempio precedente. Quindi

$$n > \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}$$

Segue

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_{\varepsilon} = \left\lceil \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} \right\rceil \quad | \quad n > \nu_{\varepsilon} \implies \frac{1 - n^2}{n} < -\varepsilon$$

da cui il risultato.

2.12.3 Successioni indeterminate (o non regolari)

Definizione 80 Una successione $\{y_n\}$ è **non regolare** o **indeterminata** se non è né convergente né divergente:

$$\nexists l \in [-\infty, +\infty] \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = l$$

Consideriamo ad esempio, $\{(-1)^n\}$ che non può essere divergente, in quanto limitata tra -1 e $+1$. Mostriamo ora che non è convergente. Procedendo per assurdo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = l \in \mathbb{R}$$

Per definizione di convergenza:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies |(-1)^n - l| < \varepsilon \quad (2.115)$$

Precisamente

$$\begin{aligned} n \text{ pari} \mid n > \nu_\varepsilon &\implies |1 - l| < \varepsilon \\ n \text{ dispari} \mid n > \nu_\varepsilon &\implies \underbrace{|-1 - l|}_{=|1+l|} < \varepsilon \end{aligned}$$

Segue (per una nota proprietà del valore assoluto):

$$|1 - l + l + 1| \leq \underbrace{|1 - l|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|1 + l|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon \implies \varepsilon > 1$$

Quindi

$$\forall \varepsilon \in (0, 1), \nexists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies |(-1)^n - l| < \varepsilon$$

2.13 Limiti fondamentali

Il calcolo del limite di una funzione che si presenta in forma indeterminata, è spesso riconducibile ai cosiddetti *limiti fondamentali*.

Proposizione 37

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (2.116)$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, e per $x \rightarrow 0$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere l'indeterminazione iniziamo con il dimostrare che

$$|\sin x| < |x|, \forall x \in X \quad (2.117)$$

La (2.117) è banale per $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, poichè:

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$$

Quindi occorre dimostrarla per $|x| < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. La funzione $\sin x$ è dispari, per cui possiamo limitarci a $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Nel piano cartesiano fissiamo un riferimento ortogonale $\mathcal{R}(\Omega\xi\eta)$ e quindi la circonferenza trigonometrica $C: \xi^2 + \eta^2 = 1$, come illustrato in fig. 2.82. Il punto $A(1, 0)$ è l'origine dell'arco la cui misura in radianti è x . Quindi:

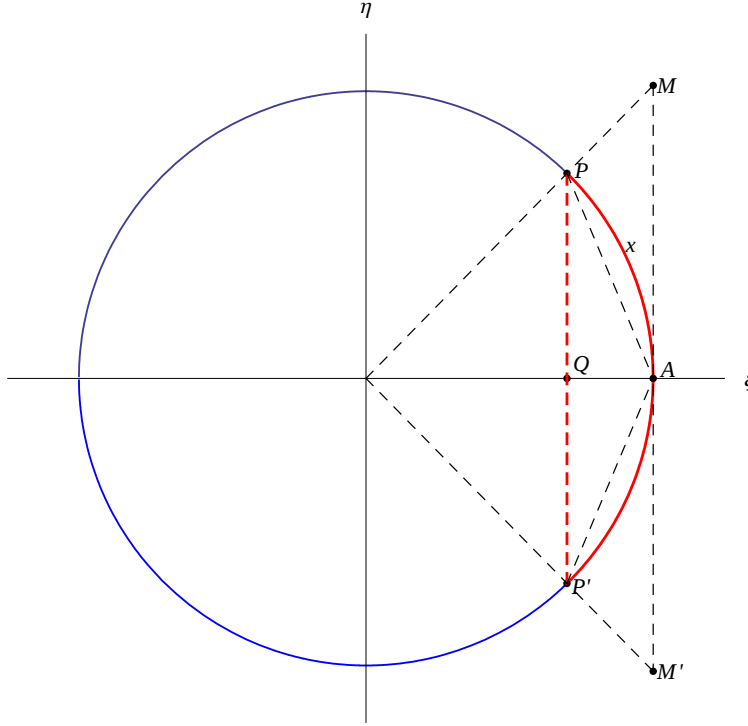


Figura 2.82: Circonferenza trigonometrica.

$$\sin x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}=1}$$

Sia P' il simmetrico del punto P rispetto all'asse ξ . Se S è il quadrilatero $\Omega PAP'$ e S' il settore circolare $\Omega PAP'$, si ha:

$$S \subset S' \implies \text{area}(S) < \text{area}(S') \quad (2.118)$$

L'area di S è $\frac{1}{2} \cdot \overline{\Omega A} \cdot \overline{PP'} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \underbrace{\overline{PP'}}_{=2 \sin x} = \sin x$. L'area del settore circolare è $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \overline{\Omega A}^2 = x$, onde per la (2.118):

$$\sin x < x$$

Inoltre:

$$\tan x = \frac{\overline{AM}}{\overline{\Omega A}} = \overline{AM},$$

per cui detto S'' il triangolo $\Omega MM'$, si ha:

$$S \subset S' \subset S'' \implies \text{area}(S) < \text{area}(S') < \text{area}(S'') \quad (2.119)$$

Ma $\text{area} S'' = \tan x$, onde:

$$\sin x < x < \tan x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Dividendo per $\sin x$ e tenendo conto che $\sin x > 0$ in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \implies 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Da quanto detto in precedenza, in forza della parità (-1) della funzione $\sin x$, tale doppia disuguaglianza è valida anche per $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, quindi:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

onde per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

■

Osservazione 28 La disequazione $|\sin x| < |x|$ può essere risolta per via grafica, tracciando i grafici di $|\sin x|$ e $|x|$, come illustrato in fig. 2.83

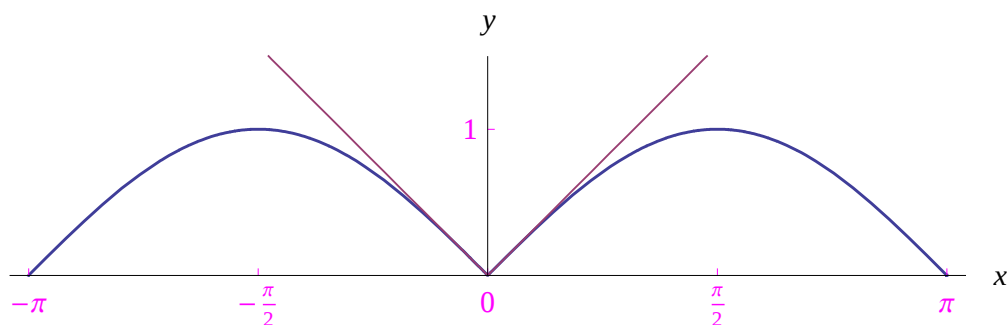


Figura 2.83: Risulta $|\sin x| < |x|, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Osservazione 29 Nel corso della dimostrazione abbiamo visto che $\sin x < x$. Ciò implica:

$$2 \sin x < 2x \iff \overline{P'P} < \widehat{P'P},$$

che esprime la nota proprietà secondo cui l'arco sotteso da una corda ha una lunghezza maggiore della corda medesima. Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{2x} = 1 \implies \lim_{\widehat{P'P} \rightarrow 0} \frac{\overline{P'P}}{\widehat{P'P}} = 1 \quad (2.120)$$

Come vedremo più avanti (Infinitesimi ed infiniti), la (2.120) esprime la seguente proprietà: per $\widehat{P'P} \rightarrow 0$, l'arco di circonferenza $\widehat{P'P}$ e la corda $\overline{P'P}$ tendono a 0 con la stessa rapidità.

Il codice *Mathematica* per la generazione di grafici e animazioni .gif è prelevabile da questa [risorsa online](#).

Proposizione 38

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \quad (2.121)$$

Dimostrazione. Il rapporto $\frac{1-\cos x}{x}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Dalle formule di duplicazione (Appendice A.6.2)

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 \frac{x}{2} \right)$$

Il primo limite si calcola ponendo $t = \frac{x}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Il secondo è immediato e vale 0, da cui l'asserto. In fig. 2.84 ■

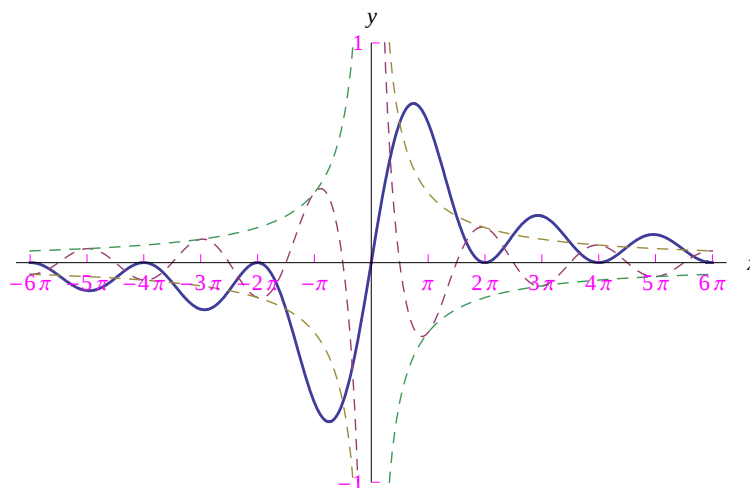


Figura 2.84: Grafico di $\frac{1-\cos x}{x}$. Le curve in tratteggio sono i grafici delle funzioni $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$.

Osservazione 30 Il risultato precedente ha una semplice interpretazione geometrica. Riferiamoci alla fig. 2.82. Risulta: $\overline{QA} = 1 - \cos x$, per cui il numeratore del rapporto (2.121) è la lunghezza della freccia dell'arco $\widehat{P'P}$. Quindi:

$$\lim_{\widehat{P'P} \rightarrow 0} \frac{\overline{QA}}{\widehat{P'P}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Cioè, al tendere a 0 dell'arco $\widehat{P'P}$, la freccia di tale arco tende a 0 più velocemente dell'arco medesimo.

Il codice *Mathematica* per la generazione di grafici e animazioni .gif è prelevabile da questa [risorsa online](#).

Proposizione 39

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (2.122)$$

Dimostrazione. Omessa. ■

Proposizione 40

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (2.123)$$

Dimostrazione. Basta eseguire nella (2.122) la sostituzione $t = \frac{1}{x}$. ■

Proposizione 41

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a e = \frac{1}{\ln a} \quad (2.124)$$

Dimostrazione. Riesce:

$$\frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg_a(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \lg_a(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lg_a \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lg_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \end{aligned}$$

■

In particolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (2.125)$$

Proposizione 42

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (2.126)$$

Dimostrazione. Eseguiamo il cambio di variabile $t = a^x - 1$, da cui $x = \lg_a(t+1)$. Quindi, tenendo conto della (2.124):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\lg_a(t+1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\lg_a(t+1)}{t}} \\ &= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lg_a(t+1)}{t}} = \ln a \end{aligned}$$

■

Osservazione 31 *In particolare:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (2.127)$$

Proposizione 43

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Dimostrazione. Poniamo per definizione:

$$f_{\alpha}(x) = \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x}$$

Distinguiamo i due casi:

1. $\alpha = 0$

2. $\alpha \neq 0$

Nel primo caso

$$f_{\alpha=0}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\},$$

cosicchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_{\alpha=0}(x) = 0$$

Nel secondo caso scriviamo

$$f_{\alpha}(x) = \frac{g_{\alpha}(x)}{x},$$

dove:

$$g_{\alpha}(x) = (1+x)^{\alpha} - 1,$$

per cui:

$$\ln[1 + g_{\alpha}(x)] = \ln(1+x)^{\alpha} = \alpha \ln(1+x),$$

e:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_{\alpha}(x) = 0 \tag{2.128}$$

Inoltre:

$$\frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x)}{\ln[1 + g_{\alpha}(x)]} \cdot \alpha \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Ne segue:

$$\lambda = \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\ln[1 + g_{\alpha}(x)]} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Eseguendo nel primo limite a secondo membro il cambio di variabile $y = g_{\alpha}(x)$ e tenendo conto della (2.128):

$$\lambda = \alpha \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}_{=1} = \alpha$$

■

Riassumendo:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
$\lim_{ x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha$	

Di seguito altri limiti notevoli che derivano da quelli fondamentali.

Proposizione 44

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

Dimostrazione. Eseguiamo il cambio di variabile $t = \arcsin x$, per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

■

Proposizione 45

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1 \quad (2.129)$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\sinh x}{x} &= \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - e^{-x}}{x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{x} + e^{-x} \frac{e^x - 1}{x} \right), \end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}}_{=1} + \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x}}_{=1} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

Proposizione 46

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsinh} x}{x} = 1 \quad (2.130)$$

Dimostrazione. Eseguiamo il cambio di variabile $t = \operatorname{arcsinh} x$, per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsinh} x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sinh t} = 1$$

■

Proposizione 47

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad (2.131)$$

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) = 1$$

■

Proposizione 48

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \quad (2.132)$$

Dimostrazione. Eseguiamo il cambio di variabile $t = \arctan x$, per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = 1$$

■

Proposizione 49

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} = 1 \quad (2.133)$$

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cosh x} \right) = 1$$

■

Proposizione 50

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (2.134)$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot 4} = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

In fig. 2.84 riportiamo il grafico di $\frac{1 - \cos x}{x^2}$. ■

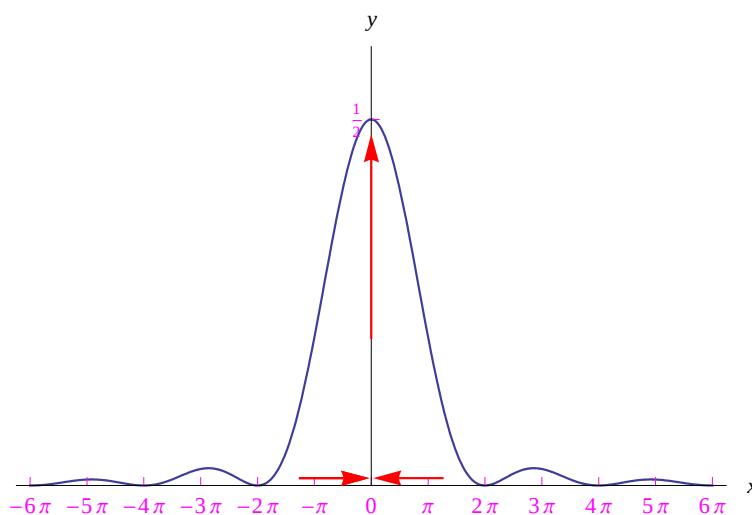


Figura 2.85: Grafico di $\frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Proposizione 51

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x} \right)^x = e^\alpha \quad (2.135)$$

Dimostrazione.

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right]^\alpha$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = \frac{x}{\alpha}$:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right]^\alpha = \left[\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^\alpha = e^\alpha$$

■

Proposizione 52

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha \quad (2.136)$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^\alpha$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = \alpha x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^\alpha = \left[\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}}\right]^\alpha = e^\alpha$$

■

Esercizio 13 Determinare i valori del parametro reale positivo α in corrispondenza dei quali, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\alpha-8}{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \\ |x-1|^{\alpha-7}, & \text{se } x < 1 \end{cases}, \quad (2.137)$$

ha in $x = 1$ una discontinuità eliminabile.

Soluzione

Caso 1: $0 \leq \alpha < 7$, cosicch 

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|\alpha-8|}{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \\ |x-1|^{-|\alpha-7|}, & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad (2.138)$$

Dal momento che

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} |x-1| = 0^+,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{|x-1|^{|\alpha-7|}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (2.139)$$

Il limite destro

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\frac{|\alpha-8|}{x-1}} = e^{-\frac{|\alpha-8|}{0^+}} = e^{-\infty} = 0^+, \quad (2.140)$$

da cui vediamo che per $0 \leq \alpha < 7$ il punto di accumulazione $x = 1$   di discontinuit  di seconda specie. In fig. 2.86 riportiamo l'andamento del grafico della funzione per $\alpha = 6.9$.

Caso 2: $\alpha = 7$

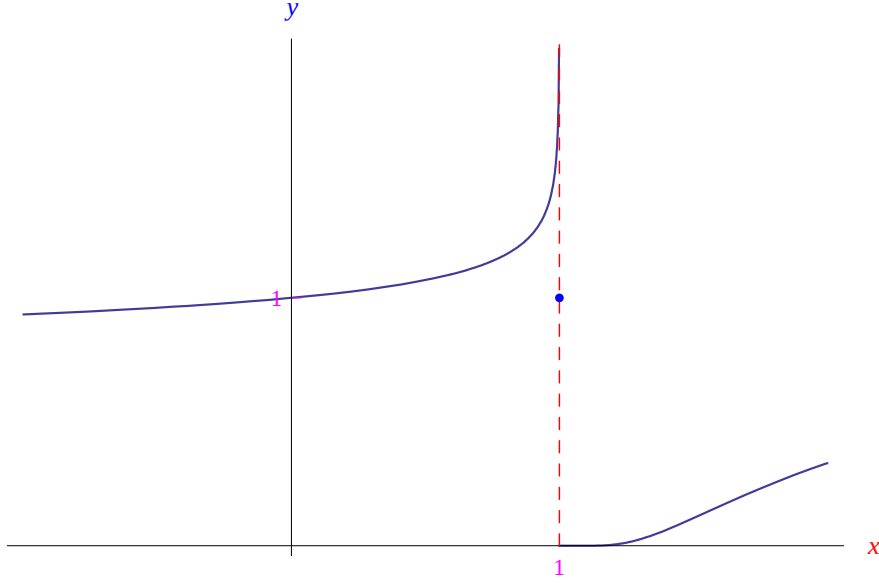


Figura 2.86: Grafico della funzione (2.137) per $\alpha = 6.9$. Il punto $x = 1$ è di discontinuità di seconda specie.

Qui è

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}, \quad (2.141)$$

onde

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\frac{1}{x-1}} = e^{-\frac{1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 1 \end{aligned} \quad (2.142)$$

Ne concludiamo che per $\alpha = 7$ il punto $x = 1$ è di discontinuità di prima specie, come illustrato in fig. 2.87.

Caso 3: $7 < \alpha < 8$

Abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|\alpha-8|}{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \\ |x-1|^{|\alpha-7|}, & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad (2.143)$$

Calcoliamo i limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} |x-1|^{|\alpha-7|} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\frac{|\alpha-8|}{x-1}} = e^{-\frac{|\alpha-8|}{0^+}} = e^{-\infty} = 0^+ \end{aligned} \quad (2.144)$$

Cioè

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, \quad (2.145)$$

per cui $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile. Precisamente, modificando la funzione come segue:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|\alpha-8|}{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \\ |x-1|^{|\alpha-7|}, & \text{se } x < 1 \end{cases}, \quad (2.146)$$

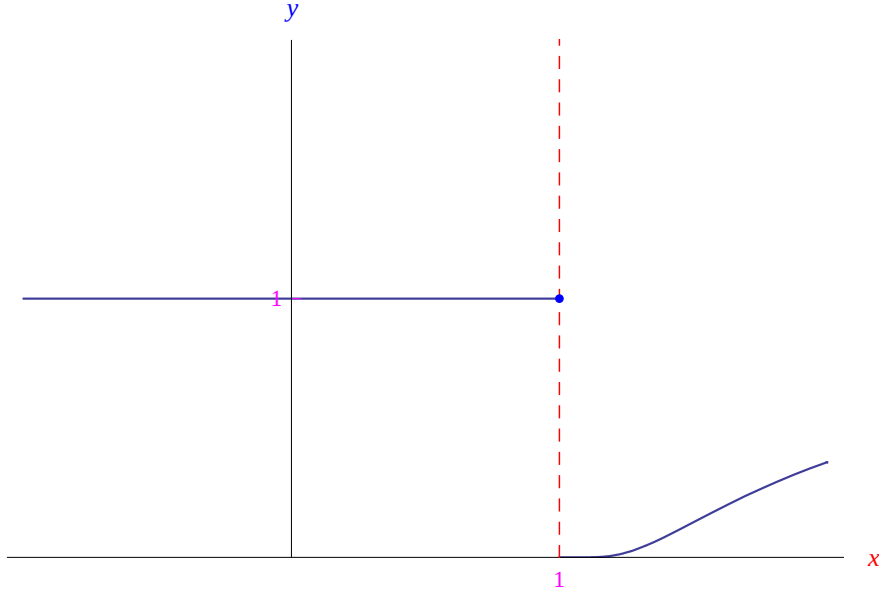


Figura 2.87: Grafico della funzione (2.137) per $\alpha = 7$. Il punto $x = 1$ è di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è $s(1) = -1$.

il cui grafico è riportato in fig. 2.88.

Caso 4: $\alpha = 8$

Risulta:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1 \\ |x - 1|, & \text{se } x < 1 \end{cases}, \quad (2.147)$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0^+$$

Ciò implica che $x = 1$ è un punto di discontinuità di prima specie, come illustrato in fig. 2.89.

Caso 5: $\alpha > 8$

In quest'ultimo caso abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{|\alpha-8|}{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \\ |x - 1|^{|\alpha-7|}, & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad (2.148)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{|\alpha-8|}{x-1}} = e^{+\infty} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} |x - 1|^{|\alpha-7|} = 0^+, \end{aligned} \quad (2.149)$$

cosicché $x = 1$ è un punto di discontinuità di seconda specie, come illustrato in fig. 2.90.

Esercizio 14 Calcolare

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x \right) \quad (2.150)$$

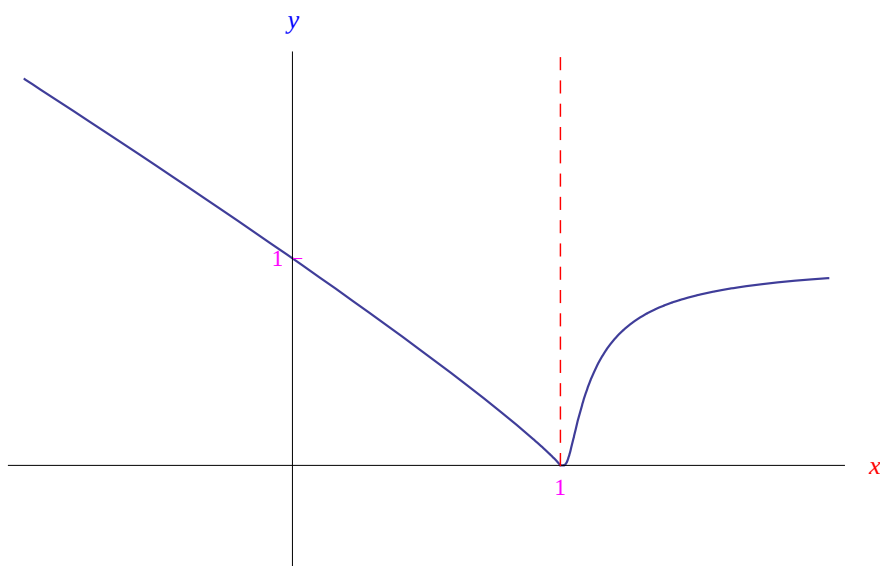


Figura 2.88: Grafico della funzione (2.137) per $\alpha = 7.9$. Il punto $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile, giacché la funzione è ivi infinitesima.

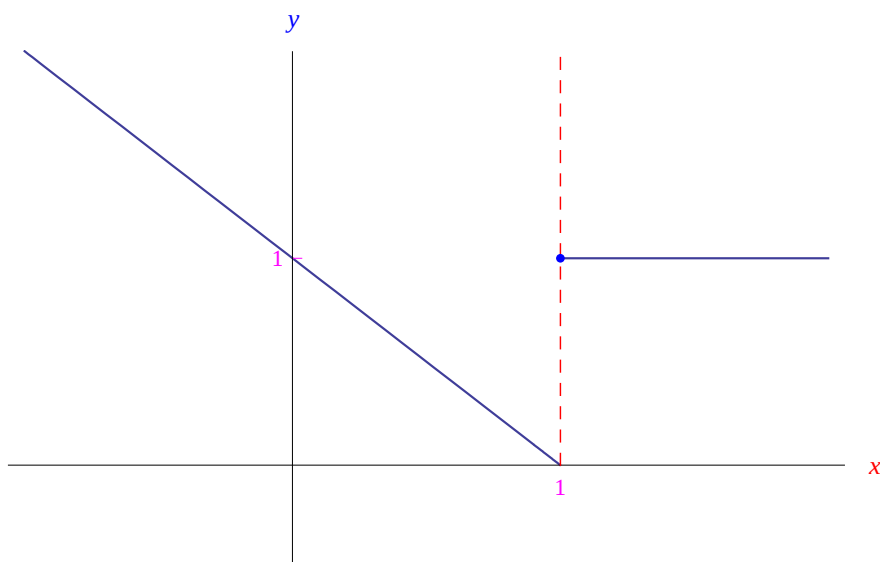


Figura 2.89: Grafico della funzione (2.137) per $\alpha = 8$. Il punto $x = 1$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è $s(1) = +1$.

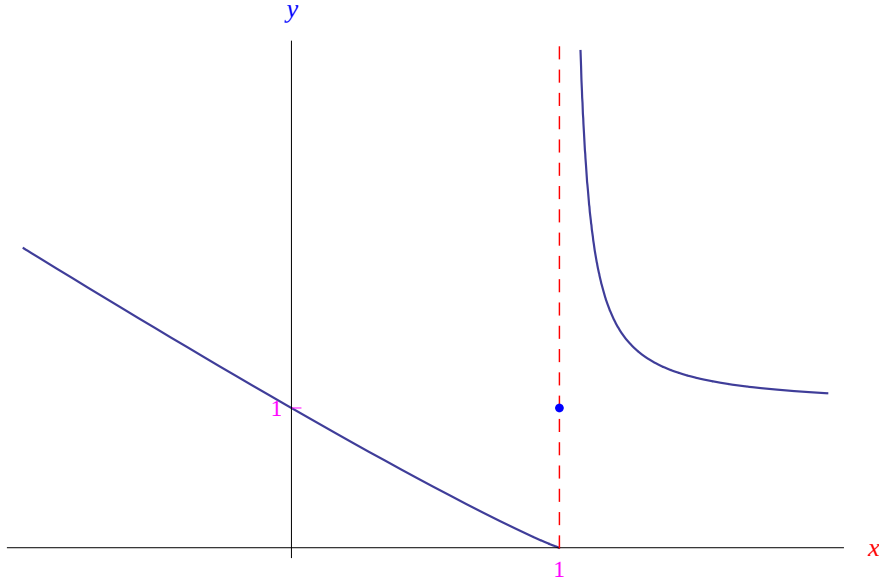


Figura 2.90: Grafico della funzione (2.137) per $\alpha = 8.1$. Il punto $x = 1$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

Soluzione

Riesce

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x \right) = \infty - \infty, \quad (2.151)$$

cosicché determiniamo il fattore razionalizzante:

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{k=1}^3 \sqrt[3]{(x^3 - x^2)^{3-k} (x^3)^{k-1}} \\ &= \sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + \sqrt[3]{(x^3 - x^2)x^3} + \sqrt[3]{x^6} \\ &= \sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2 \end{aligned} \quad (2.152)$$

Segue

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x) \left(\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2 \right)}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} + x^2 \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + x^2} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + 1} = -\frac{1}{3} \end{aligned} \quad (2.153)$$

Conclusione:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x \right) = -\frac{1}{3}$$

Cioè la funzione è convergente per $x \rightarrow +\infty$, e il limite vale $-1/3$. Geometricamente, significa che la retta orizzontale $3y + 1 = 0$ è asintoto orizzontale a destra per il diagramma della funzione.

Esercizio 15 *Determinare il comportamento della funzione*

$$f(x) = x + \arctan \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}}{x - 1}, \quad (2.154)$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione

Determiniamo innanzitutto il campo di esistenza di f . A tale scopo riduciamo in fattori il numeratore del radicando:

$$x^3 - 2x^2 + 1 = (x - 1)(x^2 - x - 1), \quad (2.155)$$

per cui

$$f(x) = x + \arctan \sqrt{\frac{x^2 - x - 1}{x - 1}} \quad (2.156)$$

Deve essere

$$\frac{x^2 - x - 1}{x - 1} \geq 0 \quad (2.157)$$

Per il numeratore

$$x^2 - x - 1 \geq 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \quad (2.158)$$

Per il denominatore

$$x - 1 > 0 \iff x \in (1, +\infty) \quad (2.159)$$

La risoluzione della disequazione (2.157) è ottenuta per via grafica come illustrato in fig. 2.91, onde il campo di esistenza è

$$X = \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup [1, +\infty) \quad (2.160)$$

Segue che in $x = 1$ la funzione non è definita. Quindi calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + \arctan(+\infty) = 1 + \frac{\pi}{2}$$

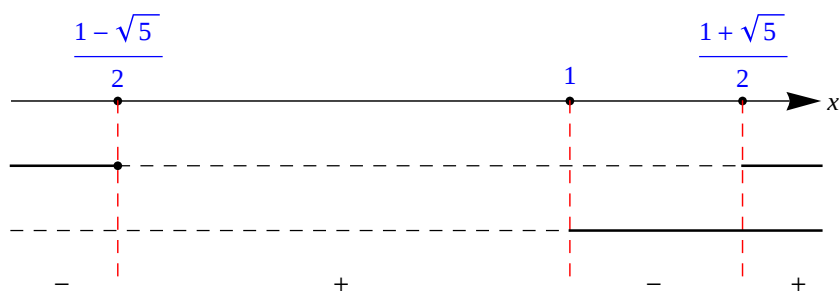
Ne segue che $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile. Precisamente, se modifichiamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x + \arctan \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}}{x - 1}, & \text{se } x \in X \\ 1 + \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 1 \end{cases}, \quad (2.161)$$

si ha che f è continua in $x = 1$. Per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty) + \arctan(+\infty) = (+\infty) + \frac{\pi}{2} = +\infty,$$

ossia la funzione è divergente positivamente per $x \rightarrow +\infty$.


 Figura 2.91: Studio del segno del rapporto $\frac{x^2-x-1}{x-1}$.

Esercizio 16 *Determinare il comportamento della funzione*

$$f(x) = x + \arctan \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1}, \quad (2.162)$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione

Determiniamo innanzitutto il campo di esistenza di f . Risulta

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2,$$

onde

$$\frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1} = \frac{\sqrt{x(x - 1)^2}}{x - 1} = \frac{|x - 1|}{x - 1} \sqrt{x},$$

cosicché

$$f(x) = x + \arctan \left(\frac{|x - 1|}{x - 1} \sqrt{x} \right)$$

Conviene esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x + \arctan \sqrt{x}, & \text{se } x > 1 \\ x - \arctan \sqrt{x}, & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad (2.163)$$

Il campo di esistenza è

$$X = [0, +\infty) - \{1\} \quad (2.164)$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - \arctan \sqrt{x}) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + \arctan \sqrt{x}) = 1 + \arctan 1 = 1 + \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (2.165)$$

Ne consegue che $x = 1$ è un punto di discontinuità di prima specie per f , con salto

$$s(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad (2.166)$$

come mostrato in fig. 2.92. Il comportamento all'infinito si evince dal limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty) + \arctan(+\infty) = (+\infty) + \frac{\pi}{2} = +\infty, \quad (2.167)$$

ossia la funzione è divergente positivamente per $x \rightarrow +\infty$.

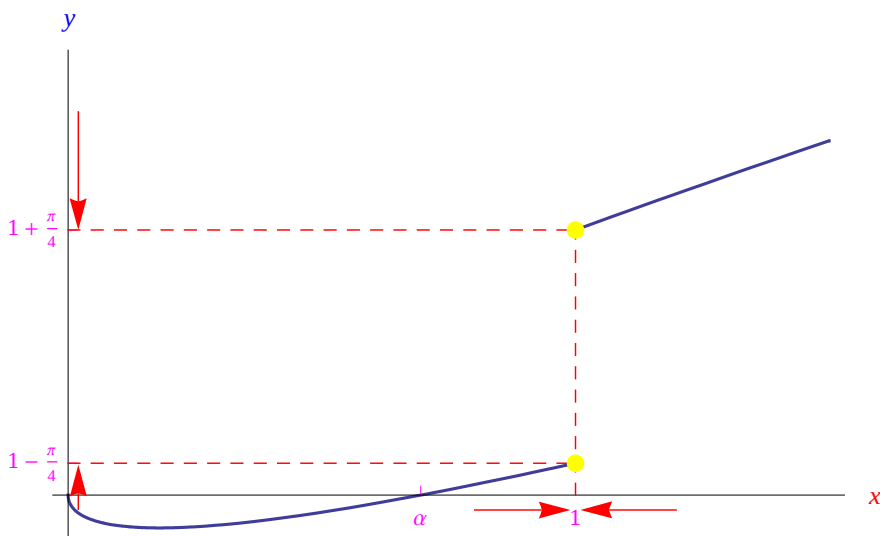


Figura 2.92: Grafico della funzione (2.162).

Nell'esercizio precedente abbiamo visto che la funzione

$$f(x) = x + \arctan\left(\frac{|x-1|}{x-1}\sqrt{x}\right)$$

ha in $x = 1$ un punto di discontinuità di prima specie, giacché:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 1 - \frac{\pi}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= 1 + \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (2.168)$$

La discontinuità è dovuta alla presenza di $\frac{|x-1|}{x-1}$ che può essere scritta come $\operatorname{sgn}(x-1)$, dove $\operatorname{sgn}(\cdot)$ è la funzione **signum** (1.20):

$$\operatorname{sgn}(x-1) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \\ -1, & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad (2.169)$$

Un'altra funzione che presenta punti di discontinuità di prima specie è $\arctan$ il cui argomento ha una discontinuità di seconda specie. Più precisamente, consideriamo la funzione composta

$$f(x) = \arctan(g(x)) \quad (2.170)$$

con $g(x)$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = +\infty \quad (2.171)$$

Segue

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \arctan(g(x)) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}^+ \quad (2.172)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \arctan(g(x)) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}^-,$$

onde x_0 è un punto di discontinuità di prima specie con salto $s(x_0) = \pi$. Se invece

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty, \quad (2.173)$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}, \quad (2.174)$$

ovvero x_0 è un punto di discontinuità eliminabile. Di seguito alcuni esempi.

Esempio 45 *Studiamo il comportamento della funzione*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad (2.175)$$

in un intorno di $x = 1$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}^+ \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}^- \end{aligned} \quad (2.176)$$

Il grafico è riportato in fig. 2.93.

Esempio 46 *Studiamo il comportamento della funzione*

$$f(x) = \arctan\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right] \quad (2.177)$$

in un intorno di $x = 1$.

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}^-, \quad (2.178)$$

per cui $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right], & \text{se } x \neq 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad (2.179)$$

Il grafico è riportato in fig. ??.

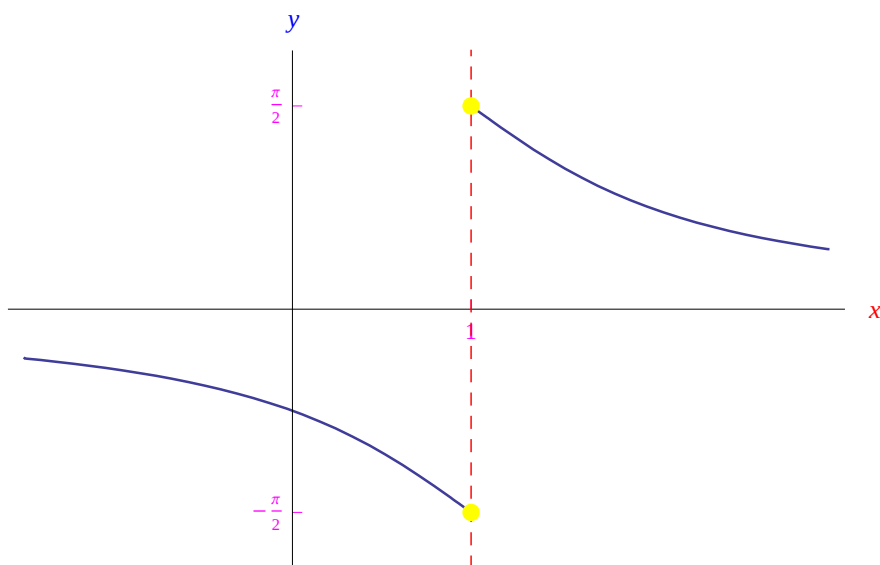


Figura 2.93: Grafico della funzione (2.175).

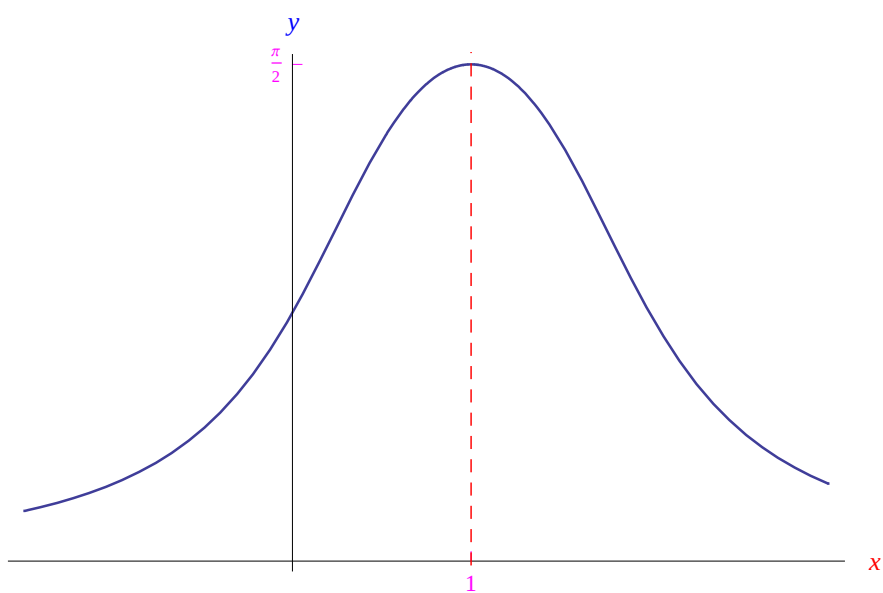


Figura 2.94: Grafico della funzione (2.177).

Esempio 47 Studiamo il comportamento della funzione

$$f(x) = \arctan\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right) \quad (2.180)$$

in un intorno di $x = 1$.

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \arctan(e^{-\infty}) = \arctan(0^+) = 0^+ \quad (2.181)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \arctan(e^{+\infty}) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}^-$$

Il grafico è riportato in fig. 2.95.

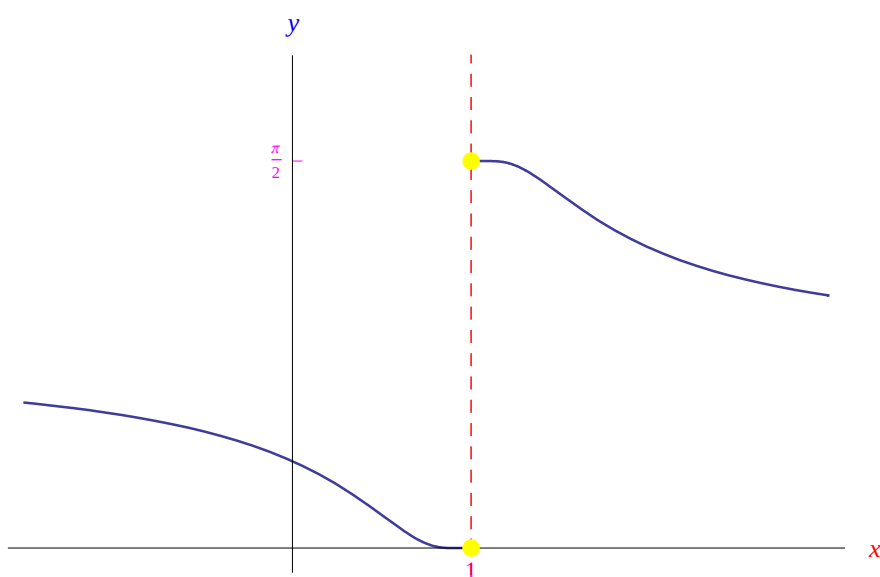


Figura 2.95: Grafico della funzione (2.180).

Esercizio 17 Classificare i punti di discontinuità della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sin \frac{1}{x}}\right) \quad (2.182)$$

Soluzione

Riguardo al campo di esistenza, dobbiamo imporre

$$x \neq 0, \quad x \neq \frac{1}{k\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad (2.183)$$

Per $x \rightarrow 0$ la funzione $\sin \frac{1}{x}$ è **non regolare**, e tale è la funzione assegnata, per cui

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad (2.184)$$

Studiamo il comportamento negli infiniti punti

$$x_k = \frac{1}{k\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad (2.185)$$

Determiniamo preliminarmente i limiti

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{k\pi})^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{k\pi})^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (2.186)$$

A tale scopo eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow (\frac{1}{k\pi})^\pm} (k\pi)^\mp \quad (2.187)$$

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{k\pi})^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow (k\pi)^-} \sin t = \begin{cases} 0^+, & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 0^-, & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases} \quad (2.188)$$

Ne consegue

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{k\pi})^+} f(x) &= \begin{cases} \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}^-, & \text{se } k \text{ è dispari} \\ \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}^+, & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{k\pi})^-} f(x) &= \begin{cases} \arctan(+\infty) = -\frac{\pi}{2}^+, & \text{se } k \text{ è dispari} \\ \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2}^-, & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.189)$$

k pari:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{k\pi})^-} f(x) = \frac{\pi}{2}^-, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{k\pi})^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}^+ \quad (2.190)$$

k dispari:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{k\pi})^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}^+, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{k\pi})^+} f(x) = \frac{\pi}{2}^- \quad (2.191)$$

Quindi i punti x_k sono di discontinuità di prima specie per f , con salto

$$s(x_k) = \begin{cases} \pi, & \text{se } k \text{ è dispari} \\ -\pi, & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases} \quad (2.192)$$

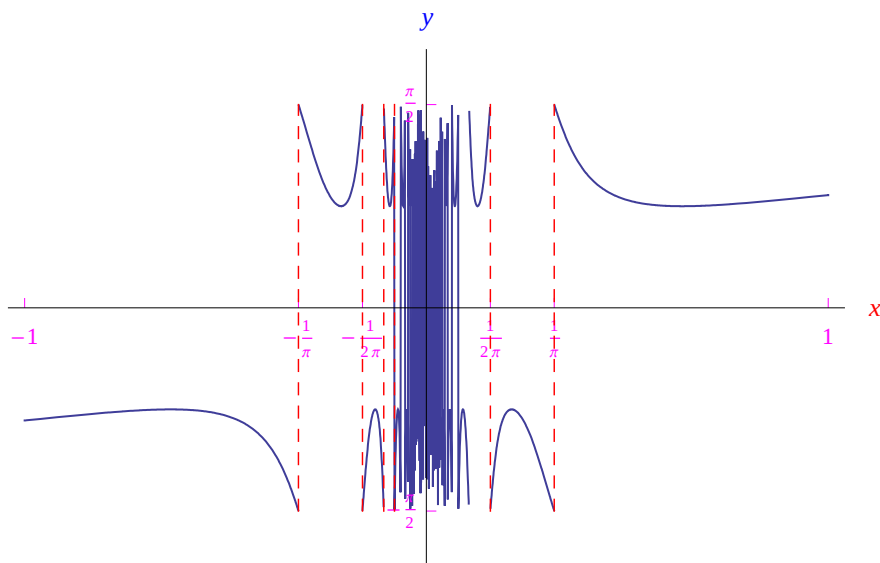
Definiamo

$$\begin{aligned} S &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x_k = \frac{1}{k\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\} \\ &= \left\{ \pm \frac{1}{\pi}, \pm \frac{1}{2\pi}, \pm \frac{1}{3\pi}, \dots, \pm \frac{1}{k\pi}, \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.193)$$

Cioè S è l'insieme dei punti di discontinuità della funzione. Dal momento che $x = 0$ è punto di accumulazione per S , si ha che in ogni intorno di $x = 0$ di ampiezza comunque piccola, cadono infiniti punti di S i.e. punti di discontinuità per f , come illustrato nel grafico di fig. 2.96.

Esercizio 18 *Dimostrare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh\left(\sqrt[n]{1+x+3x^{n-1}} - x\right) = -1, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \quad (2.194)$$


 Figura 2.96: Grafico della funzione (2.182) nell'intervallo $[-1, 1]$.

Soluzione

Procedendo per continuità

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh \left(\sqrt[n]{1+x+3x^{n-1}} - x \right) = \tanh \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{1+x+3x^{n-1}} - x \right), \quad (2.195)$$

onde calcoliamo a parte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{1+x+3x^{n-1}} - x \right) = \infty - \infty \quad (2.196)$$

Per risolvere l'indeterminazione non occorre calcolare il fattore razionalizzante. Infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{1+x+3x^{n-1}} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} \sqrt[n]{1+x+3x^{n-1}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[n]{\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{3}{x}} - 1 \right) \\ &= (+\infty)(0-1) = -\infty \end{aligned} \quad (2.197)$$

Ne concludiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh \left(\sqrt[n]{1+x+3x^{n-1}} - x \right) = \tanh(-\infty) = -1 \quad (2.198)$$

Esercizio 19 Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \operatorname{sech} \sinh \ln \left| \frac{1-x^n}{1+x^n} \right|, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad (2.199)$$

è infinitesima per $x \rightarrow \pm\infty$.

Soluzione

Si tratta di eseguire l'operazione di passaggio al limite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \operatorname{arcsinh} \ln \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{1 - x^n}{1 + x^n} \right| \right), \quad (2.200)$$

per cui calcoliamo a parte il limite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{1 - x^n}{1 + x^n} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{\frac{1}{x^n} - 1}{\frac{1}{x^n} + 1} \right| = |-1| = 1 \quad (2.201)$$

Segue

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \operatorname{arcsinh} \ln 1 = \operatorname{arcsinh} 0 = 0 \quad (2.202)$$

Esercizio 20 Determinare il comportamento della funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \arctan \frac{x^2 - 1}{4 - x} \quad (2.203)$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione

La funzione è definita in

$$X = \mathbb{R} - \{4\} \quad (2.204)$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \frac{\pi}{4} + \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi, \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \frac{\pi}{4} + \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Ne consegue che $x = 4$ è un punto di discontinuità di prima specie. Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} + \arctan \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{4 - x}$$

Ma

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(1 - \frac{1}{x^2})}{\frac{4}{x} - 1} = \begin{cases} \frac{(+\infty)}{-1} = -\infty, & x \rightarrow +\infty \\ \frac{(-\infty)}{-1} = +\infty, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2.205)$$

Segue

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \frac{\pi}{4} + \begin{cases} \arctan(-\infty), & x \rightarrow +\infty \\ \arctan(+\infty), & x \rightarrow -\infty \end{cases} \\ &= \frac{\pi}{4} + \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x \rightarrow +\infty \\ +\frac{\pi}{2}, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & x \rightarrow +\infty \\ \frac{3\pi}{4}, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \end{aligned} \quad (2.206)$$

Cioè le rette orizzontali

$$y = -\frac{\pi}{4}, \quad y = \frac{3\pi}{4}$$

sono rispettivamente asintoti orizzontali a destra e a sinistra per il diagramma cartesiano della funzione riportato in fig. 2.97

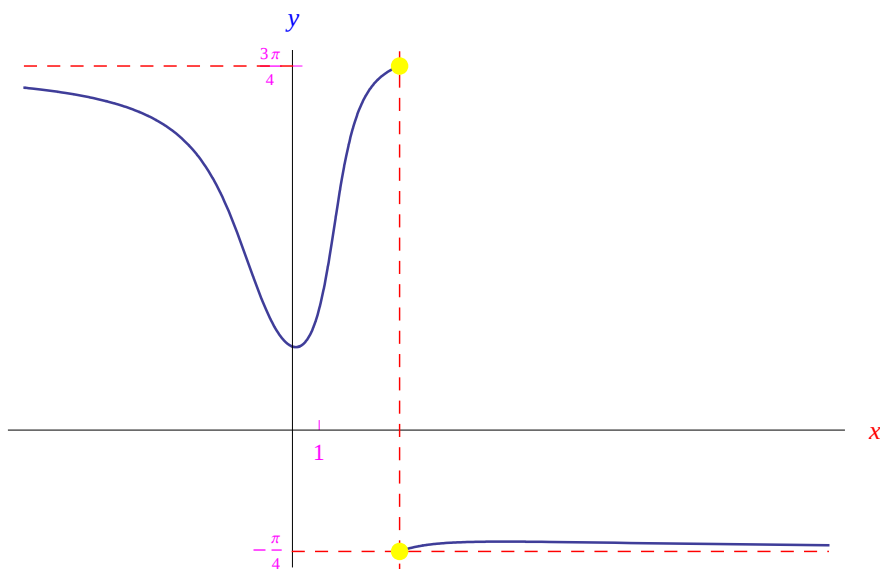


Figura 2.97: Grafico della funzione (2.203)

Esercizio 21 Studiare il comportamento della funzione

$$f(x) = x\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} - \sqrt{2}x \quad (2.207)$$

agli estremi del suo campo di esistenza

Soluzione

Per determinare il campo di esistenza, occorre risolvere la disequazione:

$$\frac{2x-1}{x+1} \geq 0, \quad (2.208)$$

ed è facile convincersi che risulta

$$X = (-\infty, -1) \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \quad (2.209)$$

Quindi calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = (-1) \cdot (+\infty) + \sqrt{2} = -\infty \quad (2.210)$$

Cioè la retta $x+1=0$ è asintoto verticale a sinistra per il diagramma cartesiano della funzione. Passiamo al comportamento all'infinito.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= (+\infty) - (+\infty) = \infty - \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= (-\infty) - (-\infty) = \infty - \infty \end{aligned} \quad (2.211)$$

Siamo dunque pervenuti alla forma indeterminata $\infty - \infty$. Scriviamo

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(x\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} - \sqrt{2x}\right) \left(x\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} + \sqrt{2x}\right)}{x\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} + \sqrt{2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \frac{2x-1}{x+1} - 2x^2}{x\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} + \sqrt{2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(2x-1) - 2x^2(x+1)}{(x+1)\left(x\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} + \sqrt{2x}\right)} \\
 &= -3 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\sqrt{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} + \sqrt{2}\right)} \\
 &= -3 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\sqrt{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} + \sqrt{2}\right)} \\
 &= -3 \cdot \frac{1}{(1+0)(\sqrt{2} + \sqrt{2})} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}
 \end{aligned} \tag{2.212}$$

Ne consegue che la retta

$$4y + 3\sqrt{2} = 0 \tag{2.213}$$

è asintoto orizzontale per il diagramma della funzione.

Esercizio 22 Studiare il comportamento della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x \tag{2.214}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione

Dal momento che

$$x^2 + x + 1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

si ha che la funzione è definita in $(-\infty, +\infty)$. Il limite per $x \rightarrow -\infty$ è immediato

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right) = (+\infty) - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty, \tag{2.215}$$

cioè la funzione diverge positivamente per $x \rightarrow -\infty$. Passiamo al limite per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right) = (+\infty) - (+\infty) = \infty - \infty \tag{2.216}$$

Per risolvere tale forma indeterminata, riscriviamo la funzione

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2} \\
 &= \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2})(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2}} \\
 &= \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\
 &= \frac{x \left(\frac{1}{x} + 1\right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + x}} \\
 &= \operatorname{sgn}(x) \frac{\frac{1}{x} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \operatorname{sgn}(x)}},
 \end{aligned} \tag{2.217}$$

dove $\operatorname{sgn}(x)$ è la [funzione signum](#). Quindi

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\operatorname{sgn}(x) \frac{\frac{1}{x} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \operatorname{sgn}(x)}} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sgn}(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \operatorname{sgn}(x)}}
 \end{aligned}$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sgn}(x) = +1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \operatorname{sgn}(x)}} = \frac{0 + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}, \tag{2.218}$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \tag{2.219}$$

Cioè per $x \rightarrow +\infty$ la funzione è convergente e il limite vale $1/2$. Geometricamente, significa che la retta $2y - 1 = 0$ è asintoto orizzontale a destra per il grafico della funzione.

Esercizio 23 Studiare il comportamento della funzione

$$f(x) = \frac{x(e^{1/x} - 1)}{e^{-x} \cosh x} \tag{2.220}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, ed è istruttivo studiarne il segno.

$$f(x) > 0 \iff x(e^{1/x} - 1) > 0 \iff x \neq 0,$$

onde la funzione è positiva in X . Studiamo il comportamento in un intorno del punto di accumulazione $x = 0$. Precisamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{(0^+)(e^{+\infty} - 1)}{1} = \frac{0 \cdot \infty}{1} \tag{2.221}$$

L'indeterminazione è prodotta dal numeratore, per cui calcoliamo a parte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} x}_{=0},$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = \lim_{t=\frac{1}{x} \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty,$$

giacché e^t è, per $t \rightarrow +\infty$, un infinito di ordine infinitamente grande. Segue

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (e^{1/x} - 1) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad (2.222)$$

Ne consegue che l'asse y è asintoto verticale a destra per il grafico della funzione.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{0(e^{-\infty} - 1)}{1} = \frac{0(0 - 1)}{1} = 0 \quad (2.223)$$

Dal momento che la funzione è positiva nel suo insieme di definizione, deve essere:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^+ \quad (2.224)$$

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{(+\infty)(e^{0^+} - 1)}{0 \cdot \infty} = \frac{0 \cdot \infty}{0 \cdot \infty}$$

Cioè troviamo la forma indeterminata $0 \cdot \infty$ sia a numeratore che a denominatore. Consideriamo l'espansione del coseno iperbolico in esponenziali, secondo la consueta definizione di $\cosh x$:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Segue

$$f(x) = \frac{2x(e^{1/x} - 1)}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{0 \cdot \infty}{1} \quad (2.225)$$

Siamo pertanto riusciti a rimuovere l'indeterminazione a denominatore. Calcoliamo a parte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (e^{1/x} - 1) = \lim_{t=\frac{1}{x} \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = \ln e = 1, \quad (2.226)$$

che è un caso particolare del **limite fondamentale**:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} x (e^{1/x} - 1)}{1} = 2 \quad (2.227)$$

Da tale risultato emerge che la funzione è convergente per $x \rightarrow +\infty$ e il limite vale 2. In termini geometrici, ciò implica che la retta $y = 2$ è asintoto orizzontale a destra per il grafico della funzione. Ora calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{(-\infty)(e^{0^-} - 1)}{0 \cdot \infty} = \frac{0 \cdot \infty}{0 \cdot \infty},$$

cioè nuovamente la forma indeterminata $0 \cdot \infty$ sia a numeratore che a denominatore. Utilizzando l'artificio precedente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(e^{1/x} - 1)}{1 + e^{-2x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{1/x} - 1)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^{-2x})} \quad (2.228)$$

Il limite a denominatore è $+\infty$, mentre il limite a numeratore

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{t=\frac{1}{x} \rightarrow 0^-} \frac{e^t - 1}{t} = \ln e = 1, \quad (2.229)$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0^+,$$

ovvero la funzione è infinitesima per $x \rightarrow -\infty$.

Esercizio 24 Studiare il comportamento della funzione

$$f(x) = \frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\sinh\left(\frac{a}{x}\right)}, \quad (a > 0) \quad (2.230)$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione

La funzione è definita in X tale che

$$\frac{1+x}{x} > 0, \quad (2.231)$$

cioè

$$X = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \quad (2.232)$$

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{\ln(0^+)}{\sinh(-a)} = -\frac{\ln(\infty)}{\sinh(a)} = +\infty, \quad (2.233)$$

cosicché la funzione diverge positivamente per $x \rightarrow -1^-$. Conseguentemente, la retta $x+1=0$ è asintoto verticale a destra per il grafico di f . Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\ln(+\infty)}{\sinh(+\infty)} = \frac{\infty}{\infty} \quad (2.234)$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{1}{x}, \quad (2.235)$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t+1)}{\sinh(at)} = \frac{\infty}{\infty} \quad (2.236)$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t+1)}{\sinh(at)} \stackrel{H}{=} \frac{1}{a} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(t+1) \cosh(at)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+, \quad (2.237)$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^+ \quad (2.238)$$

Cioè la funzione è infinitesima per $x \rightarrow 0^+$. Calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} \quad (2.239)$$

Con il cambio di variabile precedente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(t+1)}{\sinh(at)} \\ &= \frac{1}{a} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(t+1)}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{at}{\sinh(at)} \end{aligned} \quad (2.240)$$

Abbiamo così fattorizzato il limite nel prodotto dei **limiti fondamentali**:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = \frac{1}{\ln e} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{at}{\sinh(at)} = 1$$

Ne consegue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{a} \quad (2.241)$$

Utilizzando il medesimo artificio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{a}, \quad (2.242)$$

ovvero la retta $ay - 1 = 0$ è asintoto orizzontale per il grafico di f .

Esercizio 25 Calcolare

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(\tan \frac{2}{x} - \sin \frac{2}{x} \right) \quad (2.243)$$

Soluzione

Osserviamo preliminarmente

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\tan \frac{2}{x} - \sin \frac{2}{x} \right) = \tan 0 - \sin 0 = 0, \quad (2.244)$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(\tan \frac{2}{x} - \sin \frac{2}{x} \right) = 0 \cdot \infty \quad (2.245)$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0,$$

onde

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(\tan \frac{2}{x} - \sin \frac{2}{x} \right) &= 8 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t - \sin t}{t^3} \\ &= 8 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t}{\cos t} - \sin t}{t^3} \\ &= 8 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - \sin t \cos t}{t^3 \cos t} \\ &= 8 \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\cos t}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2}}_{=1/2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Esercizio 26 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - x} - \sqrt{3x^2 + x + 1}}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}} \quad (2.246)$$

Soluzione

A “occhio” vediamo subito che numeratore e denominatore restituiscono la forma indeterminata $\infty - \infty$, per cui calcoliamo separatamente:

$$\lambda_1 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{3x^2 - x} - \sqrt{3x^2 + x + 1} \right) \quad (2.247)$$

$$\lambda_2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x + 1} \right)$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\sqrt{3x^2 - x} - \sqrt{3x^2 + x + 1})(\sqrt{3x^2 - x} + \sqrt{3x^2 + x + 1})}{\sqrt{3x^2 - x} - \sqrt{3x^2 + x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\sqrt{3x^2 - x} - \sqrt{3x^2 + x + 1})(\sqrt{3x^2 - x} + \sqrt{3x^2 + x + 1})}{\sqrt{3x^2 - x} + \sqrt{3x^2 + x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x - 1}{\sqrt{3x^2 - x} + \sqrt{3x^2 + x + 1}} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{|x| \left(\sqrt{3 - \frac{1}{x}} + \sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)} \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, & x \rightarrow +\infty \\ \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \end{aligned} \quad (2.248)$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x + 1})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2x + 1})}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\frac{1}{x} + 1)}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{2}, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \end{aligned} \quad (2.249)$$

Ne concludiamo

$$\lambda = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}, & x \rightarrow +\infty \\ \frac{2}{3}\sqrt{3}, & x \rightarrow -\infty \end{cases}, \quad (2.250)$$

ossia

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - x} - \sqrt{3x^2 + x + 1}}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad (2.251)$$

Esercizio 27 *Determinare il campo di esistenza della funzione*

$$f(x) = \lg_2 \lg_{1/3} \ln(x^2 - 1) \quad (2.252)$$

Soluzione

Deve essere

$$\lg_{1/3} \ln(x^2 - 1) > 0 \quad (2.253)$$

Cioè

$$\begin{cases} \ln(x^2 - 1) > 0 \\ \ln(x^2 - 1) < 1 \end{cases} \quad (2.254)$$

Risolviamo la prima

$$\ln(x^2 - 1) > 0 \iff x^2 - 1 > 1 \iff x \in X_1 = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \quad (2.255)$$

Risolviamo la seconda

$$\ln(x^2 - 1) < 1 \iff \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 < e \end{cases} \quad (2.256)$$

Segue

$$x^2 - 1 > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \quad (2.257)$$

$$x^2 - 1 < e \iff x^2 - (1 + e) < 0 \iff x \in (-\sqrt{1 + e}, \sqrt{1 + e})$$

Quindi le soluzioni della disequazione

$$\ln(x^2 - 1) < 1 \quad (2.258)$$

sono

$$x \in X_2 = (-\sqrt{1 + e}, -1) \cup (1, \sqrt{1 + e}), \quad (2.259)$$

come illustrato nel grafico di fig. 2.98.

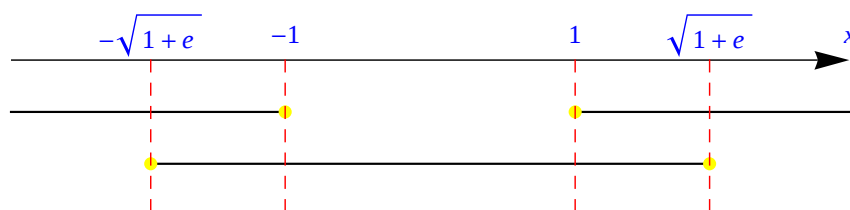


Figura 2.98: Soluzioni della disequazione (2.256).

Il campo di esistenza della funzione assegnata è

$$X = X_1 \cap X_2 = (-\sqrt{1 + e}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{1 + e}),$$

come si deduce dal grafico di fig. 2.99.



Figura 2.99: Ricerca del campo di esistenza della funzione assegnata.

Esercizio 28 *Determinare il comportamento della funzione dell'esercizio precedente, agli estremi del suo campo di esistenza.*

Soluzione

Dal momento che la funzione è pari, possiamo studiare il comportamento per $x > 0$. Più precisamente, si tratta di calcolare i limiti per $x \rightarrow (\sqrt{2})^+$ e per $x \rightarrow (\sqrt{1+e})^-$. Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} f(x) = \lg_2 \lg_{1/3} \ln 1^+ = \lg_2 \lg_{1/3} (0^+) = \lg_2 (+\infty) = +\infty \quad (2.260)$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} f(x) = +\infty \xRightarrow{f(x) \equiv f(-x)} \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^-} f(x) = +\infty \quad (2.261)$$

Ne consegue che le rette $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ sono asintoti verticali per il diagramma cartesiano della funzione.

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{1+e})^-} f(x) = \lg_2 \lg_{1/3} \ln (e^-) = \lg_2 \lg_{1/3} (1^-) = \lg_2 (0^+) = -\infty \quad (2.262)$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{1+e})^-} f(x) = -\infty \xRightarrow{f(x) \equiv f(-x)} \lim_{x \rightarrow (\sqrt{1+e})^+} f(x) = -\infty, \quad (2.263)$$

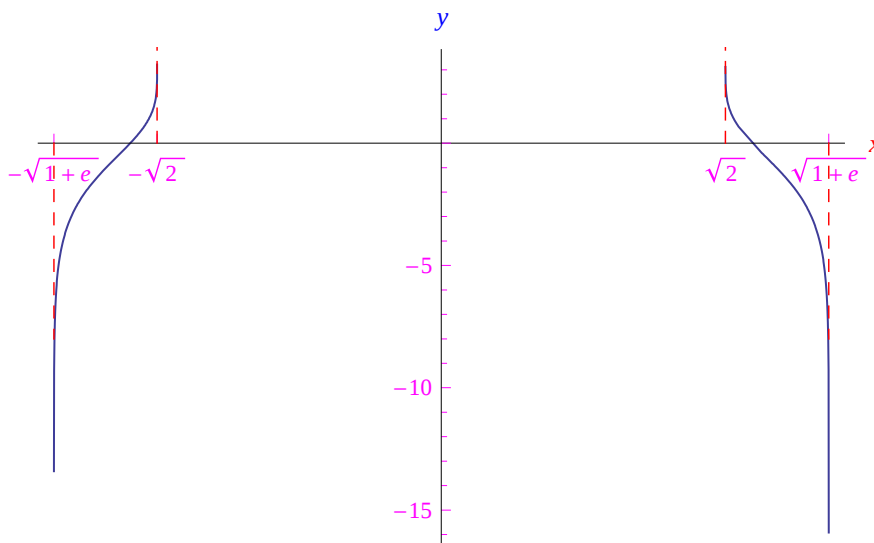
onde le rette $x = \sqrt{1+e}$ e $x = -\sqrt{1+e}$ sono asintoti verticali. Notiamo, infine, l'esistenza di una coppia di zeri simmetrici rispetto all'asse y , giacché

$$f(x) = 0 \iff \lg_{1/3} \ln (x^2 - 1) = 1 \iff \ln (x^2 - 1) = \frac{1}{3} \iff x^2 - 1 = \sqrt[3]{e}, \quad (2.264)$$

ovvero

$$x = \pm \sqrt{1 + \sqrt[3]{e}} \quad (2.265)$$

In fig. 2.100 riportiamo il grafico completo della funzione assegnata.


 Figura 2.100: Grafico della funzione $f(x) = \lg_2 \lg_{1/3} \ln(x^2 - 1)$.

Esercizio 29 Determinare il comportamento della funzione

$$f(x) = |x|^{\sinh x} \quad (2.266)$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione

La funzione è definita in

$$X = \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.267)$$

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\sinh x} = 0^0 \quad (2.268)$$

Per risolvere tale forma indeterminata, applichiamo il solito procedimento

$$f(x) = e^{\sinh x \ln |x|}, \quad (2.269)$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sinh x \ln |x|} \quad (2.270)$$

Calcoliamo a parte il limite, applicando la regola di de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sinh x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{\sinh x}} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D \ln |x|}{D \left(\frac{1}{\sinh x} \right)} \quad (2.271)$$

Riesce

$$D \ln |x| = \frac{1}{x}, \quad D \left(\frac{1}{\sinh x} \right) = -\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} \quad (2.272)$$

Segue

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D \ln |x|}{D \left(\frac{1}{\sinh x} \right)} &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cosh x}{\sinh^2 x}} \\ &= -\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \sinh x}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cosh x}}_{=1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sinh x \ln |x| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^0 = 1 \quad (2.273)$$

In altri termini, $x = 0$ è un **punto di discontinuità eliminabile** per la funzione.

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty)^{+\infty} = +\infty,$$

cioè la funzione diverge positivamente per $x \rightarrow +\infty$. Per $x \rightarrow -\infty$ è infinitesima:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \quad (2.274)$$

In fig. 2.101 riportiamo il grafico completo della funzione assegnata.

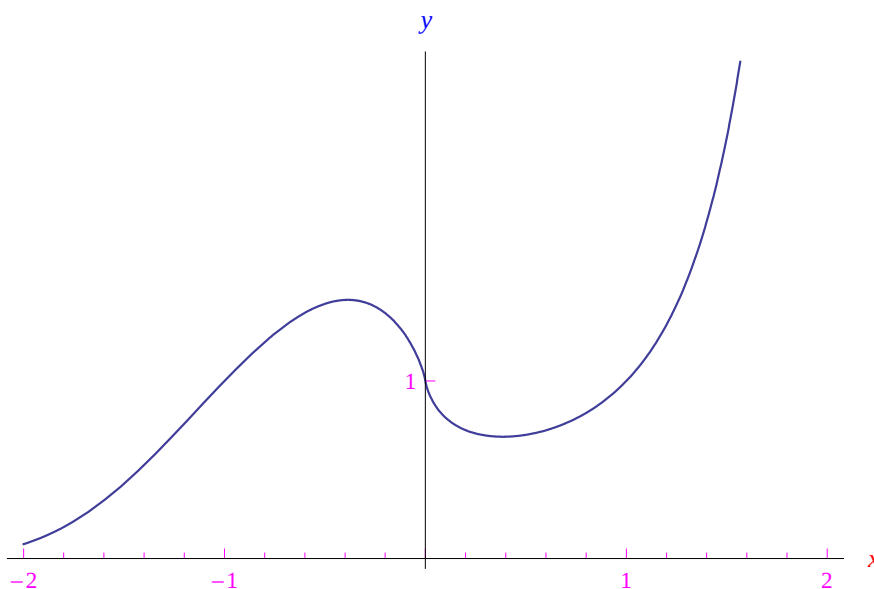


Figura 2.101: Grafico della funzione (2.266).

Esercizio 30 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1 - x)}{\tan x - x} \quad (2.275)$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1 - x)}{\tan x - x} = \frac{1 - 1 + \ln(1 - 0)}{0} = \frac{0}{0} \quad (2.276)$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D[e^x - 1 + \ln(1-x)]}{D(\tan x - x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x(1-x) - 1}{\sin^2 x} \cos^2 x \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-x) - 1}{\sin^2 x} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x}_{=1}
 \end{aligned} \tag{2.277}$$

Calcoliamo a parte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-x) - 1}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \tag{2.278}$$

Applichiamo nuovamente la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-x) - 1}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-x) - e^x}{2 \sin x \cos x} \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{\sin x \cos x} \\
 &= -\frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x}}_{=1}
 \end{aligned} \tag{2.279}$$

Conclusione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} = -\frac{1}{2} \tag{2.280}$$

2.14 Infinitesimi ed infiniti

2.14.1 Definizioni

Sia f una funzione reale di una variabile reale definita in $X \subseteq \mathbb{R}$:

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.281}$$

Se x_0 è un punto di accumulazione per X , sussistono le seguenti definizioni:

Definizione 81 f è un **infinitesimo** in x_0 (o per $x \rightarrow x_0$) se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \tag{2.282}$$

Definizione 82 f è un **infinito** in x_0 (o per $x \rightarrow x_0$) se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \tag{2.283}$$

Alcuni esempi di infinitesimi:

Esempio 48 La funzione $f(x) = \sin x$ è un infinitesimo negli infiniti punti

$$x_k = k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (2.284)$$

Esempio 49 La funzione $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ non è definita in $x = 0$, tuttavia:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad (2.285)$$

per cui $x \sin \frac{1}{x}$ è un infinitesimo nel predetto punto.

Esempio 50 La funzione $f(x) = 1/x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$, giacché:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \quad (2.286)$$

Alcuni esempi di infiniti:

Esempio 51 La funzione $f(x) = \csc x$ è un infinito negli infiniti punti (2.284).

Esempio 52 La funzione $f(x) = 1/x$ è un infinito in $x = 0$.

2.14.2 Infinitesimi confrontabili. Il concetto di ordine

Se x_0 è un qualunque punto di accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}$, resta definito l'insieme

$$\mathcal{I}(x_0) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \\ \nexists I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mid x \in X \cap I_\delta(x_0) - \{x_0\} \implies f(x) = 0 \end{array} \right\}, \quad (2.287)$$

che si identifica con la **classe degli infinitesimi** in x_0 non definitivamente nulli intorno a tale punto.

Ciò premesso, comunque prendiamo $f, g \in \mathcal{I}(x_0)$ il confronto tra f e g si realizza calcolando il limite del rapporto f/g :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad (2.288)$$

Si presentano i seguenti casi:

1. Il rapporto è un infinitesimo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (2.289)$$

Significa che $f(x)$ tende a zero più rapidamente di $g(x)$. Diremo allora che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine superiore** a $g(x)$.

2. Il rapporto è un infinito:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \quad (2.290)$$

Significa che $g(x)$ tende a zero più rapidamente di $f(x)$. Diremo allora che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine inferiore** a $g(x)$.

3. Il rapporto converge a un limite non nullo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.291)$$

Significa che $f(x)$ e $g(x)$ tendono a zero con la medesima rapidità. Diremo allora che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi dello stesso ordine**. Se $\ell = 1$ gli infinitesimi si dicono *equivalenti* e si scrive:

$$f \sim g, \quad (x \rightarrow x_0) \quad (2.292)$$

4. Il rapporto è non regolare

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (2.293)$$

Esempio 53 *Siano*

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x,$$

elementi di $\mathcal{I}(0)$. Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

e tale limite non esiste.

In casi come questi spostiamo la nostra attenzione sul rapporto $|f(x)| / |g(x)|$, calcolando:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}, \quad (2.294)$$

per cui si presenta uno dei seguenti sottocasi:

4a.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lambda > 0 \quad (2.295)$$

Qui $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

4b.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty \quad (2.296)$$

e diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$.

4c. Il rapporto $|f(x)| / |g(x)|$ è non regolare

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}, \quad (2.297)$$

ma è definitivamente limitato intorno a x_0 . Più precisamente

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \exists \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, x_0 + \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) - \{x_0\} \\ \implies \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2.298)$$

In tale circostanza diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

In tutti i casi esaminati gli infinitesimi assegnati si dicono **confrontabili**. Viceversa, si dicono **non confrontabili** se si verifica la negazione della (2.298) i.e. il rapporto $|f(x)|/|g(x)|$ non è definitivamente limitato intorno a x_0 :

$$\begin{aligned} \nexists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \exists \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, x_0 + \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) - \{x_0\} \\ \implies \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2.299)$$

Fa eccezione il seguente caso:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) - \{x_0\} \implies 0 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon \quad (2.300)$$

Cioè se il rapporto $|f(x)|/|g(x)|$ ha, intorno a x_0 , per estremo inferiore lo zero ed è limitato superiormente. In tale circostanza si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine non inferiore** a $g(x)$. In maniera simile:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) - \{x_0\} \implies \varepsilon \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < +\infty, \quad (2.301)$$

ovvero il rapporto $|f(x)|/|g(x)|$ è definitivamente limitato inferiormente ma non superiormente. Ne consegue che $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine non superiore** a $g(x)$.

Esempio 54 Riprendiamo l'esempio 53:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x \quad (2.302)$$

Il rapporto è non regolare

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sin \frac{1}{x} \quad (2.303)$$

Passando ai valori assoluti di singolo infinitesimo, constatiamo che nemmeno ora il rapporto è regolare, giacché:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \left| \sin \frac{1}{x} \right| \quad (2.304)$$

Tuttavia:

$$0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.305)$$

Ne consegue che $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ è (in $x = 0$) un infinitesimo di ordine non inferiore a $g(x) = x$. In fig. 2.102 riportiamo i grafici di tali funzioni in un intorno di $x = 0$.

Esempio 55 Siano

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x \sin^2 \frac{1}{x} \quad (2.306)$$

Si tratta di infinitesimi in $x = 0$. Il primo limite è ben noto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad (2.307)$$

Il secondo è meno immediato, ma facilmente dimostrabile applicando il teorema 4:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin^2 \frac{1}{x} = 0 \quad (2.308)$$

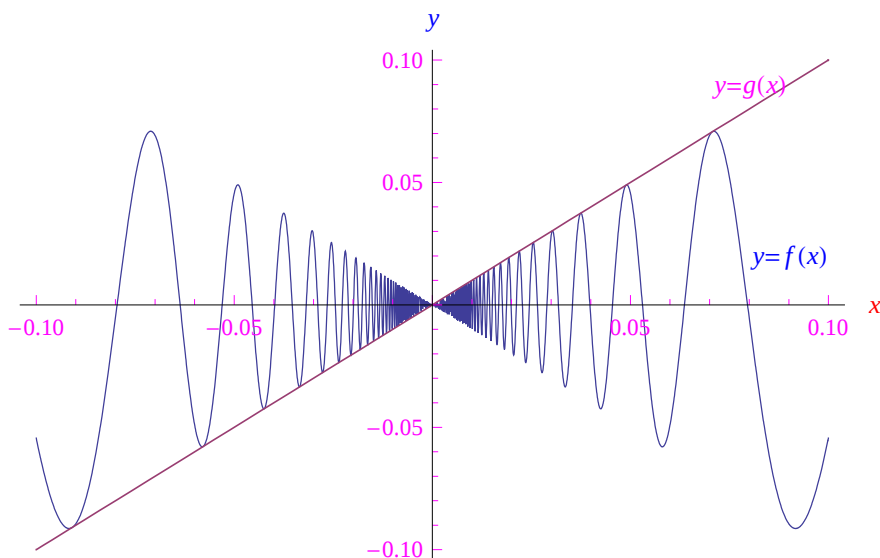


Figura 2.102: Grafico delle funzioni $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$ entrambe infinitesime per $x \rightarrow 0$. Il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ è limitato tra 0 e 1, per cui $f(x)$ è di ordine non inferiore a $g(x)$.

Confrontiamo i due infinitesimi eseguendo il rapporto:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}, \quad (2.309)$$

che è manifestamente non regolare in $x = 0$. Altrettanto non regolare è il rapporto dei valori assoluti di singolo infinitesimo:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{1}{\left| \sin \frac{1}{x} \right|} \quad (2.310)$$

Ma

$$1 \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{1}{x} \right|} < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.311)$$

Ne consegue che $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ è (in $x = 0$) un infinitesimo di ordine non superiore a $g(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$. In fig. 2.103 riportiamo i grafici di tali funzioni in un intorno di $x = 0$.

Un esempio immediato per ciò che riguarda la confrontabilità di infinitesimi è offerto dalla coppia di limiti fondamentali:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Ne consegue che $\sin x$ e x sono (per $x \rightarrow 0$) infinitesimi dello stesso ordine. Per quanto precede $\sin x$ e x sono infinitesimi equivalenti:

$$\sin x \sim x \quad (x \rightarrow 0), \quad (2.312)$$

mentre $1 - \cos x$ è un infinitesimo di ordine superiore a x . Tali risultati hanno una notevole interpretazione geometrica che può essere dedotta dall'esame della fig. 2.104. Dal momento

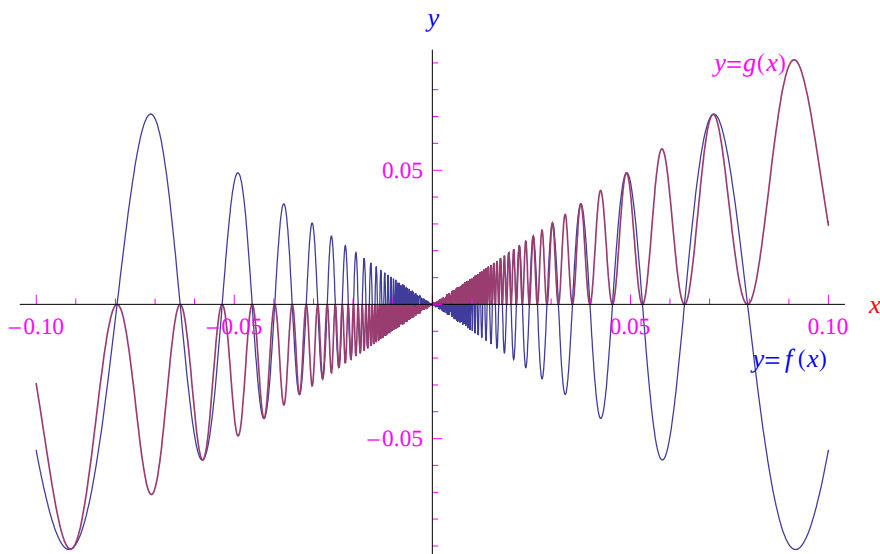


Figura 2.103: Grafico delle funzioni $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$ entrambe infinitesime per $x \rightarrow 0$. Il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ è limitato inferiormente ma non superiormente, per cui $f(x)$ è di ordine non superiore a $g(x)$.

che $2 \sin x$ è la lunghezza della corda PP' sottesa dall'arco di estremi P e P' (la cui lunghezza è $2x$), si ha che per $x \rightarrow 0$ la lunghezza della corda è un infinitesimo dello stesso ordine della lunghezza dell'arco. Diversamente, $1 - \cos x$ è la lunghezza della “freccia” $\overline{QA}$ dell'arco di estremi P e P' e per quanto precede, è un infinitesimo di ordine superiore a x (per $x \rightarrow 0$). In parole povere, mentre la lunghezza della corda tende a zero con la stessa rapidità con cui si annulla la lunghezza dell'arco, la lunghezza della freccia va a zero più rapidamente.

2.14.3 Infiniti confrontabili. Il concetto di ordine

Se x_0 è un qualunque punto di accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}$, resta definito l'insieme

$$\mathcal{J}(x_0) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \right\}, \quad (2.313)$$

che si identifica con la **classe degli infiniti** in x_0 .

Ciò premesso, comunque prendiamo $f, g \in \mathcal{J}(x_0)$ il confronto tra f e g si realizza calcolando il limite del rapporto f/g :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad (2.314)$$

Si presentano i seguenti casi:

1. Il rapporto è un infinitesimo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (2.315)$$

Significa che $|g(x)|$ tende a $+\infty$ più rapidamente di $|f(x)|$. Diremo allora che $f(x)$ è un **infinito di ordine inferiore** a $g(x)$.

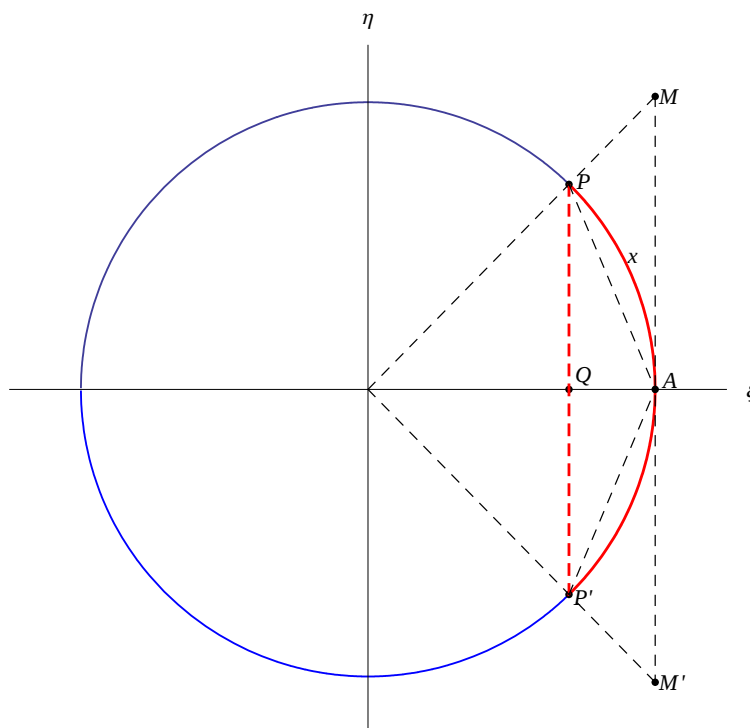


Figura 2.104: Circonferenza trigonometrica.

2. Il rapporto è un infinito:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty \quad (2.316)$$

Significa che $|f(x)|$ tende $+\infty$ più rapidamente di $|g(x)|$. Diremo allora che $f(x)$ è un **infinito di ordine superiore** a $g(x)$.

3. Il rapporto converge a un limite non nullo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.317)$$

Significa che $|f(x)|$ e $|g(x)|$ tendono a $+\infty$ con la medesima rapidità. Diremo allora che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti dello stesso ordine**.

4. Il rapporto è non regolare

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (2.318)$$

Esempio 56 Siano

$$f(x) = \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}, \quad g(x) = \frac{1}{x},$$

elementi di $\mathcal{J}(0)$. Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$$

e tale limite non esiste.

In casi come questi spostiamo la nostra attenzione sul rapporto $|f(x)|/|g(x)|$, calcolando:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}, \quad (2.319)$$

per cui si presenta uno dei seguenti sottocasi:

4a.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lambda > 0 \quad (2.320)$$

Qui $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine.

4b.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty \quad (2.321)$$

e diremo che $f(x)$ è un infinito di ordine superiore a $g(x)$.

4c. Il rapporto $|f(x)|/|g(x)|$ è non regolare

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}, \quad (2.322)$$

ma è definitivamente limitato intorno a x_0 . Più precisamente

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \exists \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, x_0 + \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) - \{x_0\} \\ \implies \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2.323)$$

In tale circostanza diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine.

In tutti i casi esaminati gli infiniti assegnati si dicono **confrontabili**. Viceversa, si dicono **non confrontabili** se si verifica la negazione della (2.298) i.e. il rapporto $|f(x)|/|g(x)|$ non è definitivamente limitato intorno a x_0 :

$$\begin{aligned} \nexists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \exists \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, x_0 + \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) - \{x_0\} \\ \implies \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2.324)$$

Fa eccezione il seguente caso:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) - \{x_0\} \implies 0 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon \quad (2.325)$$

Cioè se il rapporto $|f(x)|/|g(x)|$ ha, intorno a x_0 , per estremo inferiore lo zero ed è limitato superiormente. In tale circostanza si dice che $f(x)$ è un infinito di **ordine non superiore** a $g(x)$. In maniera simile:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) - \{x_0\} \implies \varepsilon \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < +\infty, \quad (2.326)$$

ovvero il rapporto $|f(x)|/|g(x)|$ è definitivamente limitato inferiormente ma non superiormente. Ne consegue che $f(x)$ è un infinito di **ordine non inferiore** a $g(x)$.

Esempio 57 Riprendiamo l'esempio 56:

$$f(x) = \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}, \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad (2.327)$$

Il rapporto è non regolare

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sin \frac{1}{x}} \quad (2.328)$$

Passando ai valori assoluti di singolo infinitesimo, constatiamo che nemmeno ora il rapporto è regolare, giacché:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{1}{\left| \sin \frac{1}{x} \right|} \quad (2.329)$$

Tuttavia:

$$0 < \frac{1}{\left| \sin \frac{1}{x} \right|} \leq +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.330)$$

Ne consegue che $f(x) = (x \sin \frac{1}{x})^{-1}$ è (in $x = 0$) un infinito di ordine non inferiore a $g(x) = x^{-1}$. In fig. 2.105 riportiamo i grafici di tali funzioni in un intorno di $x = 0$.

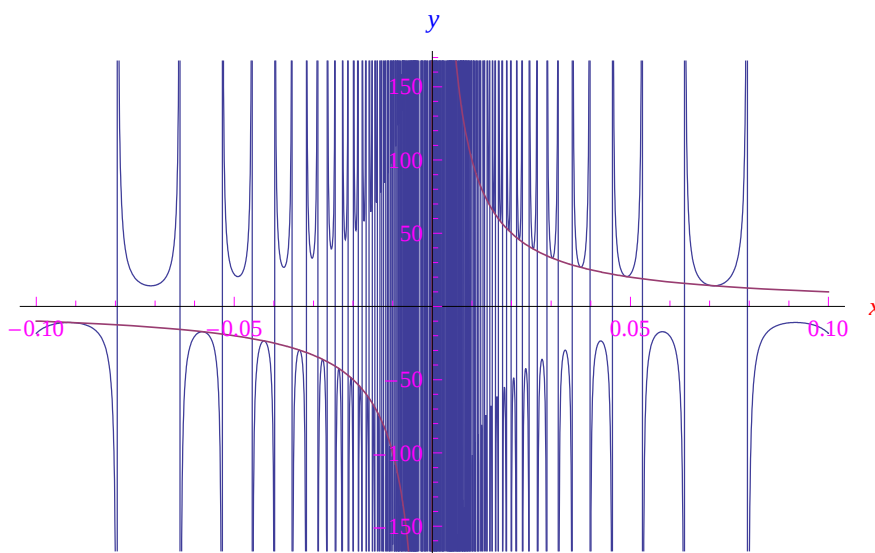


Figura 2.105: Grafico delle funzioni $f(x) = \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ entrambe infinite per $x \rightarrow 0$. Il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ non è limitato superiormente, per cui $f(x)$ è di ordine non inferiore a $g(x)$.

Esempio 58 Siano dati gli infiniti (per $x \rightarrow 0$):

$$f(x) = \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}, \quad g(x) = \frac{1}{x \sin^2 \frac{1}{x}} \quad (2.331)$$

Eseguiamo il rapporto:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sin \frac{1}{x}, \quad (2.332)$$

che è manifestamente non regolare in $x = 0$. Altrettanto non regolare è il rapporto dei valori assoluti di singolo infinitesimo:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \left| \sin \frac{1}{x} \right| \quad (2.333)$$

Ma

$$0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.334)$$

Ne consegue che $f(x) = (x \sin \frac{1}{x})^{-1}$ è (in $x = 0$) un infinitesimo di ordine non superiore a $g(x) = (x \sin^2 \frac{1}{x})^{-1}$. In fig. 2.106 riportiamo i grafici di tali funzioni in un intorno di $x = 0$.

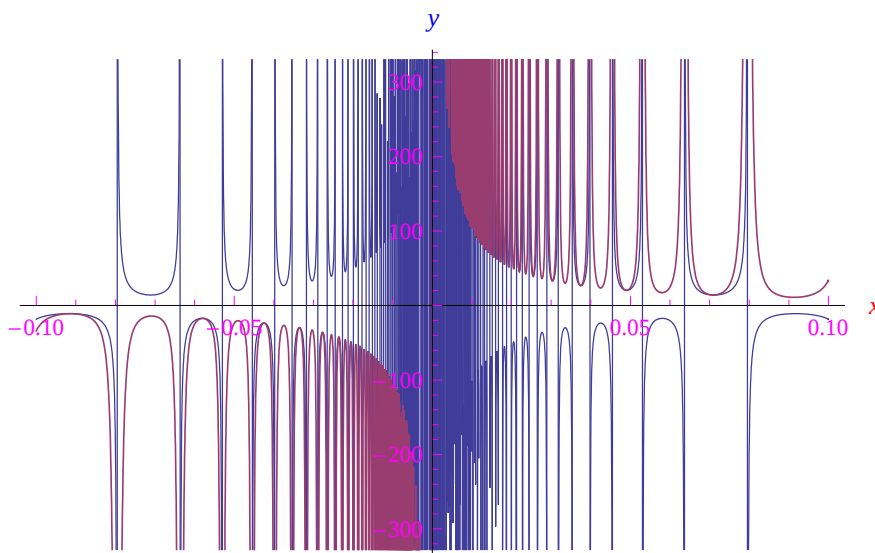


Figura 2.106: Grafico delle funzioni $f(x) = (x \sin \frac{1}{x})^{-1}$ e $g(x) = (x \sin^2 \frac{1}{x})^{-1}$ entrambe infinite per $x \rightarrow 0$. Il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ è limitato tra 0 e 1, per cui $f(x)$ è di ordine non superiore a $g(x)$.

2.14.4 Principio di sostituzione degli infinitesimi [infiniti]

Dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 14 (*Principio di sostituzione degli infinitesimi*)

Ipotesi:

1. Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi (per $x \rightarrow x_0$) che ammettono una decomposizione del tipo

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad g(x) = g_1(x) + g_2(x), \quad (2.335)$$

con $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ tali che $f_2(x)$ è di ordine superiore a $f_1(x)$, e $g_2(x)$ è di ordine superiore a $g_1(x)$.

2. Il rapporto $f(x)/g(x)$ è regolare in x_0 .

Tesi:

Il rapporto $f_1(x)/g_1(x)$ è regolare in x_0 e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad (2.336)$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste il limite (finito o infinito):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (2.337)$$

Segue

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot \frac{1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1 + \frac{g_2(x)}{g_1(x)}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1 + \frac{g_2(x)}{g_1(x)}} \end{aligned} \quad (2.338)$$

Per ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_2(x)}{g_1(x)},$$

onde l'asserto. ■

Da tale teorema segue che nel calcolo del limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)}$$

è lecito trascurare a numeratore e a denominatore gli infinitesimi di ordine superiore.

Per quanto riguarda gli infiniti si dimostra immediatamente il seguente teorema:

Teorema 15 (*Principio di sostituzione degli infiniti*)

Ipotesi:

1. Siano $f(x)$ e $g(x)$ infiniti (per $x \rightarrow x_0$) che ammettono una decomposizione del tipo

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad g(x) = g_1(x) + g_2(x), \quad (2.339)$$

con $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ tali che $f_2(x)$ è di ordine inferiore a $f_1(x)$, e $g_2(x)$ è di ordine inferiore a $g_1(x)$.

2. Il rapporto $f(x)/g(x)$ è regolare in x_0 .

Tesi:

Il rapporto $f_1(x)/g_1(x)$ è regolare in x_0 e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad (2.340)$$

Da tale teorema segue che nel calcolo del limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)}$$

è lecito trascurare a numeratore e a denominatore gli infiniti di ordine inferiore.

Per poter quantificare il concetto di ordine di un infinitesimo (o di un infinito) è necessario definire un infinitesimo (o un infinito) di riferimento. Per fissare le idee, iniziamo con gli infinitesimi. Nella classe $\mathcal{I}(x_0)$ di tutti e soli gli infinitesimi in x_0 , scegliamo ad arbitrio un *infinitesimo di riferimento* (o *infinitesimo campione*) $u(x)$. La scelta più semplice è

$$u(x) = \begin{cases} |x - x_0|, & \text{se } |x_0| < +\infty \\ \frac{1}{|x|}, & \text{se } |x_0| = +\infty \end{cases} \quad (2.341)$$

Osserviamo che comunque prendiamo $\alpha > 0$, riesce:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^\alpha = 0 \quad (2.342)$$

Cioè

$$[u(x)]^\alpha \in \mathcal{I}(x_0), \quad \forall \alpha > 0 \quad (2.343)$$

Inoltre, per ogni $\beta > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[u(x)]^\alpha}{[u(x)]^\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{\alpha - \beta} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha > \beta \\ 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ +\infty, & \text{se } \alpha < \beta \end{cases} \quad (2.344)$$

In altri termini, se $\alpha > \beta$ l'infinitesimo $[u(x)]^\alpha$ è di ordine superiore a $[u(x)]^\beta$, e viceversa se $\alpha < \beta$. Se $\alpha = \beta$ gli infinitesimi $[u(x)]^\alpha$ e $[u(x)]^\beta$ sono equivalenti. Ne consegue:

Definizione 83 Il numero reale $\alpha > 0$ si dice **ordine** dell'infinitesimo $[u(x)]^\alpha$.

Ciò premesso, sussiste la seguente definizione:

Definizione 84

$$\left(\begin{array}{l} f(x) \text{ è un infinitesimo} \\ \text{dotato di ordine} \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \alpha > 0 \mid \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.345)$$

Il numero reale $\alpha > 0$ si dice ordine di $f(x)$ rispetto all'infinitesimo di riferimento $u(x)$.

In maniera del tutto analoga si definisce l'ordine di un infinito $f \in \mathcal{J}(x_0)$. Più precisamente, se $u(x)$ è l'infinitesimo di riferimento nella classe $\mathcal{I}(x_0)$, si assume come infinito di riferimento nella classe $\mathcal{J}(x_0)$, l'infinito:

$$v(x) = \frac{1}{u(x)} = \begin{cases} \frac{1}{|x - x_0|}, & \text{se } |x_0| < +\infty \\ |x|, & \text{se } |x_0| = +\infty \end{cases} \quad (2.346)$$

Naturalmente:

Definizione 85

$$\left(\begin{array}{l} f(x) \text{ è un infinito} \\ \text{dotato di ordine} \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \alpha > 0 \mid \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.347)$$

Il numero reale $\alpha > 0$ si dice ordine di $f(x)$ rispetto all'infinito di riferimento $v(x)$.

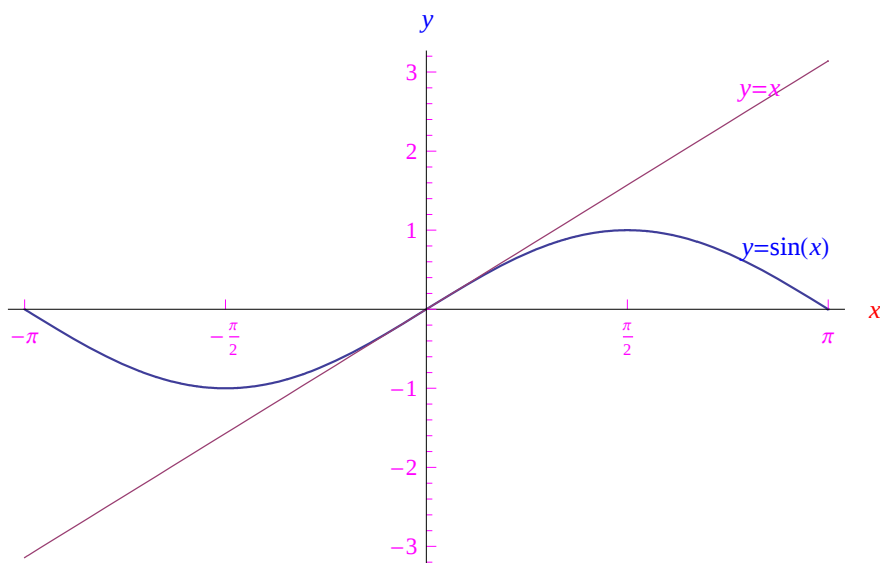


Figura 2.107: In un intorno di $x = 0$ la funzione $f(x) = \sin x$ può essere approssimata dalla funzione lineare $g(x) = x$.

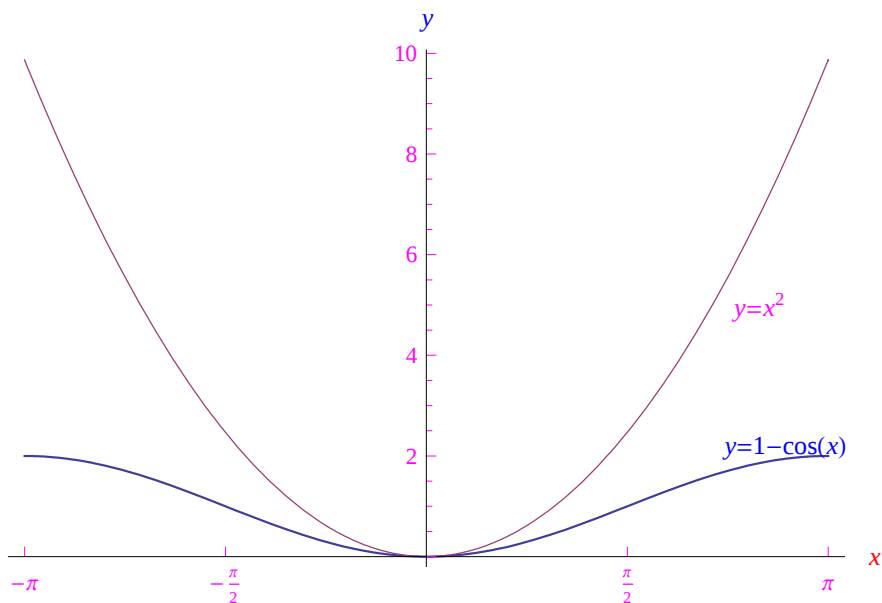


Figura 2.108: In un intorno di $x = 0$ la funzione $f(x) = 1 - \cos x$ può essere approssimata dalla funzione potenza di esponente reale 2 $g(x) = x^2$.

Per quanto visto in precedenza, esempi immediati di infinitesimi confrontabili sono offerti dai limiti fondamentali:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad (2.348)$$

da cui vediamo che per $x \rightarrow 0$, l'infinitesimo $\sin x$ è del primo ordine rispetto all'infinitesimo di riferimento $u(x) = x$, mentre l'infinitesimo $1 - \cos x$ è del secondo ordine. Graficamente ciò equivale a dire che in un intorno di $x = 0$ i diagrammi cartesiani di $\sin x$ e $1 - \cos x$ possono essere approssimati rispettivamente dalla retta $y = x$ e dall'arco di parabola $y = x^2$, come illustrato nelle figg. 2.107

Esercizio 31 Determiniamo i valori del parametro reale λ per i quali la funzione

$$f(x) = \frac{\arctan x - x}{\cos x - \lambda} \quad (2.349)$$

è un infinitesimo (in $x = 0$) del primo ordine rispetto all'infinitesimo di riferimento $u(x) = x$.

Soluzione

Dobbiamo imporre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x(\cos x - \lambda)} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.350)$$

Il limite restituisce la forma indeterminata $0/0$ per cui applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x(\cos x - \lambda)} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{\cos x - \lambda - x \sin x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(1+x^2)(\cos x - \lambda - x \sin x)} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x - \lambda - x \sin x} \end{aligned}$$

Il limite interessante è il secondo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x - \lambda - x \sin x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\cos x - 1}{x^2} - \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{-\frac{1}{2} - 1} = -\frac{2}{3}, & \text{se } \lambda = 1 \\ \frac{0}{1-\lambda} = 0, & \text{se } \lambda \neq 1 \end{cases} \quad (2.351)$$

Conclusione: deve essere $\lambda = 1$.

2.14.5 Infinitesimi ed infiniti non dotati di ordine

Ordine infinitamente grande. Ordine infinitamente piccolo

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto la nozione di infinitesimo [infinito] dotato di ordine. Osserviamo ora che non tutti gli infinitesimi [infiniti] sono dotati di ordine. Ad esempio nel caso degli infinitesimi, assegnata la classe $\mathcal{I}(x_0)$ degli infinitesimi in x_0 e non definitivamente nulli intorno a tale punto, e l'infinitesimo di riferimento:

$$u(x) = \begin{cases} |x - x_0|, & \text{se } |x_0| < +\infty \\ \frac{1}{|x|}, & \text{se } |x_0| = +\infty \end{cases}, \quad (2.352)$$

può accadere

$$\exists f \in \mathcal{I}(x_0) \mid \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0 \quad (2.353)$$

In tale circostanza diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine infinitamente grande** (rispetto a $u(x)$). Si badi che $f(x)$ e $u(x)^\alpha$ sono comunque confrontabili. Pertanto, la confrontabilità è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza dell'ordine di infinitesimo. Se invece:

$$\exists f \in \mathcal{I}(x_0) \mid \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \pm\infty, \quad \forall \alpha > 0, \quad (2.354)$$

diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine infinitamente piccolo** (rispetto a $u(x)$).

Esempio 59 *Assegnata la funzione*

$$f(x) = e^{-x} \quad (2.355)$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \implies f \in \mathcal{I}(+\infty), \quad (2.356)$$

essendo $\mathcal{I}(+\infty)$ la classe degli infinitesimi per $x \rightarrow +\infty$, non identicamente nulli intorno a $x = +\infty$. Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$u(x) = \frac{1}{x}, \quad (2.357)$$

per cui calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \quad (2.358)$$

Applicando ripetutamente la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{e^x} = \dots = \alpha! \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Cioè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{[u(x)]^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0,$$

onde e^{-x} è (per $x \rightarrow +\infty$) un infinitesimo di ordine infinitamente grande.

Esempio 60 *Assegnata la funzione*

$$f(x) = e^{-1/x} \quad (2.359)$$

riesce

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0 \implies f \in \mathcal{I}(0) \quad (2.360)$$

Assumendo come infinitesimo di riferimento

$$u(x) = |x|, \quad (2.361)$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha} = \frac{0}{0} \quad (2.362)$$

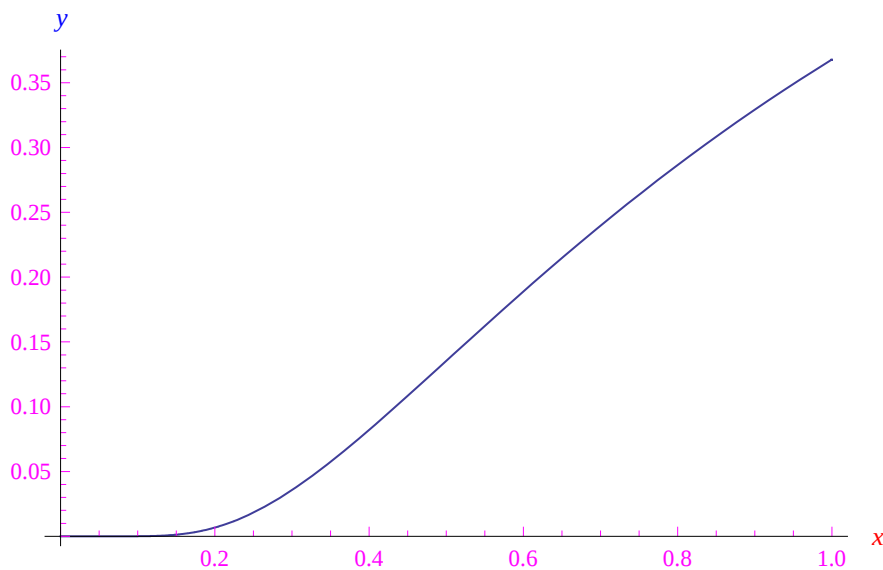


Figura 2.109: Grafico di $f(x) = e^{-1/x}$ in un intorno destro di $x = 0$. Per $x \rightarrow 0^+$ la funzione si annulla più rapidamente di qualsiasi potenza x^α .

Eseguendo il cambio di variabile $t = 1/x$ e tenendo conto del risultato dell'esempio precedente.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\alpha}{e^t} = 0, \quad \forall \alpha > 0$$

Ne concludiamo che la funzione assegnata è un infinitesimo (per $x \rightarrow 0^+$) di ordine infinitamente grande. La funzione è graficata in fig. 2.109.

Esempio 61 Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\ln|x|} \quad (2.363)$$

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln|x|} = \frac{1}{\ln(0^+)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-, \quad (2.364)$$

cosicché f è un infinitesimo in $x = 0$. Per determinare l'eventuale ordine assumiamo come infinitesimo di riferimento la seguente funzione:

$$u(x) = |x| \quad (2.365)$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|^\alpha \ln|x|} \quad (2.366)$$

Dal momento che la funzione è pari, limitiamoci a calcolare il limite destro:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|^\alpha \ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha \ln x} = \frac{1}{0 \cdot \infty} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-\alpha}}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \quad (2.367)$$

Applicando la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-\alpha}}{\ln x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-\alpha)x^{-\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = -\alpha \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha} \stackrel{\alpha > 0}{=} -\infty \quad (2.368)$$

Ne consegue

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = -\infty, \quad \forall \alpha > 0$$

Abbiamo così stabilito che la funzione assegnata è un infinitesimo (in $x = 0$) di ordine infinitamente piccolo. Ciò implica che detta funzione si annulla (per $x \rightarrow 0$) meno rapidamente di ogni potenza $|x|^\alpha$. In fig. 2.110 riportiamo il grafico della funzione in un intorno di $x = 0$.

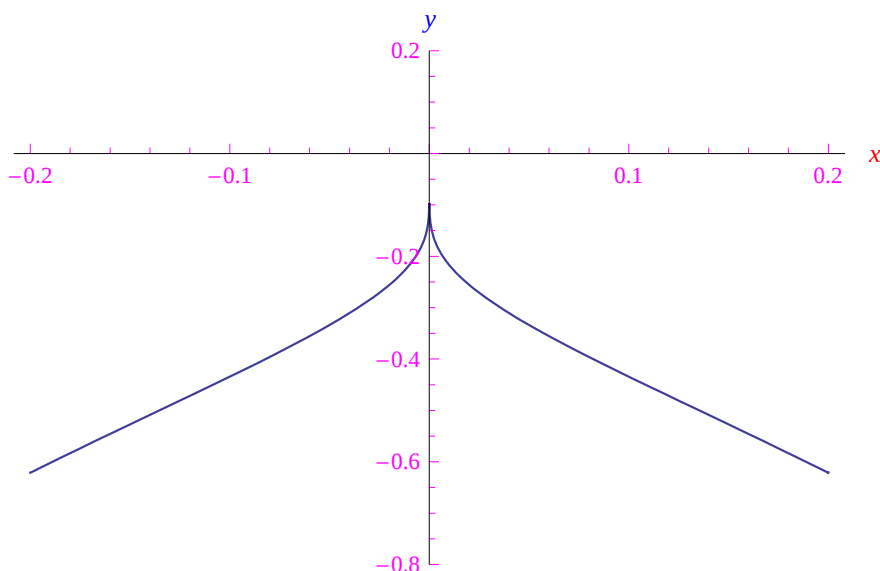


Figura 2.110: Grafico di $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$ in un intorno destro di $x = 0$. Per $x \rightarrow 0$ la funzione si annulla meno rapidamente di qualsiasi potenza x^α .

Definizioni analoghe per quanto riguarda gli infiniti. Precisamente, assegnata la classe $\mathcal{J}(x_0)$ degli infiniti in x_0 e l'infinito di riferimento:

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-x_0|}, & \text{se } |x_0| < +\infty \\ |x|, & \text{se } |x_0| = +\infty \end{cases}, \quad (2.369)$$

può accadere

$$\exists f \in \mathcal{J}(x_0) \mid \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \pm\infty, \quad \forall \alpha > 0 \quad (2.370)$$

In tale circostanza diremo che $f(x)$ è un infinito di **ordine infinitamente grande** (rispetto a $v(x)$). Si badi che $f(x)$ e $v(x)^\alpha$ sono comunque confrontabili. Pertanto, la confrontabilità è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza dell'ordine di infinito. Se invece:

$$\exists f \in \mathcal{J}(x_0) \mid \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad (2.371)$$

diremo che $f(x)$ è un infinito di **ordine infinitamente piccolo** (rispetto a $v(x)$).

Esempio 62 Consideriamo la funzione esponenziale:

$$f(x) = e^x \quad (2.372)$$

Segue:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \implies f \in \mathcal{J}(+\infty), \quad (2.373)$$

essendo $\mathcal{J}(+\infty)$ la classe degli infiniti per $x \rightarrow +\infty$. Assumiamo come infinito di riferimento la funzione:

$$v(x) = x \quad (2.374)$$

Quindi calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{\infty}{\infty} \quad (2.375)$$

Applicando ripetutamente la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \dots = \frac{1}{\alpha!} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (2.376)$$

Cioè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{[v(x)]^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad (2.377)$$

onde e^x è (per $x \rightarrow +\infty$) un infinito di ordine infinitamente grande.

Esempio 63 Consideriamo la funzione logaritmo:

$$f(x) = \ln x \quad (2.378)$$

Segue

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \implies f \in \mathcal{J}(0) \cap \mathcal{J}(+\infty) \quad (2.379)$$

Determiniamo l'eventuale ordine di infinito. Per $x \rightarrow 0^+$ assumiamo come infinito di riferimento la funzione

$$v(x) = \frac{1}{x} \quad (2.380)$$

Quindi calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \quad \forall \alpha > 0 \quad (2.381)$$

Ne consegue che la funzione logaritmo è per $x \rightarrow 0^+$ un infinito di ordine infinitamente piccolo. Per $x \rightarrow +\infty$ assumiamo come infinito di riferimento la seguente funzione:

$$w(x) = x \quad (2.382)$$

Quindi calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{[w(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0 \quad (2.383)$$

Da ciò segue che la funzione logaritmo è per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow +\infty$ un infinito di ordine infinitamente piccolo. Ciò è simboleggiato in fig. 2.111.

Osservazione 32 Gli esempi 59 e 62 si generalizzano nel modo seguente: assegnato $\lambda > 0$, le funzioni

$$e^{\lambda x}, \quad e^{-\lambda x} \quad (2.384)$$

sono per $x \rightarrow +\infty$, rispettivamente un infinito di ordine infinitamente grande e un infinitesimo di ordine infinitamente grande.

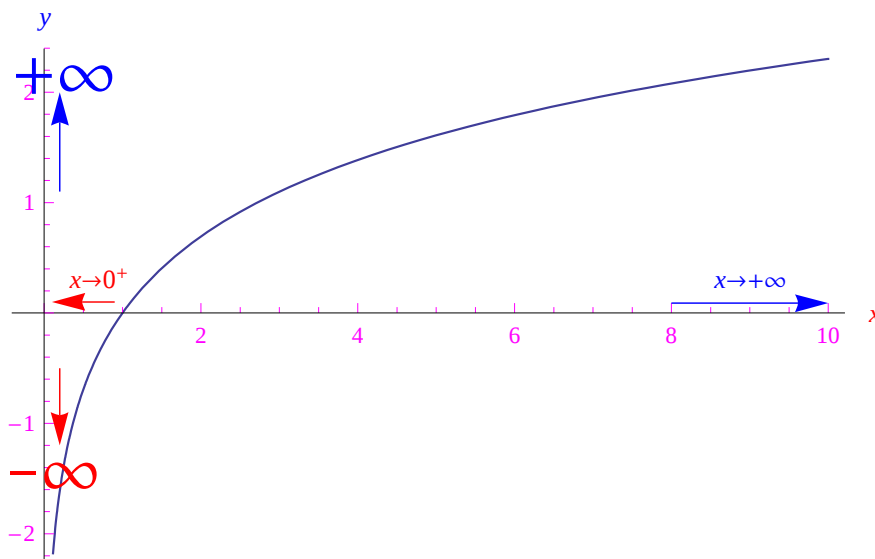


Figura 2.111: Per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow +\infty$, la funzione $\log x$ è un infinito di ordine infinitamente piccolo.

Ordine indeterminato

Sussiste la seguente definizione

Definizione 86 Se $u(x) \in \mathcal{I}(x_0)$ è l'infinitesimo di riferimento, diremo che $f \in \mathcal{I}(x_0)$ **non ha un ordine determinato**, se il rapporto $\frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha}$ è regolare per ogni $\alpha > 0$, riuscendo convergente per alcuni valori di α , divergente per i rimanenti.

Esempio 64 Consideriamo la funzione

$$f(x) = x \ln x \quad (2.385)$$

Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0,$$

onde $f(x)$ è un infinitesimo in $x = 0$. Dal momento che $x \rightarrow 0^+$, assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$u(x) = x \quad (2.386)$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} \quad (2.387)$$

Distinguiamo i casi:

1. $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-(1-\alpha)}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-(1-\alpha)x^{-2+\alpha}} \\ &= -\frac{1}{1-\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = -\frac{1}{1-\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} = 0, \end{aligned}$$

onde $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore ad α per ogni $0 < \alpha < 1$.

2. $\alpha \geq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} \frac{-\infty}{0^+} = -\infty, & \text{se } \alpha > 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.388)$$

Cioè $f(x)$ è un infinito di ordine inferiore a 1.

Ne consegue che $x \ln x$ è un infinitesimo (in $x = 0$) di ordine inferiore a 1, ma maggiore di un qualunque $0 < \alpha < 1$.

Studiamo ora il comportamento per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty, \quad (2.389)$$

onde $x \ln x$ è un infinito per $x \rightarrow +\infty$. Determiniamone l'ordine, assumendo come infinito di riferimento la funzione

$$v(x) = x \quad (2.390)$$

Ciò implica il calcolo del limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} \quad (2.391)$$

Distinguiamo i casi:

1. $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{-(1-\alpha)}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty \quad (2.392)$$

2. $\alpha = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad (2.393)$$

3. $\alpha > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0 \quad (2.394)$$

Ne consegue che $x \ln x$ è un infinito (per $x \rightarrow +\infty$) di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$. In fig. 2.112 riportiamo il grafico della funzione.

Scala di infiniti di ordine indeterminato

In questo numero introduciamo la nozione di *scala di infiniti* [1].

Per quanto precede, per $x \rightarrow +\infty$ la funzione $x \ln x$ è un infinito di ordine indeterminato. Precisamente, è un infinito di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$. Consideriamo ora la seguente funzione

$$f(x) = x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \quad (2.395)$$

Risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x = +\infty \quad (2.396)$$

Al solito, determiniamo l'ordine di infinito assumendo come infinito di riferimento la funzione $v(x) = x$. Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln \ln x}{x^{\alpha-1}} \quad (2.397)$$

Per calcolare tale limite distinguiamo i casi:

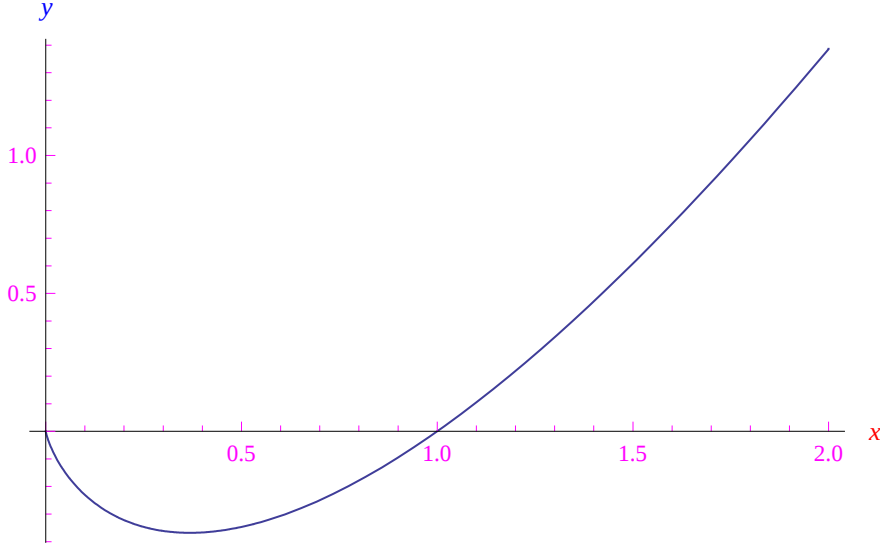


Figura 2.112: Per $x \rightarrow 0^+$ la funzione $x \ln x$ è un infinitesimo di ordine inferiore a 1, ma maggiore di un qualunque $0 < \alpha < 1$. Per $x \rightarrow +\infty$ è un infinito di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$.

1. $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln \ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln \ln x}{x^{-(1-\alpha)}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty \quad (2.398)$$

2. $\alpha = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln \ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \cdot \ln \ln x = +\infty \quad (2.399)$$

3. $\alpha > 1$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = \ln x$, per cui

$$x = e^t \implies x^{\alpha-1} = e^{\lambda t}, \quad (\lambda = \alpha - 1 > 0) \quad (2.400)$$

Segue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln \ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \ln t}{e^{\lambda t}} = 0, \quad (2.401)$$

giacché $e^{\lambda t}$ è un infinito di ordine infinitamente grande.

Ne consegue che $x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x$ è un infinito (per $x \rightarrow +\infty$) di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$. È istruttivo confrontare gli infiniti

$$x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x, \quad x \cdot \ln x \quad (2.402)$$

Risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x}{x \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \ln x = +\infty, \quad (2.403)$$

cosicché $x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x$ è di ordine superiore a $x \cdot \ln x$.

Lo step successivo consiste nel “costruire” l’infinito:

$$x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x, \quad (2.404)$$

giungendo ai medesimi risultati precedente. Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \ln \ln x = +\infty, \quad (2.405)$$

onde

$$x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x \quad (2.406)$$

è di ordine superiore a

$$x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \quad (2.407)$$

L'iterazione del procedimento restituisce la seguente *scala di infiniti di ordine indeterminato*:

$$\{x \cdot \ln x, x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x, x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x, \dots\} \quad (2.408)$$

Tale insieme è infinito numerabile e ogni suo elemento è un infinito di ordine superiore al precedente.

Scala di infinitesimi di ordine indeterminato

In questo numero introduciamo la nozione di *scala di infinitesimi* [1]. Premettiamo il teorema:

Teorema 16

$$\left(\begin{array}{l} f(x) \text{ è un infinitesimo (in } x_0) \\ \text{di ordine } \alpha \text{ rispetto a } u(x) \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} \frac{1}{f(x)} \text{ è un infinito di ordine } \alpha \\ \text{rispetto a } \frac{1}{u(x)} \end{array} \right) \quad (2.409)$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{[u(x)]^\alpha}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha}} = \frac{1}{\ell} \in \mathbb{R} - \{0\},$$

onde l'asserto. ■

Consideriamo ora l'insieme i cui elementi sono le funzioni reciproche delle funzioni appartenenti alla scala di infiniti (2.408):

$$\left\{ \frac{1}{x \cdot \ln x}, \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x}, \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x}, \dots \right\} \quad (2.410)$$

Per il teorema appena dimostrato si ha che ogni elemento di (2.410) è un infinitesimo (per $x \rightarrow +\infty$) di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$. Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x}}{\frac{1}{x \cdot \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln \ln x} = 0,$$

che si generalizza a ogni coppia di elementi successivi di (2.410). Ne consegue che ogni infinitesimo del predetto insieme è di ordine superiore al precedente. Chiamiamo tale insieme *scala di infinitesimi di ordine indeterminato*.

2.14.6 Parte principale di un infinitesimo

Siano dati gli infinitesimi (in x_0) $f(x)$ e $g(x)$ non identicamente nulli intorno a tale punto. Se $f(x)$ è di ordine α rispetto a $g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.411)$$

In tale ipotesi poniamo

$$\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} - \ell \quad (2.412)$$

Riesce

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} - \lim_{x \rightarrow x_0} \ell = \ell - \ell = 0, \quad (2.413)$$

cosicché $\varepsilon(x)$ è un infinitesimo (in x_0). Da ciò segue che la funzione

$$r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon(x) [g(x)]^\alpha \quad (2.414)$$

è un infinitesimo di ordine maggiore di α rispetto a $g(x)$. Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{[g(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0 \quad (2.415)$$

Tenendo conto della (2.412):

$$r(x) = f(x) - \ell [g(x)]^\alpha, \quad (2.416)$$

da cui

$$f(x) = \ell [g(x)]^\alpha + r(x) \quad (2.417)$$

Abbiamo così ricavato la *formula di decomposizione* di un infinitesimo. Sussiste la definizione

$$\ell [g(x)]^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c} \text{parte principale dell'infinitesimo } f(x) \\ \text{rispetto a } g(x) \end{array} \right) \quad (2.418)$$

In particolare se $g(x)$ è l'infinitesimo di riferimento $u(x)$, la formula di decomposizione diventa:

$$f(x) = \ell [u(x)]^\alpha + r(x) \quad (2.419)$$

Proposizione 53 *La parte principale di un infinitesimo di ordine α è a sua volta un infinitesimo di ordine α .*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di parte principale. ■

Ne consegue che un qualunque infinitesimo di ordine α si decompone nella somma di una parte principale (di ordine α) e di un termine di ordine maggiore di α . In un intorno “sufficientemente piccolo” di x_0 è lecito trascurare il termine di ordine superiore $r(x)$. Cioè

$$f(x) \simeq \ell [u(x)]^\alpha, \quad x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad (2.420)$$

essendo X l'insieme di definizione della funzione $f(x)$. Se $f(x)$ e $u(x)$ sono equivalenti, ovvero se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{u(x)} = 1 \implies \alpha = 1, \ell = 1, \quad (2.421)$$

la formula di decomposizione si scrive:

$$f(x) = u(x) + r(x),$$

onde

$$f(x) \simeq u(x), \quad x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (2.422)$$

In tal caso è consuetudine (specie nelle applicazioni) asserire che in un intorno di x_0 la funzione $f(x)$ “va come” $u(x)$.

Esempio 65 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^2 + x}{2} \right), \quad (2.423)$$

il cui insieme di definizione è

$$X = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \quad (2.424)$$

Riesce

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(\frac{x^2 + x}{2} \right) = \ln 1 = 0, \quad (2.425)$$

onde $f(x)$ è un infinitesimo in $x = 1$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x) = x - 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \left(\frac{x^2 + x}{2} \right)}{(x - 1)^\alpha} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2x}{(x^2 + x)(x - 1)^{\alpha-1}}$$

Segue

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2x}{(x^2 + x)(x - 1)^{\alpha-1}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha - 1 = 0$$

Cioè $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 1. Abbiamo poi:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2x}{(x^2 + x)(x - 1)^{\alpha-1}} \stackrel{\alpha=1}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2x}{(x^2 + x)} = \frac{3}{2},$$

cosicché gli infinitesimi $f(x)$ e $u(x)$ non sono equivalenti. L'infinitesimo assegnato si decompone in

$$\ln \left(\frac{x^2 + x}{2} \right) = \frac{3}{2}(x - 1) + r(x),$$

dove $r(x)$ è un termine di ordine superiore. Inoltre:

$$\ln \left(\frac{x^2 + x}{2} \right) \simeq \frac{3}{2}(x - 1), \quad x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$$

Geometricamente significa che in un intorno del punto del diagramma cartesiano di $f(x)$, di ascissa

$$x \in (1 - \delta, 1 + \delta),$$

il diagramma medesimo può essere approssimato dalla retta di equazione $y = \frac{3}{2}(x - 1)$, come illustrato in fig. 2.113.

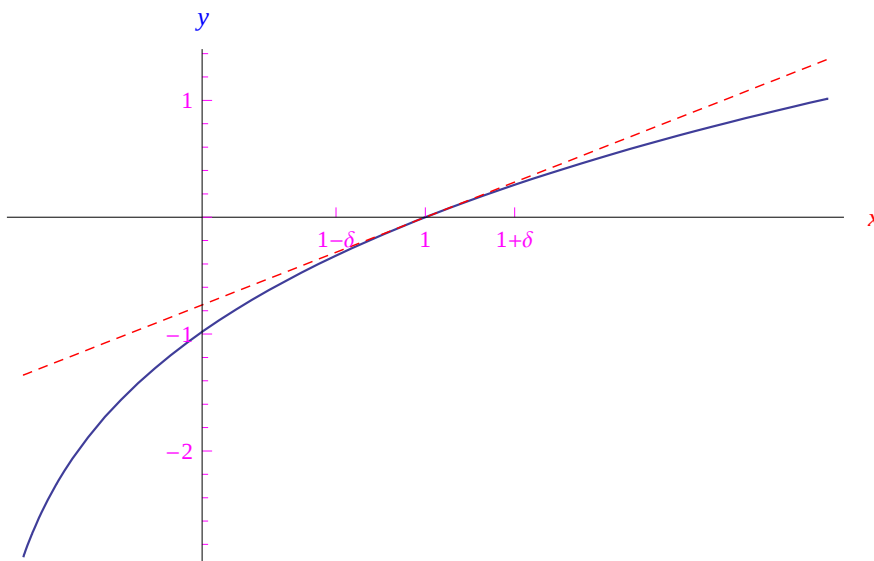


Figura 2.113: Per $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ il diagramma cartesiano di $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+x}{2}\right)$ può essere approssimato dalla retta $y = \frac{3}{2}(x - 1)$.

Esempio 66 Consideriamo la funzione

$$f(x) = x \sin x \quad (2.426)$$

Riesce

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = 0, \quad (2.427)$$

onde $f(x)$ è un infinitesimo in $x = 0$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x) = x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^{\alpha-1}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha - 1 = 1 \iff \alpha = 2 \quad (2.428)$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo del second'ordine. Risulta:

$$\alpha = 2 \implies \ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (2.429)$$

per cui la parte principale è

$$\ell [u(x)]^\alpha = x^2 \quad (2.430)$$

Pertanto l'infinitesimo assegnato si decompone in

$$x \sin x = x^2 + r(x), \quad (2.431)$$

ove $r(x)$ è un infinitesimo di ordine maggiore di 2. La predetta decomposizione ha un'immediata interpretazione geometrica: in un intorno dell'origine il diagramma cartesiano della funzione è approssimato dalla parabola $y = x^2$, come illustrato in fig. 2.114

Esempio 67 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \cos^2 x + x^2 - 1 \quad (2.432)$$

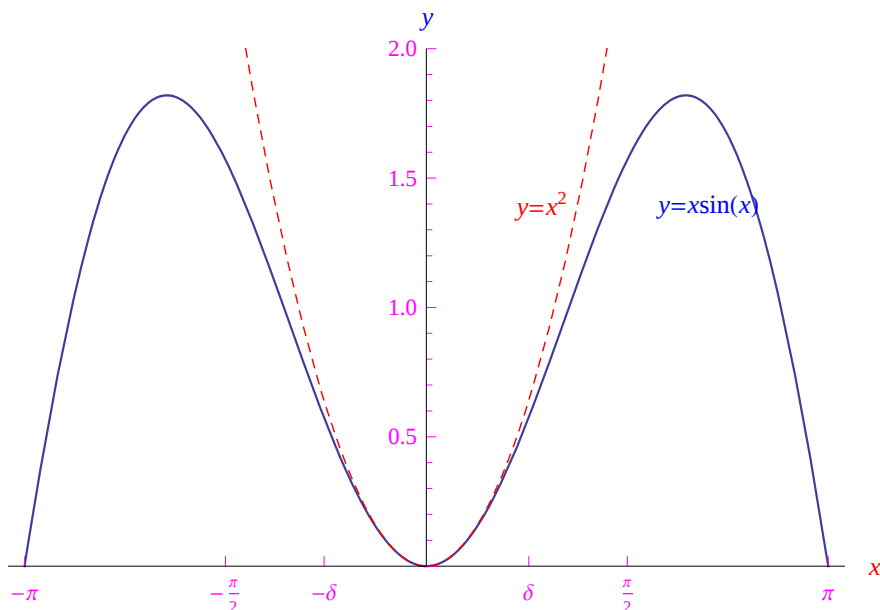


Figura 2.114: Per $x \in (-\delta, \delta)$ il diagramma cartesiano di $f(x) = x \sin x$ può essere approssimato dalla parabola $y = x^2$.

Riesce

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x + x^2 - 1) = 0, \quad (2.433)$$

onde $f(x)$ è un infinitesimo in $x = 0$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x) = x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + x^2 - 1}{x^{\alpha-1}} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 2x + 2x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos 2x + 2}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} \\ &= \frac{2}{\alpha(\alpha-1)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^{\alpha-2}} \end{aligned} \quad (2.434)$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = 2x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \frac{2^{\alpha-1}}{\alpha(\alpha-1)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha-2}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha - 2 = 2 \iff \alpha = 4$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo del quart'ordine. Risulta:

$$\alpha = 4 \implies \ell = \frac{2^3}{4 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \quad (2.435)$$

per cui la parte principale è

$$\ell [u(x)]^\alpha = \frac{1}{3} x^4 \quad (2.436)$$

Pertanto l'infinitesimo assegnato si decompone in

$$\cos^2 x + x^2 - 1 = \frac{1}{3} x^4 + r(x), \quad (2.437)$$

ove $r(x)$ è un infinitesimo di ordine maggiore di 4. La predetta decomposizione ha un'immediata interpretazione geometrica: in un intorno dell'origine il diagramma cartesiano della funzione è approssimato dalla curva $y = \frac{1}{3} x^4$, come illustrato in fig. 2.115

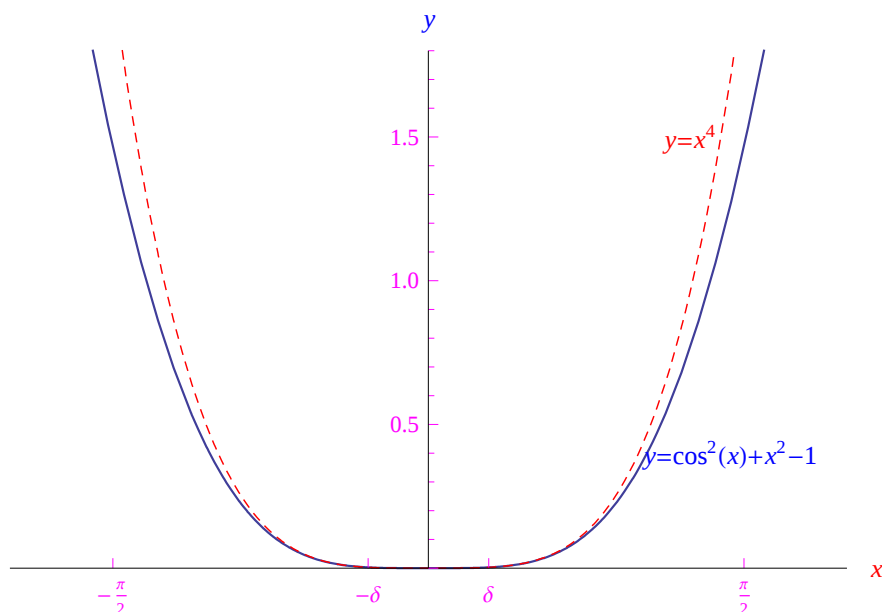


Figura 2.115: Per $x \in (-\delta, \delta)$ il diagramma cartesiano di $f(x) = x \sin x$ può essere approssimato dalla curva $y = x^4$.

2.14.7 Parte principale di un infinito

Siano dati gli infiniti (in x_0) $f(x)$ e $g(x)$. Se $f(x)$ è di ordine α rispetto a $g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.438)$$

In tale ipotesi poniamo

$$\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} - \ell \quad (2.439)$$

Riesce

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0, \quad (2.440)$$

cosicché $\varepsilon(x)$ è un infinitesimo (in x_0). Definiamo

$$r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon(x) [g(x)]^\alpha \quad (2.441)$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0 \cdot \infty \quad (2.442)$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = +\infty \quad (2.443)$$

segue che $r(x)$ è un infinito di ordine minore di α (rispetto a $g(x)$). Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{[g(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Tenendo conto della (2.439):

$$r(x) = f(x) - \ell [g(x)]^\alpha, \quad (2.444)$$

da cui

$$f(x) = \ell [g(x)]^\alpha + r(x) \quad (2.445)$$

Abbiamo così ricavato la *formula di decomposizione* di un infinito. Sussiste la definizione

$$\ell [g(x)]^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c} \text{parte principale dell'infinito } f(x) \\ \text{rispetto a } g(x) \end{array} \right) \quad (2.446)$$

In particolare se $g(x)$ è l'infinito di riferimento $v(x)$, la formula di decomposizione diventa:

$$f(x) = \ell [v(x)]^\alpha + r(x) \quad (2.447)$$

Proposizione 54 *La parte principale di un infinito di ordine α è a sua volta un infinito di ordine α .*

Dimostrazione. Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ell [v(x)]^\alpha}{[v(x)]^\alpha} = \ell \quad (2.448)$$

Per la (2.438):

$$\ell \in \mathbb{R} - \{0\},$$

onde l'asserto. ■

Ne consegue che un qualunque infinito di ordine α si decompone nella somma di una parte principale (di ordine α) e di un termine $r(x)$ che se è un infinito, è di ordine maggiore di α . Se $f(x)$ e $v(x)$ sono equivalenti, ovvero se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{v(x)} = 1 \implies \alpha = 1, \ell = 1, \quad (2.449)$$

la formula di decomposizione si scrive:

$$f(x) = v(x) + r(x) \quad (2.450)$$

Esempio 68 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (2.451)$$

Riesce

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = +\infty, \quad (2.452)$$

onde $f(x)$ è un infinito in $x = 0$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinito di riferimento la funzione $v(x) = 1/|x|$. Sfruttando la parità (+1) di $f(x)$ e $v(x)$ riferiamoci al limite destro:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-2} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = 2 \quad (2.453)$$

Cioè $f(x)$ è un infinito del second'ordine. Risulta:

$$\alpha = 2 \implies \ell = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1, \quad (2.454)$$

per cui la parte principale è

$$\ell [v(x)]^\alpha = \frac{1}{x^2}, \quad (2.455)$$

cosicchè la parte principale di $f(x)$ è la funzione medesima. Ciò implica che il termine $r(x)$ è la funzione identicamente nulla, come illustrato in fig. 2.116.

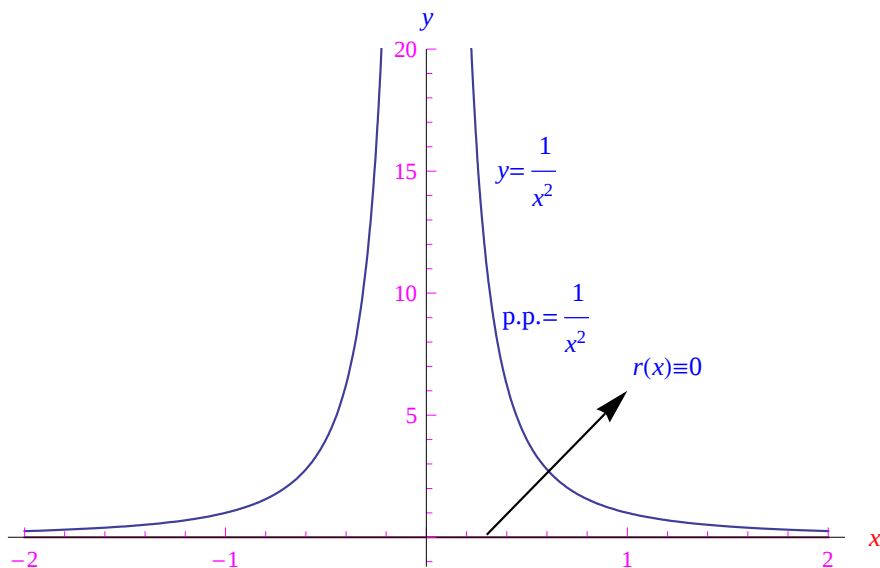


Figura 2.116: La parte principale dell'infinito $f(x) = 1/x^2$ è la funzione medesima.

Esempio 69 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \tan x \quad (2.456)$$

Riesce

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \quad (2.457)$$

onde $f(x)$ è un infinito per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinito di riferimento la funzione $v(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$. Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}{\cot x} \quad (2.458)$$

Anziché applicare la regola di De L'Hospital, eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \frac{\pi}{2} - x \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 0^+,$$

cosicché

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}{\cot x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^\alpha}{\tan t} \quad (2.459)$$

Studiamone il comportamento al variare di α :

$$\alpha = 1 \implies \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^\alpha}{\tan t} = 1 \quad (2.460)$$

$$\alpha > 1 \implies \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^\alpha}{\tan t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(t^{\alpha-1} \frac{t}{\tan t} \right) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$0 < \alpha < 1 \implies \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^\alpha}{\tan t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(t^{\alpha-1} \frac{t}{\tan t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t^{1-\alpha}} \frac{t}{\tan t} \right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

Ne consegue che deve essere $\alpha = 1$ i.e. la funzione assegnata è un infinito del primo ordine, riuscendo:

$$\alpha = 1 \implies \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = 1, \quad (2.461)$$

onde $f(x)$ e $u(x)$ sono infiniti equivalenti. La parte principale di $f(x)$ è

$$\ell[v(x)]^\alpha = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}, \quad (2.462)$$

per cui la decomposizione si scrive

$$\tan x = \underbrace{\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}}_{p.p.} + \underbrace{\left(\tan x - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}\right)}_{=r(x)} \quad (2.463)$$

Segue

$$\tan x \simeq \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.464)$$

L'andamento dei vari termini della decomposizione è illustrato in fig. 2.117.

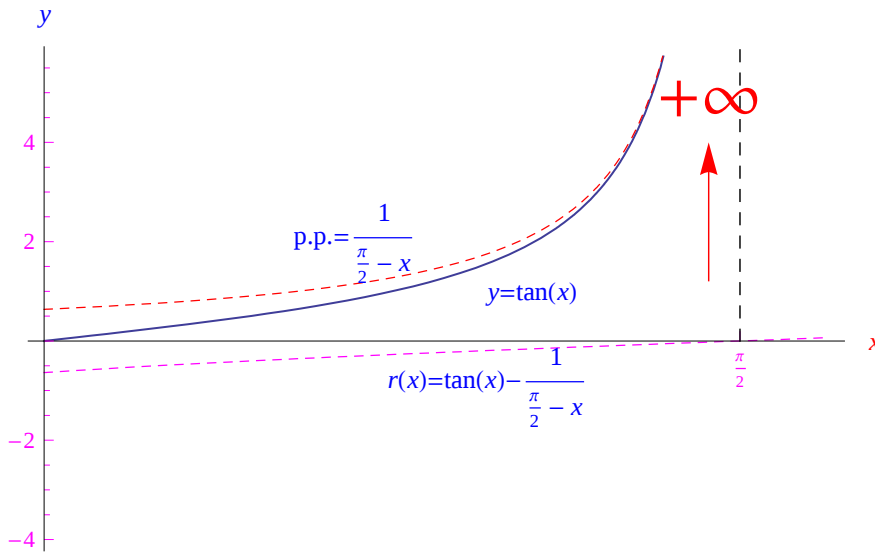


Figura 2.117: In un intorno sinistro di $x = \frac{\pi}{2}$ la funzione $f(x) = \tan x$ è approssimata dalla sua parte principale $\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$.

Esempio 70 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \quad (2.465)$$

Riesce

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (2.466)$$

onde $f(x)$ è un infinito per $x \rightarrow +\infty$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinito di riferimento la funzione $v(x) = x$. Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \frac{1}{0 \cdot \infty} \quad (2.467)$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{\pi}{2} - \arctan x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+, \quad (2.468)$$

da cui

$$x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cot t, \quad (2.469)$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\tan t)^\alpha}{t^{1/2}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = \frac{1}{2} \quad (2.470)$$

Ciò implica che $f(x)$ è un infinito di ordine $1/2$. Inoltre

$$\alpha = \frac{1}{2} \implies \ell = 1 \quad (2.471)$$

Quindi la parte principale è

$$\ell [v(x)]^\alpha = \sqrt{x} \quad (2.472)$$

Segue

$$r(x) = f(x) - \ell [v(x)]^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} - \sqrt{x}, \quad (2.473)$$

che è un infinito di ordine minore di $1/2$. Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}} - 1 \right) = 0 \quad (2.474)$$

La formula di decomposizione si scrive:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \underbrace{\sqrt{x}}_{p.p.} + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} - \sqrt{x} \right)}_{r(x)} \quad (2.475)$$

Quindi

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \simeq \sqrt{x}, \quad x \in (\delta, +\infty) \quad (2.476)$$

In altri termini, per $x \gg 1$ la funzione va come $\sqrt{x}$. Ciò è illustrato in fig. 2.118.

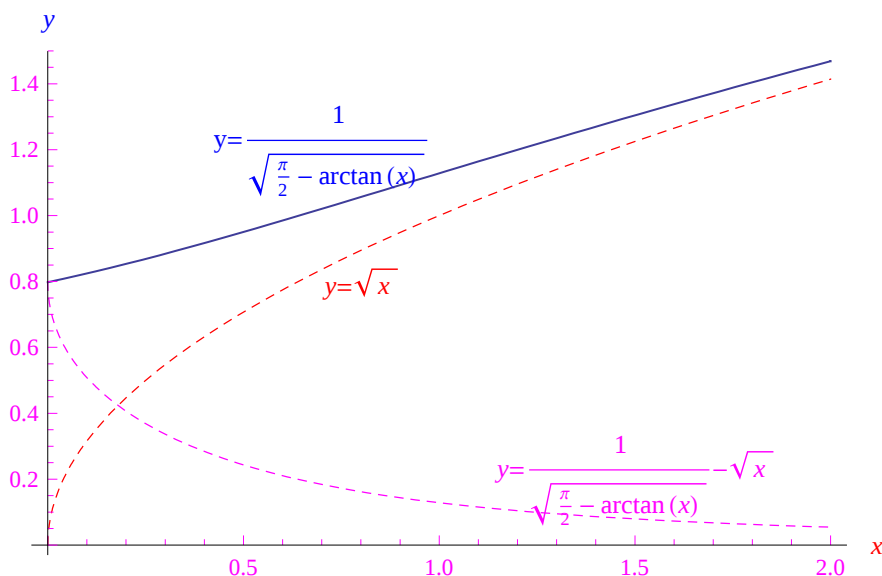


Figura 2.118: Decomposizione dell'infinito $\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}}$ per $x \rightarrow +\infty$.

2.14.8 Proprietà e teoremi

Proposizione 55 Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infinitesimi equivalenti (per $x \rightarrow x_0$).

Se $f_k(x)$ ($k = 1, 2$) è dotato di parte principale rispetto a $g(x)$, si ha che $f_{h \neq k}(x)$ è dotato di parte principale (rispetto a $g(x)$) e le due parti principali coincidono.

Dimostrazione. Sia

$$f_1(x) = \ell_1 [g(x)]^{\alpha_1} + r_1(x), \quad (2.477)$$

cosicché

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} = \ell_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.478)$$

Per ipotesi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono equivalenti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1 \quad (2.479)$$

Segue

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} \right\} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} = \ell_1 \quad (2.480)$$

Pertanto

$$f_2(x) = \ell_1 [g(x)]^{\alpha_1} + r_2(x), \quad (2.481)$$

onde l'asserto. ■

Esempio 71 Consideriamo gli infinitesimi in $x = 0$:

$$f_1(x) = 2(1 - \cos x), \quad f_2(x) = x^2 \quad (2.482)$$

Tenendo conto del limite fondamentale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

segue immediatamente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1, \quad (2.483)$$

onde l'equivalenza degli infinitesimi assegnati. Determiniamo la parte principale di $f_1(x)$ rispetto all'infinitesimo $g(x) = \sin x$. Innanzitutto calcoliamone l'ordine:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(\sin x)^{\alpha_1}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{(\sin x)^{\alpha_1}} \right] \\ &= 2 \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}}_{=1/2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^{2/\alpha_1}}{\sin x} \right)^{\alpha_1} \\ &= \ell_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha_1 = 2, \end{aligned}$$

cosicché $f_1(x)$ è del second'ordine rispetto a $g(x)$, ed ammette la seguente decomposizione:

$$2(1 - \cos x) = \sin^2 x + r_1(x), \quad (2.484)$$

per cui

$$2(1 - \cos x) \simeq \sin^2 x, \quad x \in (-\delta, \delta) \quad (2.485)$$

Per la proposizione precedente:

$$x^2 = \sin^2 x + r_2(x) \quad (2.486)$$

Cioè

$$x^2 \simeq \sin^2 x \iff \sin^2 x \simeq x^2, \quad x \in (-\delta, \delta) \quad (2.487)$$

I vari andamenti sono illustrati in fig. 2.119.

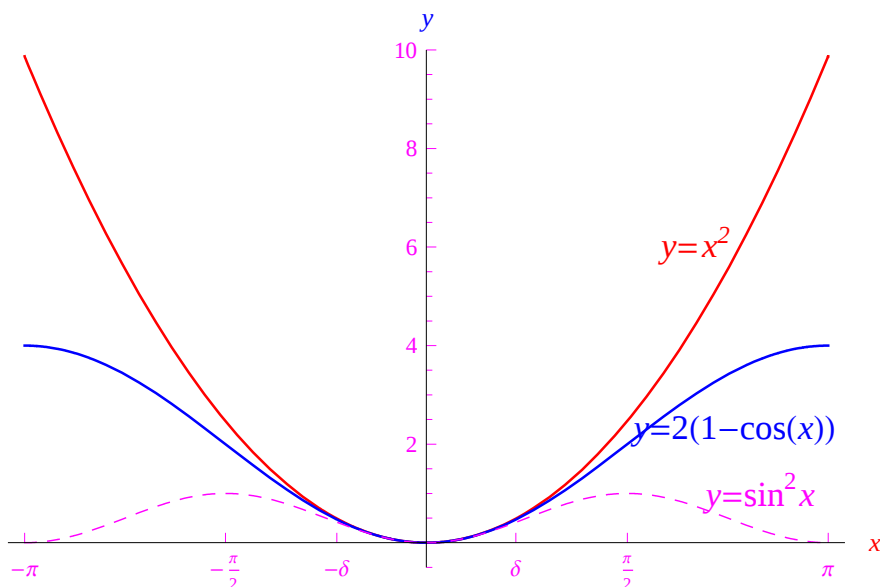


Figura 2.119: Le funzioni $f_1(x) = 2(1 - \cos x)$ e $f_2(x) = x^2$ sono infinitesimi equivalenti per $x \rightarrow 0$. Pertanto hanno la stessa parte principale rispetto all'infinitesimo $g(x) = \sin x$. Geometricamente significa che i rispettivi grafici tendono a sovrapporsi in un intorno di $x = 0$.

Per gli infiniti si dimostra una proposizione analoga:

Proposizione 56 Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti equivalenti (per $x \rightarrow x_0$).

Se $f_k(x)$ ($k = 1, 2$) è dotato di parte principale rispetto a $g(x)$, si ha che $f_{h \neq k}(x)$ è dotato di parte principale (rispetto a $g(x)$) e le due parti principali coincidono.

Esempio 72 Consideriamo gli infiniti per $x \rightarrow +\infty$

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{x} \quad (2.488)$$

Per quanto visto nell'esempio 70:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1,$$

onde l'equivalenza degli infiniti assegnati. Determiniamo la parte principale di $f_1(x)$ rispetto all'infinito

$$g(x) = x + \sin \frac{1}{x}$$

Innanzitutto calcoliamone l'ordine:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x + \sin \frac{1}{x})^{\alpha_1} \sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \ell_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha_1 = \frac{1}{2},$$

cosicché $f_1(x)$ è di ordine $1/2$ rispetto a $g(x)$, riuscendo

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \implies \ell_1 = 1 \quad (2.489)$$

Abbiamo pertanto la decomposizione:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \sqrt{x + \sin \frac{1}{x}} + r_1(x), \quad (2.490)$$

con

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} r_1(x) = 0 \quad (2.491)$$

Ciò implica

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \simeq \sqrt{x + \sin \frac{1}{x}}, \quad x \in (\delta, +\infty) \quad (2.492)$$

Per la proposizione precedente:

$$\sqrt{x} = \sqrt{x + \sin \frac{1}{x}} + r_2(x), \quad (2.493)$$

con

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} r_2(x) = 0 \quad (2.494)$$

Cioè

$$\sqrt{x} \simeq \sqrt{x + \sin \frac{1}{x}}, \quad x \in (\delta, +\infty) \quad (2.495)$$

I vari andamenti sono illustrati in fig. 2.120.

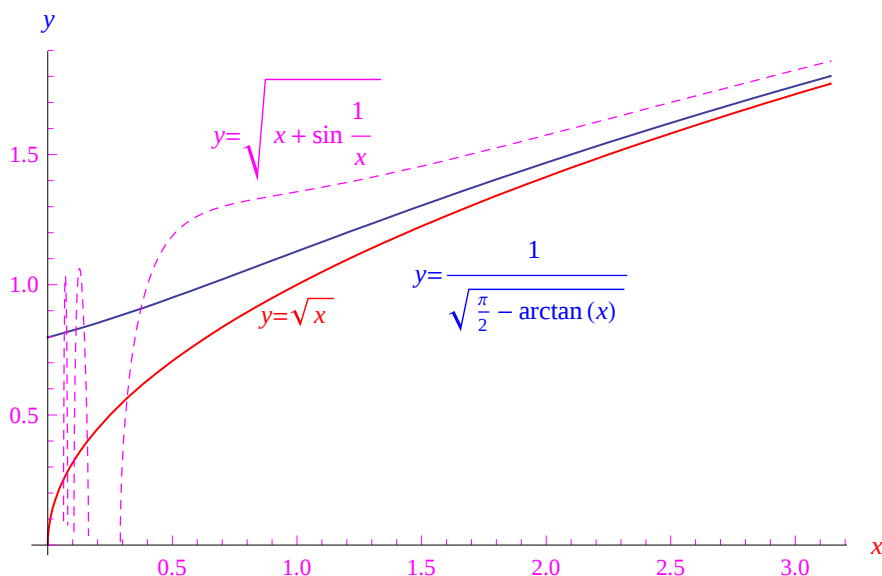


Figura 2.120: Le funzioni $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}}$ e $f_2(x) = \sqrt{x}$ sono infiniti equivalenti per $x \rightarrow +\infty$. Pertanto hanno la stessa parte principale rispetto all'infinito $g(x) = \sqrt{x + \sin \frac{1}{x}}$. Geometricamente significa che i rispettivi grafici tendono a sovrapporsi in un intorno di $+\infty$.

Proposizione 57 Siano dati $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ infinitesimi (in x_0) di ordine differente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ rispetto a un infinitesimo di riferimento $u(x)$. La funzione

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad (2.496)$$

è un infinitesimo (in x_0) di ordine

$$\alpha = \min \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \quad (2.497)$$

Dimostrazione. La prima parte della proposizione è una conseguenza del teorema sul limite della somma di funzioni:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)}_{=0} = 0, \quad (2.498)$$

per cui $f(x)$ è un infinitesimo in x_0 . Per dimostrare la seconda parte poniamo

$$\min \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \alpha_h, \quad h \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Segue

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sum_{k=1}^n f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}} = \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}} \quad (2.499)$$

Ma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}} = \begin{cases} \ell_h \in \mathbb{R} - \{0\}, & \text{se } k = h \\ 0, & \text{se } k \neq h \end{cases}, \quad (2.500)$$

giacché $f_{k \neq h}(x)$ è di ordine maggiore di α_h . L'equazione precedente può essere inglobata nella delta di Kronecker:

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = h \\ 0, & \text{se } k \neq h \end{cases}, \quad (2.501)$$

ottenendo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}} = \ell_k \delta_{hk} \quad (2.502)$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}} = \sum_{k=1}^n \ell_k \delta_{hk} = \ell_h \in \mathbb{R} - \{0\},$$

onde l'asserto. ■

Esempio 73 Siano

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \tan^2 x$$

Come è noto, si tratta di infinitesimi di ordine $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 2$ rispettivamente. Per la proposizione appena dimostrata si ha che

$$f(x) = \sin x + \tan^2 x$$

è un infinitesimo di ordine $\alpha = 1$. La fig. 2.121 riporta i vari andamenti.

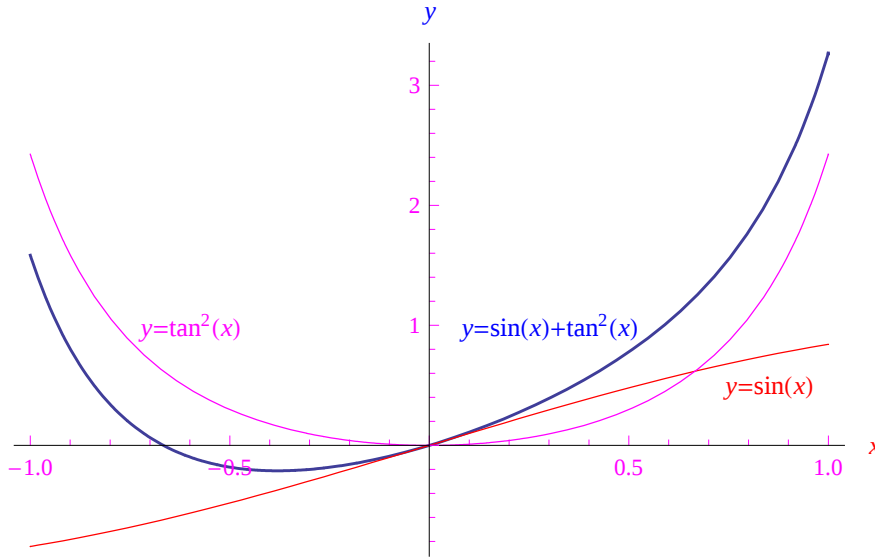


Figura 2.121: Le funzioni $f_1(x) = \sin x$ e $f_2(x) = \tan^2 x$ sono infinitesimi in $x = 0$, di ordine rispettivamente 1 e 2. Pertanto la somma $f_1(x) + f_2(x)$ è un infinitesimo di ordine 1.

Si badi che l'ipotesi del teorema precedente richiede

$$\alpha_k = \alpha_{k'}, \quad \forall k, k' \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad k \neq k' \quad (2.503)$$

In altri termini gli infinitesimi $f_1(x), \dots, f_n(x)$ hanno tutti ordine diverso. Ciò implica il seguente corollario:

Corollario 2 *La somma di n infinitesimi dello stesso ordine α è un infinitesimo di ordine non minore di α .*

Dimostrazione. Siano $f_1(x), \dots, f_n(x)$ infinitesimi in x_0 , per cui:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^\alpha} = \ell_k \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad (k = 1, \dots, n), \quad (2.504)$$

dove $u(x)$ è l'infinitesimo di riferimento. Posto

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad (2.505)$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sum_{k=1}^n f_k(x)}{[u(x)]^\alpha} = \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^\alpha} = \sum_{k=1}^n \ell_k$$

Ne consegue

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ell_k \neq 0 &\implies f(x) \text{ è di ordine } \alpha \\ \sum_{k=1}^n \ell_k = 0 &\implies f(x) \text{ è di ordine } \beta > \alpha, \end{aligned}$$

onde l'asserto. ■

Esempio 74 *Siano dati gli infinitesimi (in $x = 0$)*

$$f_1(x) = 2(1 - \cos x), \quad f_2(x) = x \sin x, \quad (2.506)$$

entrambi di ordine $\alpha = 2$. Consideriamo la loro somma

$$f(x) = 2(1 - \cos x) + x \sin x \quad (2.507)$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) + x \sin x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2, \end{aligned} \quad (2.508)$$

onde $f(x)$ è dello stesso ordine di $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Se invece eseguiamo la differenza

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x), \quad (2.509)$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

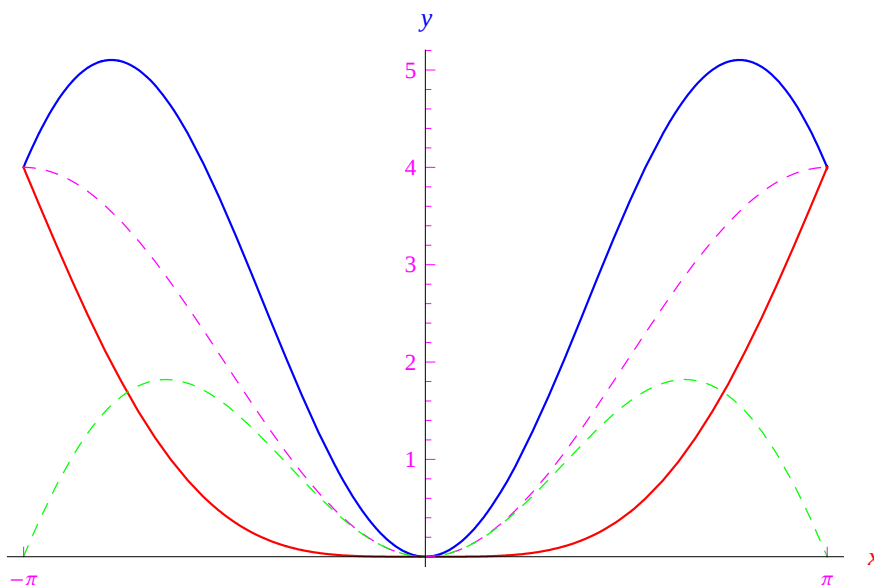


Figura 2.122: Le curve in tratteggio sono i grafici di $f_1(x) = 2(1 - \cos x)$ e $f_2(x) = x \sin x$. La curva in blue è il grafico della somma $f_1(x) + f_2(x)$, da cui vediamo che tale funzione è un infinitesimo dello stesso ordine di f_1 e f_2 . La curva in rosso, invece, è il grafico della differenza, e vediamo che si tratta di un infinitesimo di ordine superiore a f_1 e f_2 .

per cui $f_1(x) - f_2(x)$ è di ordine maggiore di 2. Per esplicitare l'ordine calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^\beta} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - x \sin x}{x^\beta} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\beta x^{\beta-1}} \\ &= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\beta(\beta-1)x^{\beta-2}} \\ &= \frac{1}{\beta(\beta-1)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^{\beta-3}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \beta - 3 = 1, \end{aligned} \quad (2.510)$$

onde $g(x)$ è di ordine $\beta = 4$. Tali risultati sono graficati in fig. 2.122.

Proposizione 58 Assegnate le funzioni $f_1(x), \dots, f_n(x)$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_k}} = \ell_k \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad (k = 1, \dots, n), \quad (2.511)$$

si ha

$$f(x) = \prod_{k=1}^n f_k(x) \implies \alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad (2.512)$$

essendo α l'ordine di infinitesimo di $f(x)$. In altri termini, l'ordine del prodotto di n infinitesimi è pari alla somma degli ordini dei singoli fattori.

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\prod_{k=1}^n f_k(x)}{[u(x)]^{\sum_{k=1}^n \alpha_k}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\prod_{k=1}^n f_k(x)}{\prod_{k=1}^n [u(x)]^{\alpha_k}} \\ &= \prod_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_k}} = \prod_{k=1}^n \ell_k \neq 0, \end{aligned} \quad (2.513)$$

onde l'asserto. ■

Esempio 75 *Siano*

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = 1 - \cos x, \quad (2.514)$$

per cui rispetto all'infinitesimo di riferimento $u(x) = x$, $f_1(x)$ è un infinitesimo (in $x = 0$) di ordine $\alpha_1 = 3$, mentre $f_2(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha_2 = 2$. Per la proposizione precedente, l'infinitesimo

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) = x^3 (1 - \cos x) \quad (2.515)$$

è di ordine $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 5$.

2.14.9 Calcolo di limiti con il Principio di sostituzione degli infinitesimi [infiniti]

Il Principio di sostituzione degli infinitesimi può essere utilizzato nel calcolo di limiti di funzioni che presentano indeterminazione.

Esempio 76 *Calcoliamo*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan^2 \sqrt{5^{2x} - 1} + (1 - \cos^3 x)^2}{\tan^3(\arcsin x) + \left[1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}\right] \ln(1+3x)} \quad (2.516)$$

Numeratore e denominatore sono manifestamente infinitesimi in $x = 0$, onde il loro rapporto da luogo alla forma indeterminata $0/0$. Determiniamo l'ordine dei singoli addendi. A tale scopo osserviamo che tenendo conto del limite fondamentale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad (2.517)$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 1}{x} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5^t - 1}{t} = 2 \ln 5, \quad (2.518)$$

per cui $5^{2x} - 1$ è del primo ordine rispetto a x . Più specificatamente, sussiste l'equivalenza tra infinitesimi:

$$5^{2x} - 1 \sim 2x \ln 5 \quad (2.519)$$

Per quanto riguarda la funzione $\arctan$ sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \implies \arctan x \sim x \quad (2.520)$$

Perciò

$$\arctan^2 \sqrt{5^{2x} - 1} \underset{t=\sqrt{5^{2x}-1}}{=} (\arctan t)^2 \sim t^2 = 5^{2x} - 1 \sim 2x \ln 5 \quad (2.521)$$

Segue

$$x \arctan^2 \sqrt{5^{2x} - 1} \sim 2x^2 \ln 5 \quad (2.522)$$

In altri termini il primo addendo a numeratore è un infinitesimo del secondo ordine. Passiamo al secondo addendo

$$(1 - \cos^3 x)^2 = (1 - \cos x)^2 (1 + \cos x + \cos^2 x)^2 \quad (2.523)$$

È chiaro che dobbiamo calcolare l'ordine di $1 - \cos^3 x$ per poi applicare il teorema del prodotto di infinitesimi. Quindi scriviamo

$$1 - \cos^3 x = (1 - \cos x) (1 + \cos x + \cos^2 x) \quad (2.524)$$

Ossia $1 - \cos^3 x$ si fattorizza nel prodotto dell'infinitesimo $1 - \cos x$ (del second'ordine) per un termine che converge a 3. Perciò $1 - \cos^3 x$ è del second'ordine e il suo quadrato è del quart'ordine. Tutto ciò implica che a numeratore possiamo trascurare $(1 - \cos^3 x)^2$. Passiamo ora al denominatore, il cui primo addendo è

$$\tan^3 (\arcsin x) \quad (2.525)$$

Cambiamo la variabile in $t = \arcsin x$:

$$\tan^3 (\arcsin x) = (\tan t)^3$$

Ma $\tan t$ è del primo ordine $\Rightarrow \tan^3 (\arcsin x)$ è del terzo ordine. Il secondo addendo è apparentemente più complicato

$$\left[1 - \sqrt[5]{(1+x)^4} \right] \ln (1+3x) \quad (2.526)$$

Dal limite fondamentale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\lambda - 1}{x} = \lambda \quad (2.527)$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}}{x} = -\frac{4}{5},$$

onde $1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}$ è del primo ordine. L'altro termine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1+3x)}{x} \underset{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln (1+t)}{t} = 1 \quad (2.528)$$

Quindi $\ln (1+3x)$ è del primo ordine. Per il teorema del prodotto

$$\underbrace{\left[1 - \sqrt[5]{(1+x)^4} \right]}_{\text{ordine 1}} \underbrace{\ln (1+3x)}_{\text{ordine 1}} \Rightarrow \text{è di ordine 2} \quad (2.529)$$

Questo significa che a denominatore possiamo trascurare $\tan^3(\arcsin x)$. Allora per il Principio di sostituzione degli infinitesimi si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan^2 \sqrt{5^{2x} - 1}}{\left[1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}\right] \ln(1+3x)} \quad (2.530)$$

Si tratta ora di sostituire i singoli infinitesimi con le rispettive parti principali. Abbiamo visto che

$$x \arctan^2 \sqrt{5^{2x} - 1} \sim 2x^2 \ln 5 \quad (2.531)$$

Inoltre

$$\left(\begin{array}{l} 1 - \sqrt[5]{(1+x)^4} \sim -\frac{4}{5}x \\ \ln(1+3x) \sim 3x \end{array} \right) \Rightarrow \left[1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}\right] \ln(1+3x) \sim -\frac{12}{5}x^2 \quad (2.532)$$

Finalmente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan^2 \sqrt{5^{2x} - 1}}{\left[1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}\right] \ln(1+3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 \ln 5}{-\frac{12}{5}x^2} = -\frac{5}{6} \ln 5 \quad (2.533)$$

Esempio 77 Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan 3x + 5x^3 + \sin^2 x \cos x}{x + \tan^2 x \sin x} \quad (2.534)$$

Vediamo “ad occhio” che $5x^3 + \sin^2 x \cos x$ è di ordine superiore rispetto a $2 \tan 3x$. Precisamente, si tratta di un infinitesimo del secondo ordine rispetto a x (e quindi rispetto a $2 \tan 3x$). Infatti:

$$\begin{array}{ccc} 5x^3 + \sin^2 x \cos x & & \\ \downarrow \alpha_1=3 & & \downarrow \alpha_2=2 \end{array} \quad (2.535)$$

da cui $\alpha = 2$ in virtù del teorema dell'ordine della somma di infinitesimi. Quindi a numeratore è lecito trascurare tale termine. A denominatore il secondo addendo, ovvero il termine $\tan^2 x \sin x$, è del terzo ordine rispetto al primo, cioè trascurabile. In definitiva il limite si riduce a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan 3x}{x} = 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} = 6 \quad (2.536)$$

Esempio 78 Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \arctan x + \sin x}{x \sqrt{x^2 + 5x + 6} + x^2 - 3x} \quad (2.537)$$

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. A numeratore abbiamo x^2 che è un infinito del secondo ordine rispetto all'infinito di riferimento $u(x) = x$. Determiniamo l'ordine di infinito $x \arctan x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

per cui $x \arctan x$ è del primo ordine e come tale trascurabile rispetto a x^2 . L'altro addendo $\sin x$ è non regolare per $x \rightarrow +\infty$, ma è limitato, cosicché possiamo trascurarlo.

Passiamo a denominatore. Qui vediamo che

$$\sqrt{x^2 + 5x + 6}, \quad x^2 \quad (2.538)$$

sono manifestamente infiniti del secondo ordine, per cui possiamo trascurare l'addendo $-3x$. Possiamo poi svincolarci dalla radice osservando che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}}{x^2} = 1 \quad (2.539)$$

Cioè

$$x\sqrt{x^2 + 5x + 6} \sim x^2 \quad (2.540)$$

In definitiva il limite proposto diventa:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad (2.541)$$

Parte II

Derivazione di una funzione reale di una variabile reale

Capitolo 3

Limite del rapporto incrementale

3.1 Definizioni e proprietà

Sia f una funzione reale di una variabile reale definita in un intervallo X :

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Assegnato $x_0 \in X$, sia Δx un *incremento* della variabile indipendente tale che $(x_0 + \Delta x) \in X$. Denotiamo, quindi, con Δf il corrispondente *incremento della funzione*:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad (3.2)$$

che per un assegnato x_0 è una funzione di Δx :

$$\begin{aligned} \Delta f &: E_{x_0} \rightarrow \mathbb{R} \\ \Delta f &: \Delta x \rightarrow \Delta f(\Delta x), \quad \forall \Delta x \in E_{x_0}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

ove

$$E_{x_0} = \{\Delta x \in \mathbb{R} \mid (x_0 + \Delta x) \in X\},$$

riuscendo:

$$X \text{ è un intervallo} \implies E_{x_0} \neq \emptyset$$

La funzione $\Delta f(\Delta x)$ (eq. 3.3) è manifestamente un infinitesimo in $\Delta x = 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

Di maggior interesse è il *rapporto incrementale*:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (3.4)$$

che è una funzione di Δx :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &: E'_{x_0} \rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &: \Delta x \rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x}(\Delta x), \quad \forall \Delta x \in E'_{x_0}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

essendo $E'_{x_0} = E_{x_0} - \{\Delta x = 0\}$. Il punto $\Delta x = 0$ è di accumulazione per E'_{x_0} , onde ha senso studiare il comportamento della funzione (3.5) in un intorno di tale punto, ovvero eseguire l'operazione di passaggio al limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (3.6)$$

Se tale limite esiste finito, cioè se la funzione $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ (eq. 3.5) è convergente in $\Delta x = 0$, si dice che la funzione f è *derivabile* in x_0 e il limite (3.6) si denota con $f'(x_0)$:

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Se tale circostanza si verifica in *ogni* punto di X , diremo che la funzione f è derivabile in X . Tale operazione dà luogo a una nuova funzione che denotiamo con $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

che si chiama *derivata prima* di f . Oltre alla notazione apicale (o di Lagrange) è spesso utilizzata la notazione differenziale (o di Leibnitz):

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Esempio 79 Determiniamo la derivata di $\sin x$ in $x_0 \in \mathbb{R}$.

Svolgimento

Dobbiamo calcolare il limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x},$$

che chiaramente si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere l'indeterminazione sviluppiamo il numeratore con le formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned} \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 &= 2 \sin\left(\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right), \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\left[\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \right]}_{=1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \\ &= \cos x_0 \end{aligned}$$

E per ogni $x_0 \equiv x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

È istruttivo confrontare per via grafica il rapporto incrementale $\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$ con la funzione $\cos x$. Più precisamente, consideriamo la funzione di x :

$$g_{\Delta x}(x) = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}, \quad (3.7)$$

per assegnati valori di Δx . In altri termini, nella (3.7) assumiamo Δx come parametro reale non nullo. Ad esempio, per $\Delta x = 4$ otteniamo i grafici di fig. 3.1.

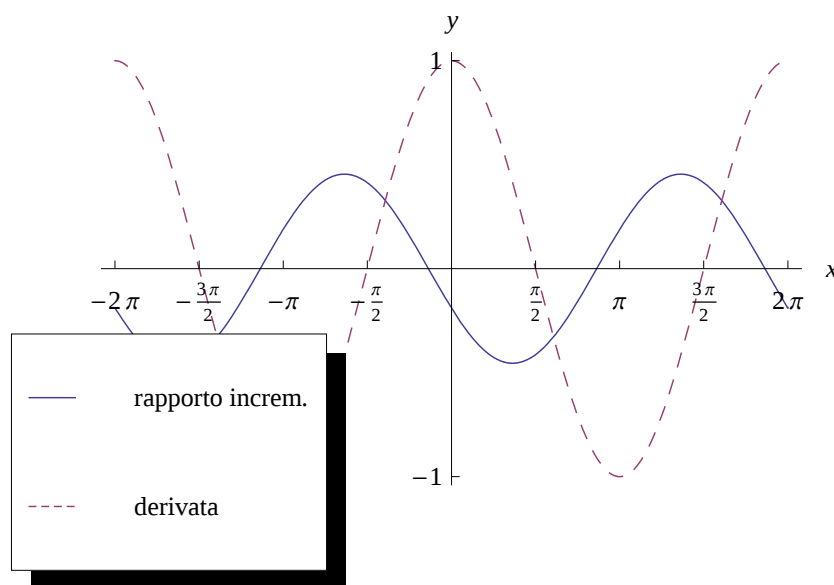


Figura 3.1: La curva continua è il grafico di $g_{\Delta x=4}(x) = \frac{\sin(x+4) - \sin x}{4}$, mentre la curva tratteggiata è il grafico della derivata di $f(x) = \sin x$, cioè $\cos x$.

Proviamo a diminuire l'incremento della variabile indipendente passando da $\Delta x = 4$ a $\Delta x = 1$, ottenendo i grafici di fig. 3.2, da cui vediamo che $g_{\Delta x}(x)$ si “avvicina” ulteriormente a $\cos x$.

Infine, per $\Delta x = 10^{-1}$ otteniamo il grafico di fig. 3.3, da cui vediamo che il grafico di $g_{\Delta x=10^{-1}}(x)$ è “quasi” sovrapposto a quello di $\cos x$.

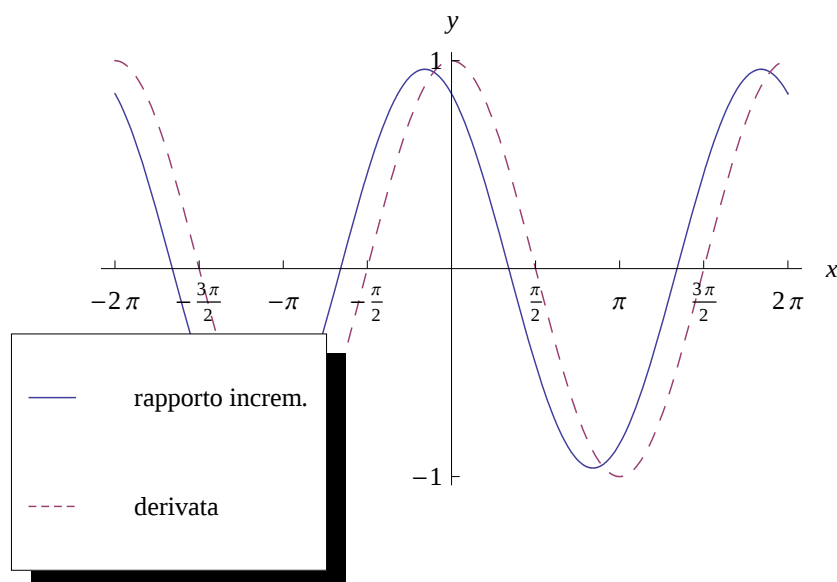


Figura 3.2: La curva continua è il grafico di $g_{\Delta x=1}(x) = \sin(x+1) - \sin x$, mentre la curva tratteggiata è il grafico della derivata di $f(x) = \sin x$, cioè $\cos x$.

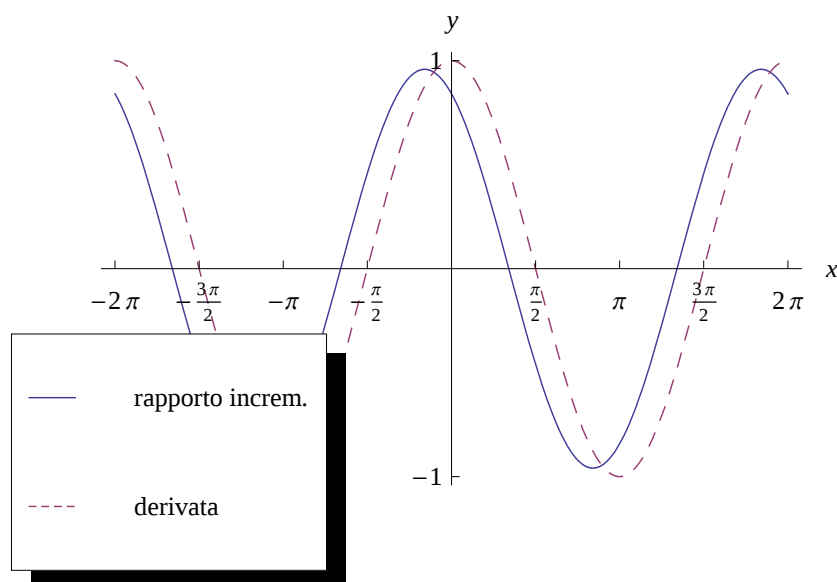


Figura 3.3: La curva continua è il grafico di $g_{\Delta x=10^{-1}}(x) = \frac{\sin(x+10^{-1}) - \sin x}{10^{-1}}$, mentre la curva tratteggiata è il grafico della derivata di $f(x) = \sin x$, cioè $\cos x$.

Capitolo 4

Interpretazione geometrica della derivata

4.1 La nozione di retta tangente al grafico di una funzione

Sia Γ il grafico della funzione (3.1) che supponiamo continua in X . Il punto $x_0 \in X$ individua il punto $P_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, mentre un incremento $\Delta x \neq 0$ individua $P(x = x_0 + \Delta x, y = f(x_0 + \Delta x)) \in \Gamma$. Denotiamo con $s_{\Delta x}$ la retta per P_0 e P , ossia la secante a Γ per i detti punti. Dal momento che $\Delta x \neq 0$ si ha $x_0 + \Delta x \neq x_0$, cioè $s_{\Delta x}$ non è parallela all'asse y . Orientando $s_{\Delta x}$ nel verso delle ascisse crescenti (fig. 4.1), indichiamo con $\theta(x_0 + \Delta x)$ la misura in radianti dell'angolo che il semiasse positivo delle x forma con $s_{\Delta x}$. È chiaro che θ risulta essere una funzione di Δx :

$$\begin{aligned}\theta &: E'_{x_0} \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &: \Delta x \rightarrow \theta(x_0 + \Delta x), \quad \forall \Delta x \in E'_{x_0}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Più precisamente, $\theta(x_0 + \Delta x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\forall \Delta x \in E'_{x_0}$, onde se θ è regolare in $\Delta x = 0$, si ha $\theta_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, essendo

$$\theta_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \theta(x_0 + \Delta x)$$

Denotiamo con τ_0 la retta per P_0 e di coefficiente angolare $\tan \theta_0$:

$$\tau_0 : y = f(x_0) + (\tan \theta_0)(x - x_0)$$

Inoltre, l'incremento $\theta(x_0 + \Delta x) - \theta(x_0)$ della funzione (4.1) è la misura in radianti dell'angolo formato dalle rette $s_{\Delta x}$ e τ_0 . Da ciò segue che per $\Delta x \rightarrow 0$, il punto P si sposta lungo la curva Γ e tende a P_0 , mentre la retta $s_{\Delta x}$ compie una rotazione continua attorno a P_0 tale che $\theta(x_0 + \Delta x) - \theta_0 \rightarrow 0$, cioè fino a sovrapporsi alla retta τ_0 . in simboli:

$$\tau_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s_{\Delta x},$$

cioè τ_0 è la posizione limite di $s_{\Delta x}$ per $\Delta x \rightarrow 0$, ovvero la retta tangente a Γ nel punto P_0 . Dalla fig. 4.1 vediamo che

$$\tan \theta(x_0 + \Delta x) = \frac{\overline{QP}}{\overline{P_0Q}} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

che è il coefficiente angolare di $s_{\Delta x}$, onde la sua equazione è:

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} (x - x_0)$$

Inoltre

$$\theta(x_0 + \Delta x) = \arctan \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

per cui

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \theta(x_0 + \Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \arctan \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \arctan \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

E se f è derivabile in x_0 :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \theta(x_0 + \Delta x) = \arctan f'(x_0)$$

Ma $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \theta(x_0 + \Delta x) = \theta_0$, onde l'equazione precedente porge:

$$\tan \theta_0 = f'(x_0), \quad (4.2)$$

cosicché la derivata prima di f in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto di ascissa x_0 .

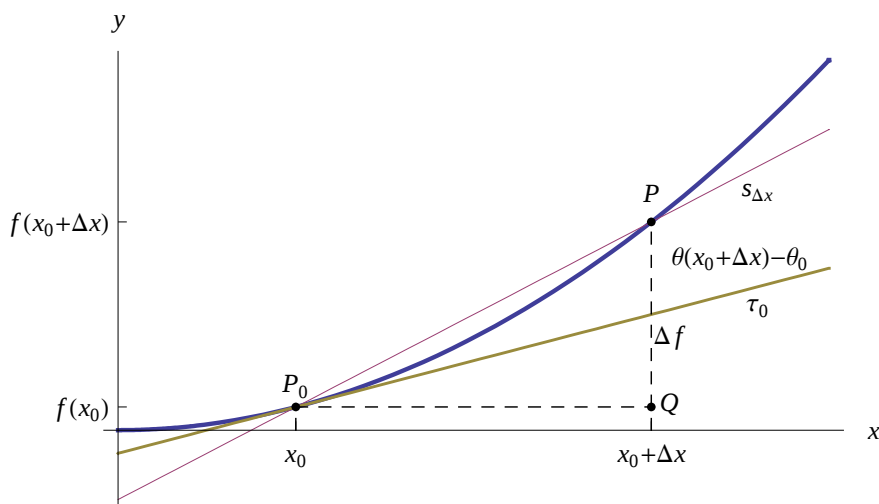


Figura 4.1: Interpretazione geometrica della derivata.

Capitolo 5

Funzioni non derivabili

5.1 Rapporto incrementale non regolare

Nel paragrafo 3.1 abbiamo definito la derivata in un punto $x_0 \in X$ di una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definizione resa possibile dalla convergenza del rapporto incrementale:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (5.1)$$

nel limite per $\Delta x \rightarrow 0$. È chiaro che ciò non sempre accade. Esistono, cioè, funzioni per le quali il rapporto (5.1) non è convergente per $\Delta x \rightarrow 0$, onde può essere divergente, convergente a sinistra e a destra o addirittura non regolare. Quest'ultimo caso si verifica per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (5.2)$$

che è continua in $x = 0$. Più precisamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad (5.3)$$

Infatti

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (5.4)$$

Da ciò segue:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon \mid 0 < |x| < \delta_\varepsilon \implies \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon,$$

cioè la (5.3). Ne consegue la continuità di (5.2) in $x = 0$. Il grafico di tale funzione è riportato in fig. 5.1. Dalla (5.4) vediamo che il suddetto grafico è contenuto nella regione delimitata dalle bisettrici del primo e quarto quadrante. Più precisamente, compie infinite oscillazioni tra tali rette; oscillazioni che si smorzano per $x \rightarrow 0$.

Scriviamo ora il rapporto incrementale della funzione (5.2) con punto iniziale x_0 :

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right)_{x_0} = \frac{(x_0 + \Delta x) \sin \frac{1}{x_0 + \Delta x} - x_0 \sin \frac{1}{x_0}}{\Delta x}$$

Per $x_0 = 0$:

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right)_{x_0=0} = \sin \frac{1}{\Delta x},$$

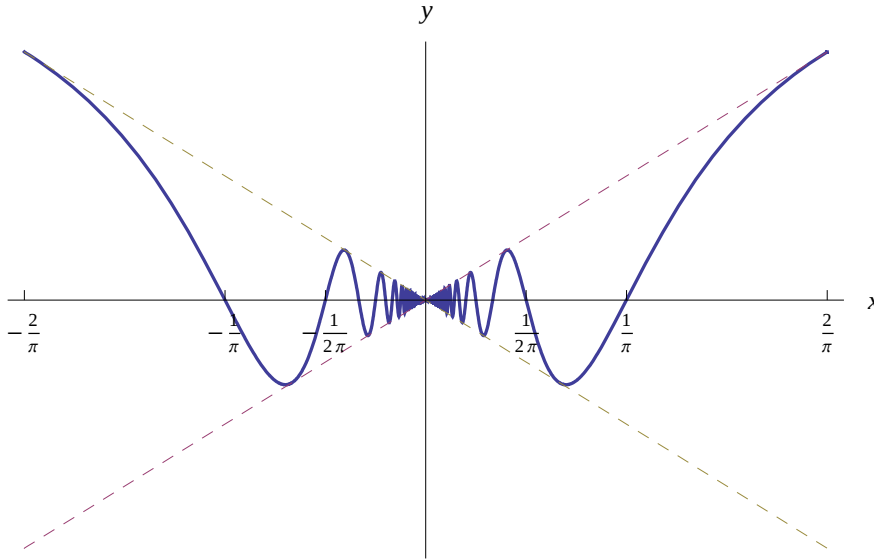


Figura 5.1: Grafico della funzione (5.2). La curva $y = f(x)$ compie infinite oscillazioni tra le bisettrici del primo e quarto quadrante. Le oscillazioni si smorzano per $x \rightarrow 0$.

che è non regolare per $\Delta x \rightarrow 0$. Più precisamente, il grafico di $\sin \frac{1}{\Delta x}$ compie, in ogni intorno di $\Delta x = 0$, infinite oscillazioni tra -1 e $+1$, come mostrato in fig. 5.2

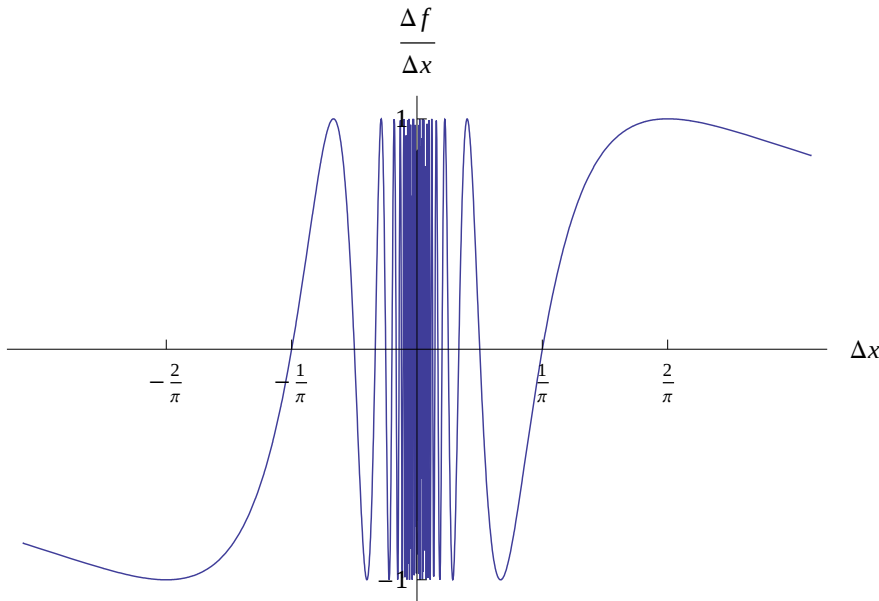


Figura 5.2: Grafico di $(\frac{\Delta f}{\Delta x})_{x_0=0}$.

D'altra parte, dal paragrafo 4 sappiamo che $(\frac{\Delta f}{\Delta x})_{x_0=0}$ è il coefficiente angolare della retta secante $s_{\Delta x}$ alla curva $y = f(x)$ per i punti $(0,0)$ e $P(\Delta x, f(\Delta x))$, come mostrato in fig. 5.3. Quindi:

$$s_{\Delta x} : y = \left(\sin \frac{1}{\Delta x} \right) x \implies \nexists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s_{\Delta x}$$

In altri termini, per $\Delta x \rightarrow 0$ la secante $s_{\Delta x}$ non tende ad alcuna posizione limite. Più precisamente, oscilla tra le bisettrici del primo e quarto quadrante, i.e. le rette $y = \pm x$.

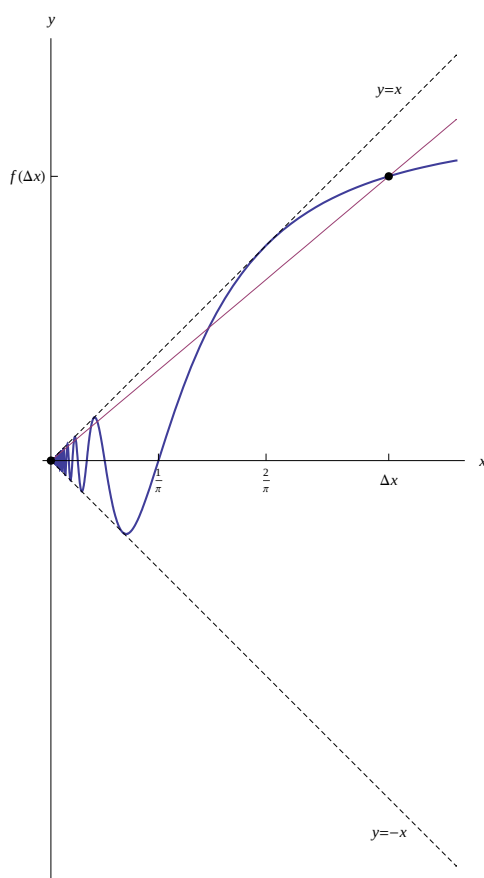


Figura 5.3: Nel limite per $\Delta x \rightarrow 0$ la retta secante $s_{\Delta x}$ oscilla tra le bisettrici $y = \pm x$, senza tendere ad alcuna posizione limite.

Ne concludiamo che la funzione (5.2) pur essendo continua in $x = 0$ non è ivi derivabile. Tuttavia, esiste un legame tra continuità e derivabilità, espressa dal seguente teorema:

Teorema 17

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ è derivabile} \\ \text{in } x_0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ è continua} \\ \text{in } x_0 \end{array} \right)$$

Dimostrazione. Per ipotesi:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Posto $x = x_0 + \Delta x$ la relazione precedente si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

D'altra parte $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$, cosicchè:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{= f'(x_0) \in \mathbb{R}} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)}_{= 0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde l'asserto. ■

Si badi che il teorema non è invertibile:

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ è continua} \\ \text{in } x_0 \end{array} \right) \not\Rightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ è derivabile} \\ \text{in } x_0 \end{array} \right),$$

come si evince dall'esempio della funzione (5.2). In altri termini, la continuità è una condizione necessaria ma non sufficiente per la derivabilità o, ciò che è lo stesso la derivabilità è una condizione sufficiente ma non necessaria per la continuità.

Consideriamo ora il caso in cui il rapporto incrementale

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right)_{x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

è convergente a sinistra e a destra per $\Delta x \rightarrow 0$. Precisamente:

$$f'_-(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (5.5)$$

e

$$f'_+(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (5.6)$$

dove $f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$, $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$. In altri termini, i limiti (5.5)-(5.6) oltre ad essere determinati e finiti, sono distinti. In tal caso si dice che f è **derivabile a sinistra e a destra** in x_0 (pur non essendo ivi derivabile). I numeri reali $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ si dicono rispettivamente la **derivata sinistra** e la **derivata destra** di f nel punto x_0 .

Esempio 80 Studiamo il comportamento del rapporto incrementale (di punto iniziale $x_0 = 0$) della funzione:

$$f(x) = |\sin x| \quad (5.7)$$

Osserviamo innanzitutto che tale funzione è periodica di periodo $T = \pi$, per cui possiamo considerare la sua restrizione all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Tuttavia, per una questione di visualizzazione riferiamoci all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Comunque prendiamo $x_0 \in [-\pi, \pi]$, il relativo rapporto incrementale è:

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0} = \frac{|\sin(x_0 + \Delta x)| - |\sin x_0|}{\Delta x} \quad (5.8)$$

Il punto che ci interessa è $x_0 = 0$, onde:

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0=0} = \frac{|\sin(\Delta x)|}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}, & \text{se } \Delta x > 0 \\ -\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}, & \text{se } \Delta x < 0 \end{cases}, \quad (5.9)$$

che ha in $\Delta x = 0$ una discontinuità di prima specie. Infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1^- \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0=0} &= -\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = -1^+, \end{aligned}$$

per cui il salto di discontinuità è $s(\Delta x = 0) = 2$. In fig. 5.4 riportiamo il grafico del rapporto incrementale (5.8), da cui è visibile la discontinuità in $\Delta x = 0$.

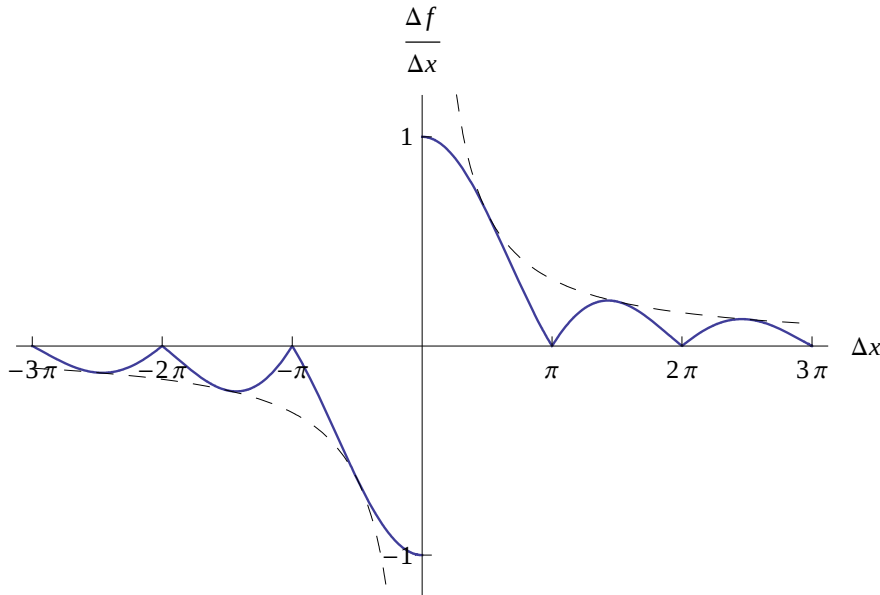


Figura 5.4: La curva grassettata è il grafico del rapporto incrementale (5.8) in funzione di Δx . Tale curva è inviluppata dalle curve tratteggiate $y = \frac{1}{\Delta x}$ e $y = -\frac{1}{\Delta x}$.

Ne consegue che la funzione (5.7) non è derivabile in $x_0 = 0$, ma lo è a destra e a sinistra, avendosi:

$$f'_+(0) = -1, \quad f'_-(0) = 1$$

Come nell'esempio 79, anche qui è istruttivo confrontare il grafico del rapporto incrementale con la derivata, che è manifestamente data da:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{se } x \geq 0 \\ -\cos x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

. Per “grafico del rapporto incrementale” intendiamo non il grafico riportato in fig. 5.4, bensì quello della funzione:

$$g_{\Delta x}(x) = \frac{|\sin(x + \Delta x)| - |\sin x|}{\Delta x},$$

mentre Δx svolge il ruolo di parametro reale non nullo. È chiaro che l'approssimazione $g_{\Delta x}(x) \sim f'(x)$ migliora al diminuire di Δx , giacchè:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g_{\Delta x}(x) = f'(x)$$

Ad esempio, per $\Delta x = 4$ otteniamo i grafici di fig. 5.5.

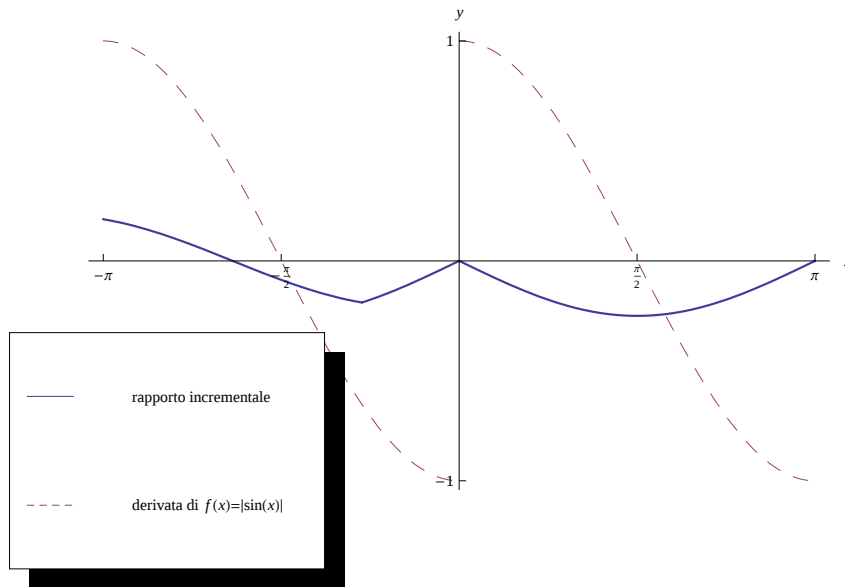


Figura 5.5: La curva continua è il grafico di $g_{\Delta x=4}(x) = \frac{|\sin(x+4)| - |\sin x|}{4}$, mentre la curva tratteggiata è il grafico della derivata della funzione assegnata.

Proviamo a diminuire l'incremento della variabile indipendente passando da $\Delta x = 4$ a $\Delta x = 2$, ottenendo i grafici di fig. 5.6, da cui vediamo che $g_{\Delta x}(x)$ si “avvicina” ulteriormente a $f'(x)$.

Infine, per $\Delta x = 10^{-1}$ otteniamo il grafico di fig. 5.7, da cui vediamo che il grafico di $g_{\Delta x=10^{-1}}(x)$ è “quasi” sovrapposto a quello di $f'(x)$.

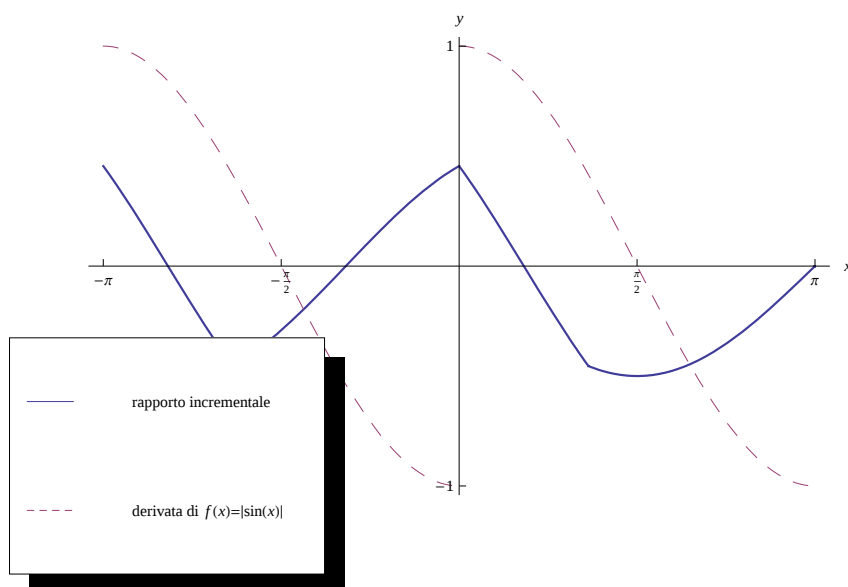


Figura 5.6: La curva continua è il grafico di $g_{\Delta x=2}(x) = \frac{|\sin(x+1)| - |\sin(x)|}{2}$, mentre la curva tratteggiata è il grafico della derivata della funzione assegnata.

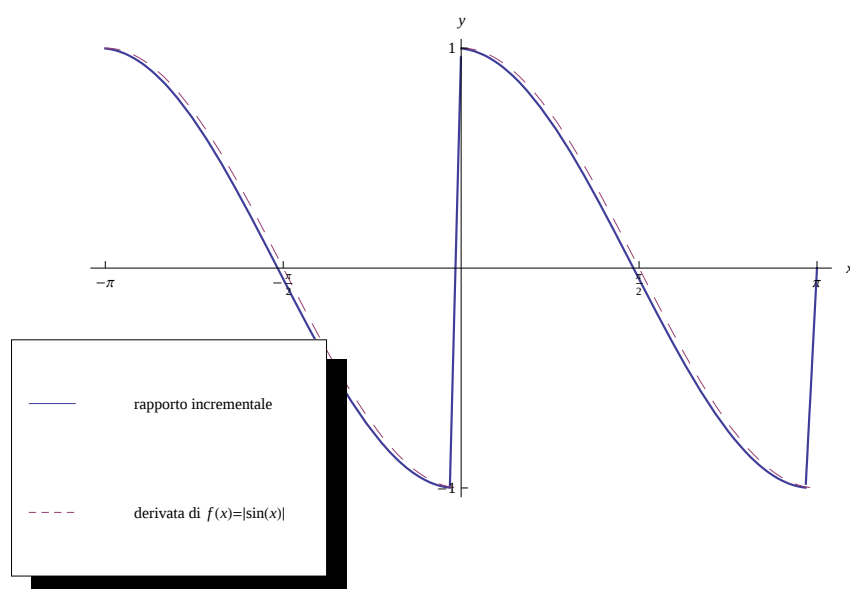


Figura 5.7: La curva continua è il grafico di $g_{\Delta x=2}(x) = \frac{|\sin(x+1)| - |\sin x|}{2}$, mentre la curva tratteggiata è il grafico della derivata della funzione assegnata.

Può poi verificarsi il caso in cui f è derivabile solo a sinistra o solo a destra. Ad esempio:

$$f'_-(x_0) \in \mathbb{R}, \quad \nexists f'_+(x_0)$$

e viceversa. Infine, il rapporto incrementale può essere divergente:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm\infty$$

In tal caso si dice che la funzione ha **derivata infinita** in x_0 . Tale locuzione si conserva se la divergenza si verifica solo a destra o solo a sinistra. Ad esempio:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty, \quad f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$$

Capitolo 6

Interpretazione geometrica della derivata (parte seconda)

6.1 Punti di flesso a tangente verticale. Punti angolosi. Cuspidi

Nel paragrafo 4 abbiamo visto che la derivata di una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, calcolata in $x_0 \in X$, è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$. Nel caso di una funzione non derivabile abbiamo considerato l'esempio della funzione (5.2) per la quale il rapporto incrementale di punto iniziale $x_0 = 0$, è oscillante tra -1 e 1 in ogni intorno di $\Delta x = 0$, giungendo alla conclusione della inesistenza della retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

Ci restano da analizzare i seguenti casi:

1. La funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua in x_0 , ha ivi derivata infinita.
2. La funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua in x_0 , non è ivi derivabile, ma lo è a destra e a sinistra.

Nel caso 1, iniziamo a supporre $f'(x_0) = +\infty$. Dalla (4.2):

$$\tan \theta_0 = +\infty \implies \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

Se invece $f'(x_0) = -\infty$, si ha

$$\tan \theta_0 = -\infty \implies \theta_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Ne consegue che nel caso 2 il diagramma cartesiano della funzione è ancora dotato di retta tangente, con la differenza che ora tale retta è parallela all'asse y :

$$\tau_0 : x = x_0$$

. Più precisamente se $f'(x_0) = +\infty$, τ_0 è orientata verso l'alto. Viceversa, verso il basso. Ciò è illustrato nelle figg. 6.1-6.2

Nelle figg. 6.1-6.2 vediamo che τ_0 attraversa la curva $\gamma : y = f(x)$ nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$, nel senso che essa si “flette” in P_0 . Diremo quindi che P_0 è un punto di inflessione o meglio, **un punto di flesso a tangente verticale**. E τ_0 si chiama **tangente di flesso**.

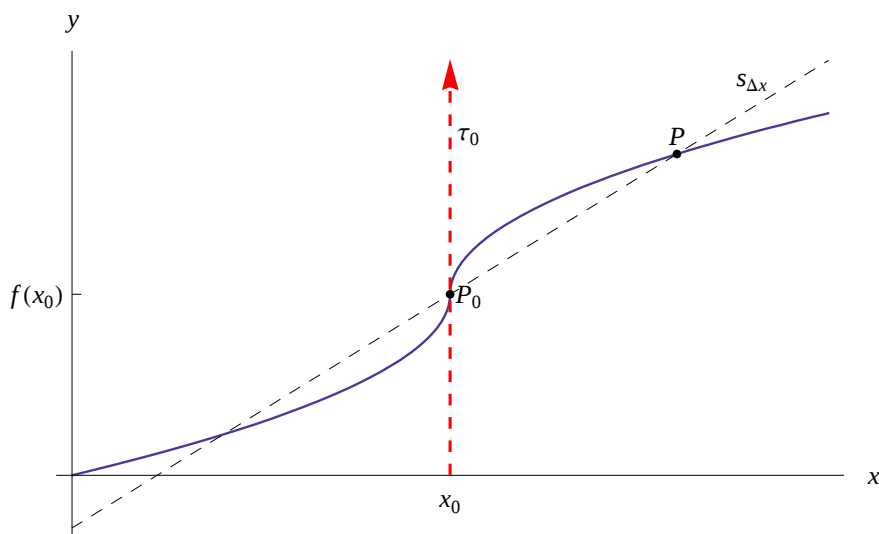


Figura 6.1: La funzione f ha in x_0 derivata infinita: $f'(x_0) = +\infty$.

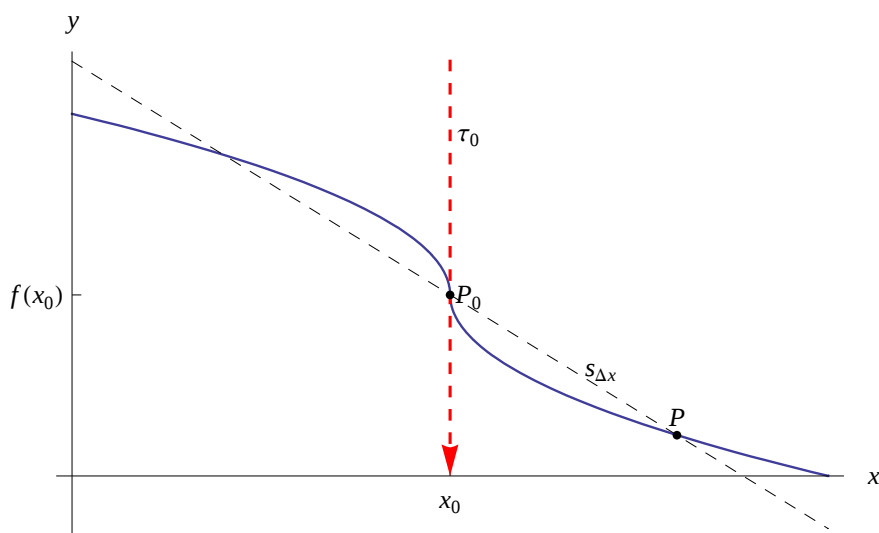


Figura 6.2: La funzione f ha in x_0 derivata infinita: $f'(x_0) = -\infty$.

Esempio 81 Studiamo la derivabilità in x_0 della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x - x_0}, & \text{se } x \geq x_0 \\ 1 - \sqrt{x_0 - x}, & \text{se } x < x_0 \end{cases}, \quad (6.1)$$

La (6.1) è definita in $X = (-\infty, +\infty)$ ed è ivi continua. Infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} (1 + \sqrt{x - x_0}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} (1 - \sqrt{x_0 - x}) = 1, \end{aligned}$$

cosicchè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 = f(x_0),$$

da cui la continuità di $f(x)$ in x_0 . Studiamo ora il rapporto incrementale di punto iniziale x_0 . Per $\Delta x > 0$ è $x > x_0$, per cui:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$$

Per $\Delta x < 0$ è $x < x_0$, per cui:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= -\frac{\sqrt{-\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{|\Delta x|}}{|\Delta x|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\Delta x|}} \end{aligned}$$

Cioè:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{|\Delta x|}}, \quad \forall \Delta x \neq 0 \quad (6.2)$$

Eseguendo il limite per $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|\Delta x|}} = +\infty,$$

per cui la funzione assegnata ha derivata infinita nel punto x_0 . Ne concludiamo che $P(x_0, 1)$ è un punto di flesso a tangente verticale per $\gamma: y = f(x)$, come illustrato nel grafico di fig. 6.1. Osserviamo, infine, che la retta secante per P_0 e $P(x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta x)$ ha equazione:

$$s_{\Delta x}: y = f(x_0) + \frac{1}{\sqrt{|\Delta x|}}(x - x_0)$$

Cioè

$$s_{\Delta x}: y = f(x_0) + \frac{x - x_0}{\sqrt{|\Delta x|}}$$

Per quanto precede, il risultato dell'operazione di passaggio al limite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} s_{\Delta x}$ è $\tau_0: x - x_0 = 0$.

Passiamo al caso 2. Ora il rapporto incrementale è non regolare per $\Delta x \rightarrow 0$, ma è convergente a sinistra e a destra:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= f'_+(x_0) \in \mathbb{R} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= f'_-(x_0) \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

con $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$. Denotiamo con τ_0^- e τ_0^+ le rette per $P_0(x_0, f(x_0))$ e di coefficiente angolare $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$, rispettivamente. Cioè:

$$\tau_0^\pm : y = f(x_0) + f'_\pm(x_0)(x - x_0)$$

Riesce

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} s_{\Delta x} = \tau_0^+ \text{ e } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} s_{\Delta x} = \tau_0^-$$

Cioè la retta secante $s_{\Delta x}$ tende a due posizioni limite distinte a seconda della direzione di “avvicinamento a zero” di Δx . La retta τ_0^+ è tangente all'arco γ_+ dato da

$$\gamma_+ = \{(x, f(x)) \in \gamma \mid x > x_0\},$$

ossia l'arco del grafico di $f(x)$ contenuto nel semipiano $x > x_0$. Allo stesso modo τ_0^- è tangente a γ_- :

$$\gamma_- = \{(x, f(x)) \in \gamma \mid x < x_0\},$$

che è l'arco di γ contenuto nel semipiano $x < x_0$. Ne consegue che $\gamma = \gamma_- \cup \gamma_+$, cioè il grafico di f è l'unione dei due archi γ_-, γ_+ che si raccordano¹ nel punto P_0 . È chiaro che il grafico è privo di retta tangente in P_0 . Tuttavia, per quanto precede, restano definite le rette $\tau_0^\pm$ quali posizione limite della secante. Tali rette prendono rispettivamente il nome di **retta tangente a destra** (τ_0^+) e **retta tangente a sinistra** (τ_0^-) in P_0 . Il punto P_0 , invece, si chiama **punto angoloso** del diagramma cartesiano della funzione.

Abbiamo contemplato la convergenza a sinistra e a destra. Generalizzando, può verificarsi ad esempio, il caso:

$$f'_-(x_0) = +\infty, \quad f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$$

In tal caso, la tangente a sinistra è parallela e concorde all'asse y , i.e. $\tau_0^- : x = x_0$.

Esempio 82 Studiamo la derivabilità della funzione

$$f(x) = |\ln x| \tag{6.3}$$

nel punto $x_0 = 1$.

Osserviamo innanzitutto che la funzione è definita in $X = (0, +\infty)$ e che $x_0 = 1$ è un suo zero al finito. Scriviamo il rapporto incrementale relativo al punto $x_0 = 1$:

$$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{|\ln(1 + \Delta x)|}{\Delta x}$$

Riesce:

$$\begin{aligned}\Delta x > 0 &\implies 1 + \Delta x > 1 \implies \ln(1 + \Delta x) > 0 \\ \Delta x < 0 &\implies 1 + \Delta x < 1 \implies \ln(1 + \Delta x) < 0,\end{aligned}$$

¹Il raccordo segue dalla continuità di f in x_0 .

onde

$$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}, & \text{se } \Delta x > 0 \\ -\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}, & \text{se } \Delta x < 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Per determinare i limiti (6.5) dobbiamo tener presente il limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a e,$$

da cui

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \ln e = 1$$

e

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = -\ln e = -1$$

Cioè

$$f'_+(1) = 1, \quad f'_-(1) = -1$$

Ne consegue che $P_0(1, 0)$ è un punto angoloso per $\gamma : y = |\ln x|$. Le tangenti a sinistra e a destra sono:

$$\tau_0^- : y = -x + 1, \quad \tau_0^+ : y = x - 1,$$

come illustrato in fig. 6.3

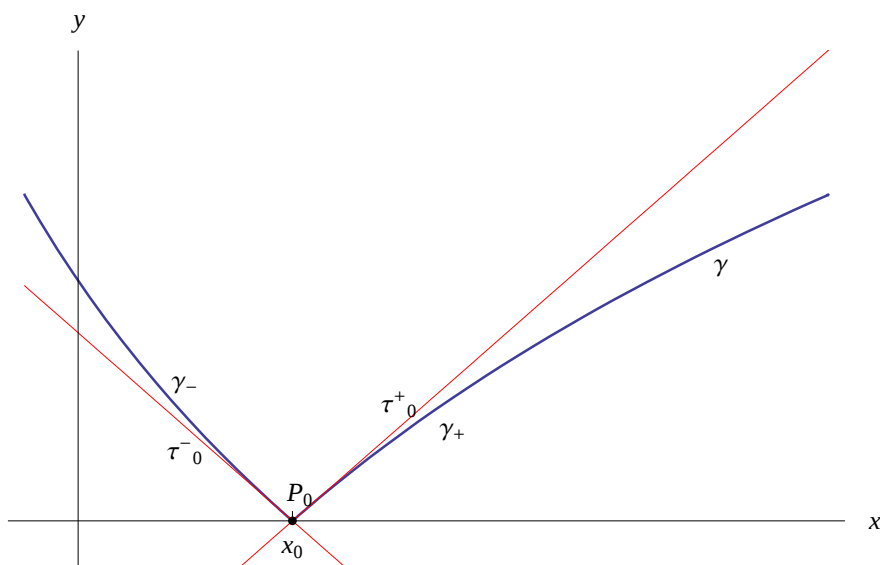


Figura 6.3: Il punto $P_0(1, 0)$ è un punto angoloso per il diagramma cartesiano della funzione $f(x) = |\ln x|$.

Ci rimane da esaminare il caso di una funzione non derivabile in x_0 ma con derivata destra e sinistra infinite e di segni opposti. Senza perdita di generalità:

$$f'_-(x_0) = -\infty, \quad f'_+(x_0) = +\infty$$

I due archi γ_- e γ_+ si raccordano in $P_0(x_0, f(x_0))$, mentre la retta secante ha il seguente comportamento:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} s_{\Delta x} = \tau_0^+ \text{ e } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} s_{\Delta x} = \tau_0^-,$$

dove

$$\tau_0^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_0, f(x_0) \leq y < +\infty\}, \quad (6.6)$$

cioè è la semiretta di origine P_0 , parallela all'asse y e orientata verso l'alto. E

$$\tau_0^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_0, -\infty < y \leq f(x_0)\}, \quad (6.7)$$

ovvero la semiretta di origine P_0 , parallela all'asse y e orientata verso il basso. I luoghi geometrici (6.6) e (6.7) si chiamano rispettivamente semitangente a destra e semitangente a sinistra, mentre il punto P_0 si dice **punto cuspidale** o semplicemente **cuspidale**.

Esempio 83 Studiamo la derivabilità in x_0 della funzione:

$$f(x) = 1 + 5\sqrt{|x - x_0|}$$

Come nel caso della funzione dell'esempio 81, anche qui si ha la continuità in tutto $\mathbb{R}$. Per scrivere il rapporto incrementale relativo al punto x_0 , è conveniente esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 5\sqrt{x - x_0}, & \text{se } x \geq x_0 \\ 1 + 5\sqrt{x_0 - x}, & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

Per $\Delta x > 0$ è $x > x_0$, per cui:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 5 \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{5}{\sqrt{\Delta x}}$$

Per $\Delta x < 0$ è $x < x_0$, per cui:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= 5 \frac{\sqrt{-\Delta x}}{\Delta x} \\ &= -5 \frac{\sqrt{-\Delta x}}{-\Delta x} \\ &= -\frac{5}{\sqrt{-\Delta x}} \end{aligned}$$

Cioè:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{\Delta x}}, & \text{se } \Delta x > 0 \\ -\frac{5}{\sqrt{-\Delta x}}, & \text{se } \Delta x < 0 \end{cases}, \quad (6.8)$$

che ci permette di scrivere le equazioni delle rette secanti a sinistra e a destra:

$$\begin{aligned} s_{\Delta x < 0} : y &= 1 - \frac{5}{\sqrt{-\Delta x}}(x - x_0) \\ s_{\Delta x > 0} : y &= 1 + \frac{5}{\sqrt{\Delta x}}(x - x_0) \end{aligned}$$

Eseguendo il limite per $\Delta x \rightarrow 0$:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -5 \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{-\Delta x}} = -\infty$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 5 \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty,$$

onde:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} s_{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s_{\Delta x < 0} = \tau_0^- = \{(x, y) \in \gamma \mid x = x_0, -\infty < y \leq 1\}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} s_{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s_{\Delta x > 0} = \tau_0^+ = \{(x, y) \in \gamma \mid x = x_0, 1 \leq y < +\infty\}$$

Ne consegue che $P_0(x_0, 1)$ è una cuspide per il grafico di $f(x)$ come illustrato in fig. 6.4

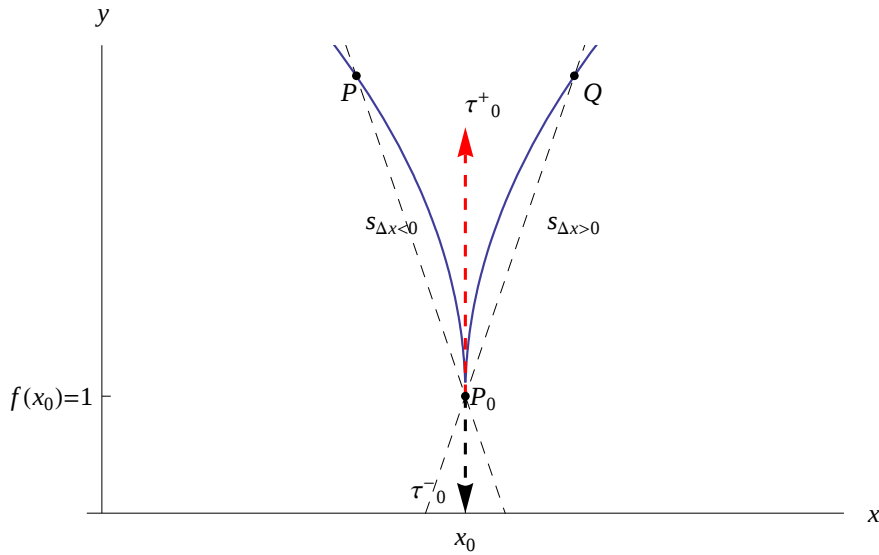


Figura 6.4: Il punto $P_0(x_0, 1)$ è un punto cuspidale per il diagramma cartesiano della funzione $f(x) = 1 + 5\sqrt{|x - x_0|}$.

Capitolo 7

Applicazioni. La derivata nell'ambiente di calcolo *Mathematica*

7.1 Routine

Elaboriamo una routine in ambiente *Mathematica* proposta da Stan Wagon nel suo libro [?]. Per inciso, Wagon è abbastanza misterioso per ciò che riguarda il contenuto analitico delle routine proposte in [?], per cui cercheremo di approfondire, per così dire, la parte teorica.

La routine genera un'animazione grafica in cui il diagramma cartesiano della derivata di una funzione reale di una variabile reale viene tracciato dalla retta tangente che si muove lungo il diagramma medesimo. In particolare, si assume come funzione di prova:

$$f(x) = \sin x, \quad (7.1)$$

per cui

$$f'(x) = \cos x \quad (7.2)$$

Per *plottare* la funzione (7.1) dobbiamo assegnare un intervallo limitato, ad esempio:

$$A(x_1) = [-x_1, x_1] \quad (7.3)$$

Qui è $x_1 > 0$ e in questo lavoro noi assumiamo tale grandezza come parametro il cui valore verrà poi fissato dall'utente¹. La derivata viene invece *plottata* sull'intervallo:

$$I_{n,\delta_r}(t) = \left[-\left(x_1 + \frac{\delta_r}{n} \right), t \right], \quad (7.4)$$

dove t è un parametro reale tale che $-x_1 \leq t \leq x_2$, mentre n è un intero positivo assegnato e $\delta_r = \frac{2x_1}{r}$ con $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, cosicchè δ_1 è l'ampiezza di $A(x_1)$, δ_2 è la semiampiezza, e così via. Per una visualizzazione grafica c'è la fig. 7.1.

Ad esempio, per $x_1 = 2$, $r = 10$, $n = 100$, $t = 1.2$, il grafico di $f(x)$ e della sua derivata sono riportati in fig. 7.2.

A noi interessa costruire il grafico della derivata attraverso il coefficiente angolare della retta tangente che, come è noto, è il valore assunto dalla derivata prima in un assegnato punto $x \in I_{n,\delta_r}(t)$. Iniziamo con l'osservare che l'equazione della retta tangente τ_0 a $\gamma : y = f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 \in A(x_1)$ è:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (7.5)$$

¹In [?] si assume definitivamente $x_1 = 2$.

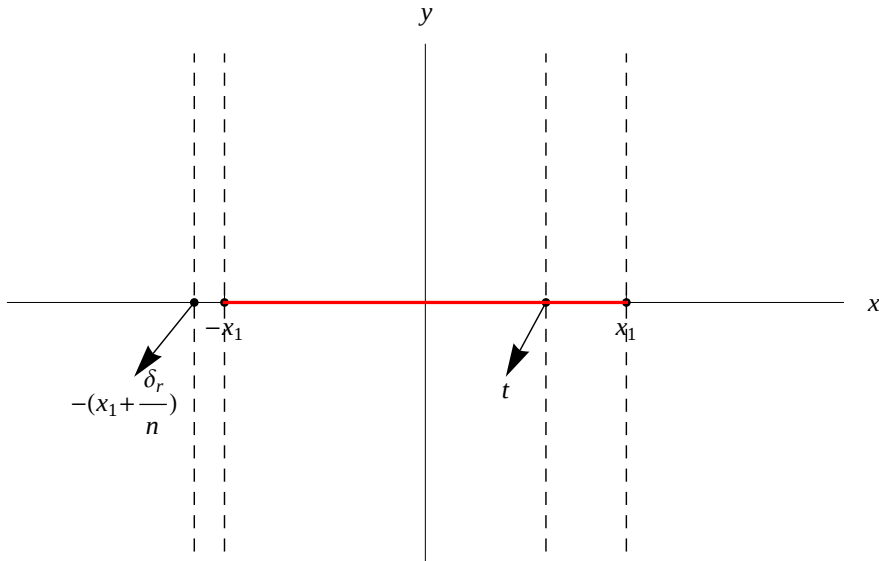


Figura 7.1: Il segmento rosso rappresenta l'intervallo in cui viene plottata la funzione $f(x) = \sin x$, mentre i punti $-(x_1 + \frac{\delta_r}{n})$ e t denotano gli estremi dell'intervallo in cui viene plottata la derivata.

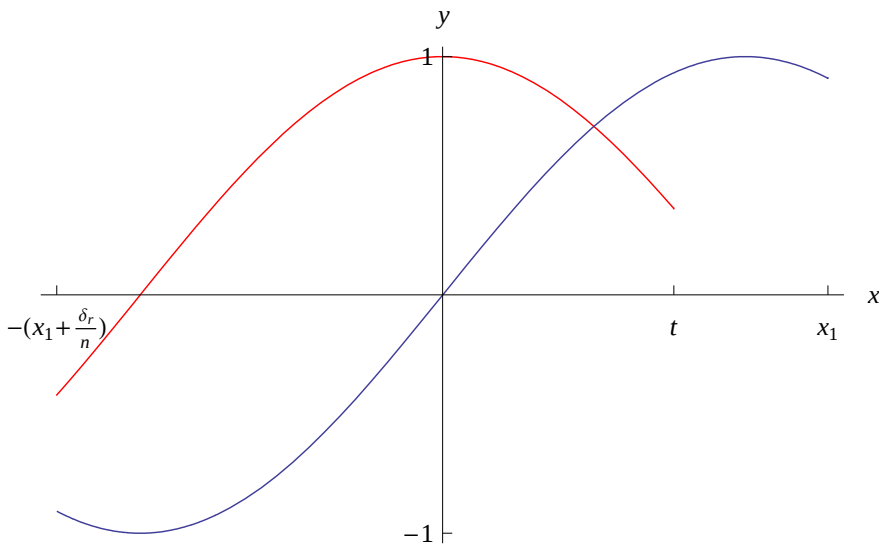


Figura 7.2: Grafici di $f(x)$ e $f'(x)$ (curva in rosso) nei rispettivi intervalli $A(x_1 = 2)$ $I_{n=100, \delta_{10}}$, con il parametro $t = 1.2$.

Una coppia di numeri direttori di τ_0 è

$$\lambda = 1, \mu = f'(x_0) \quad (7.6)$$

Rammentiamo che i numeri direttori sono le componenti di un qualunque vettore parallelo alla retta assegnata, per cui dalle (7.6) si ha

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{i} + f'(x_0)\mathbf{j}, \quad (7.7)$$

essendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi coordinati, come mostrato in fig. 7.3.

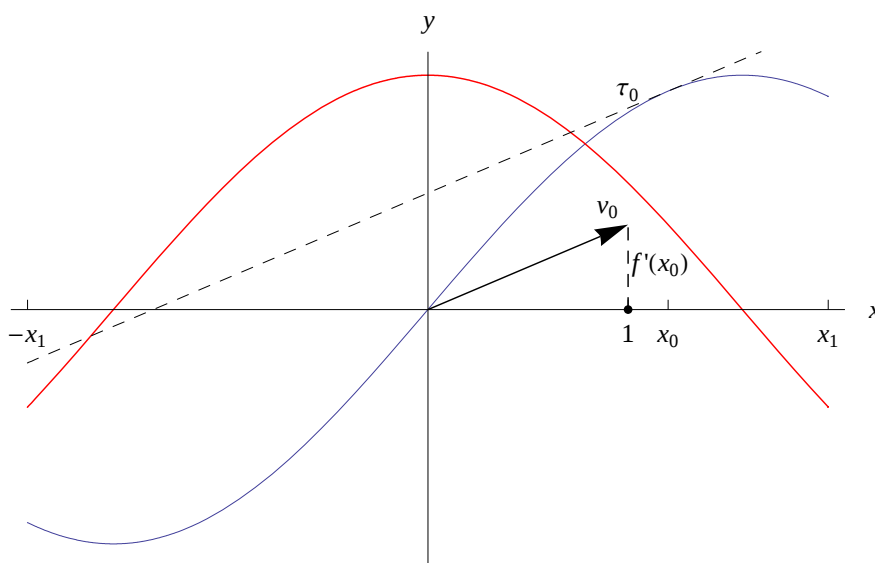


Figura 7.3: τ_0 è la retta tangente a $\gamma : y = f(x)$, mentre il vettore $\mathbf{v}_0$ ha componenti cartesiane 1 e $f'(x_0)$ rispettivamente che sono numeri direttori di τ_0 . Ne consegue che $\mathbf{v}_0$ è parallelo a τ_0 .

Inoltre, come illustrato in fig. 7.3, la componenti di $\mathbf{v}_0$ nella direzione dell'asse y è $f'(x_0)$. Se ora facciamo variare x_0 da $-x_1$ a x_1 , il vettore $\mathbf{v}_0$ ruota attorno all'origine conservando la compnente secondo l'asse x , come illustrato in questa [gif animata](#). Ora prendiamo due punti $P'_0, P''_0 \in \tau_0$ tali che P_0 è il punto medio di $\overline{P'_0, P''_0}$. Precisamente, P'_0 è il punto di ascissa $x'_0 = x_0 - \frac{\delta_r}{3}$, mentre l'ascissa di P''_0 è $x''_0 = x_0 + \frac{\delta_r}{3}$, per cui

$$P'_0 \left(x_0 - \frac{\delta_r}{3}, f(x_0) - \frac{\delta_r}{3} f'(x_0) \right), \quad P''_0 \left(x_0 + \frac{\delta_r}{3}, f(x_0) + \frac{\delta_r}{3} f'(x_0) \right), \quad (7.8)$$

come illustrato in fig. 7.4.

Arrivati a questo punto, non dobbiamo fare altro che far variare x_0 da $-x_1$ a x_1 . Ciò può essere fatto riprendendo la routine per il tracciamento dei grafici di $f(x)$ e $f'(x)$. Per i dettagli tecnici si rimanda al pdf contenente il codice *Mathematica* a questo [link](#).

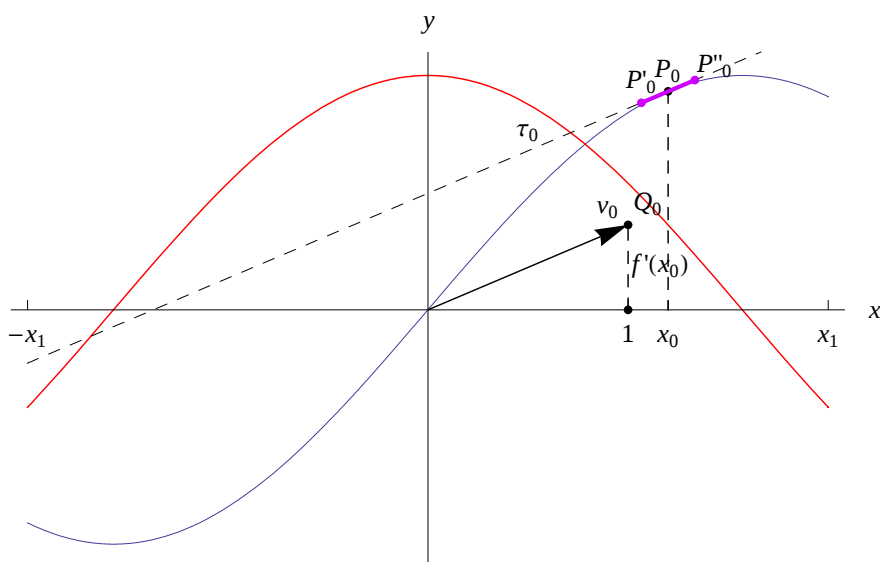


Figura 7.4: Il segmento congiungente i punti (2.284) è tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa x_0 .

Parte III

Applicazioni del calcolo differenziale

Capitolo 8

Funzioni monotone

8.1 Funzioni crescenti e decrescenti in un punto. Funzioni monotone in un intervallo

Sia f una funzione reale definita in un intervallo (a, b) non necessariamente limitato. Se f è crescente in (a, b) :

$$\forall x', x'' \in (a, b), \quad x' < x'' \implies f(x') \leq f(x'') \quad (8.1)$$

Se f è decrescente in (a, b) :

$$\forall x', x'' \in (a, b), \quad x' < x'' \implies f(x') \geq f(x'') \quad (8.2)$$

Ricordiamo che se le disuguaglianze a secondo membro delle rispettive implicazioni sono verificate in senso stretto, la funzione è *strettamente* crescente/decrescente.

Le condizioni precedenti si possono riscrivere nel seguente modo: comunque prendiamo $x_0 \in (a, b)$, se f è crescente in (a, b) , dovrà averci:

$$\begin{aligned} x < x_0 &\implies f(x) \leq f(x_0) \\ x > x_0 &\implies f(x) \geq f(x_0) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Se invece f è decrescente in (a, b)

$$\begin{aligned} x < x_0 &\implies f(x) \geq f(x_0) \\ x > x_0 &\implies f(x) \leq f(x_0) \end{aligned} \quad (8.4)$$

Ciò premesso, sussiste la seguente definizione

Definizione 87 La funzione f è **crescente** in $x_0 \in (a, b)$ se

$$\exists I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mid x \in (a, b) \cap I(x_0) \implies \begin{cases} x < x_0 \implies f(x) \leq f(x_0) \\ x > x_0 \implies f(x) \geq f(x_0) \end{cases} \quad (8.5)$$

La funzione f è **decrescente** in $x_0 \in (a, b)$ se

$$\exists I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mid x \in (a, b) \cap I(x_0) \implies \begin{cases} x < x_0 \implies f(x) \geq f(x_0) \\ x > x_0 \implies f(x) \leq f(x_0) \end{cases} \quad (8.6)$$

In altri termini, la funzione f è crescente/decrescente in x_0 , se le (8.3) (o 8.4) si verificano definitivamente intorno a x_0

Osservazione 33 La definizione 87 esprime localmente la monotonia di una funzione. Di contro, le (8.1)-(8.2) hanno carattere non locale.

È consuetudine asserire che nel caso di una disuguaglianza del tipo

$$x < x_0 \implies f(x) \leq f(x_0)$$

la funzione è crescente a sinistra di x_0 , mentre nel caso di

$$x > x_0 \implies f(x) \geq f(x_0)$$

la funzione è crescente a destra di x_0 . Analoghe conclusioni per la decrescenza. Ne segue che f è crescente/decescente in x_0 se e solo se è crescente/decescente a sinistra e a destra di x_0 . Nel caso di un intervallo chiuso $[a, b]$, può accadere: 1) $x_0 = a$, 2) $x_0 = b$. Nel caso 1 f può essere crescente/decescente solo a destra di x_0 , mentre nel caso 2 solo a sinistra di x_0 .

Osserviamo che se una funzione è crescente/decescente in (a, b) , lo è in ogni punto $x_0 \in (a, b)$. Ma non è vero il viceversa. Ad esempio, consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin^2 \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (8.7)$$

È facile persuadersi che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

da cui la continuità di f in $x = 0$. Il grafico oscilla tra l'asse x e la retta $y = x$, come vediamo in fig. ??

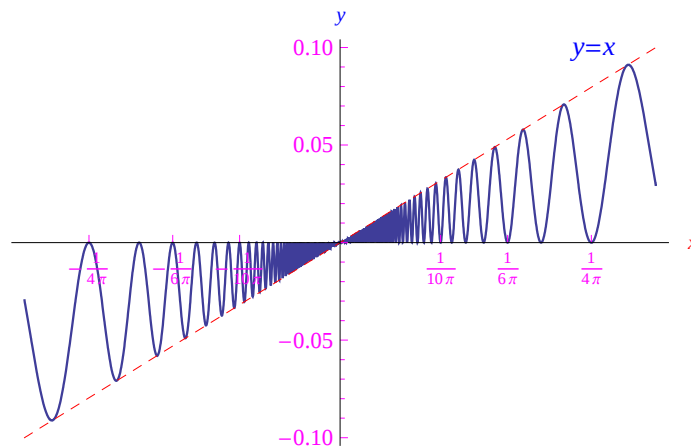


Figura 8.1: Grafico della funzione 8.7.

Riesce

$$\begin{aligned} x < 0 &\implies f(x) \leq 0 \\ x > 0 &\implies f(x) \geq 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

Più precisamente, $f(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x_k = \frac{1}{k\pi}$, $\forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Le (8.8) che la funzione è crescente in x_0 (ma non in senso stretto). Fissiamo la nostra attenzione sull'insieme degli zeri non banali:

$$\left\{ x_k = \frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\},$$

che è numerabile ed ha $x = 0$ per punto di accumulazione. Ne segue che in ogni intorno di $x = 0$ cadono infiniti zeri non banali, e quindi infiniti punti in cui è $f(x) \neq 0$. Quindi non esiste alcun intorno del predetto punto in cui f è crescente.

Una generalizzazione dell'esempio precedente è dato dalla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \left(1 + \sin^2 \frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad (8.9)$$

avendosi anche qui

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Per quanto visto nell'esempio precedente, il grafico di $f(x) - x$ oscilla tra l'asse x e la retta $y = x$, per cui il grafico di f oscilla tra le rette $y = x$ e $y = 2x$, come vediamo in fig. 8.2.

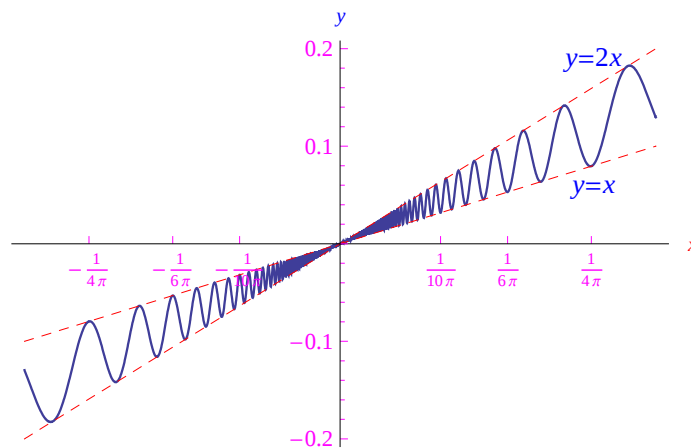


Figura 8.2: Grafico della funzione 8.9.

Riesce

$$\begin{aligned} x < 0 &\implies f(x) < 0 \\ x > 0 &\implies f(x) > 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

onde la funzione è strettamente crescente in $x = 0$. Tuttavia, in base a considerazioni analoghe a quelle dell'esempio precedente, non esiste alcun intorno di $x = 0$ in cui la funzione è strettamente crescente.

Per quanto stabilito, la monotonia locale non implica la monotonia non locale. Peraltro, ciò si verifica se la funzione è monotona in *ogni punto* dell'intervallo in cui è definita. Invero, sussiste il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione:

Teorema 18

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ crescente [decreciente]} \\ \text{in } (a, b) \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{c} f \text{ è crescente [decreciente]} \\ \text{in ogni punto di } (a, b) \end{array} \right)$$

Si badi che il teorema 18 potrebbe venire meno per funzioni non definite in un intervallo. Ad esempio, la funzione $f(x) = \tan x$ (grafico in fig. 8.3) che come sappiamo è definita in

$$X = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\},$$

non è crescente in X , ma lo è in ogni punto di X , come anche negli infiniti intervalli aperti

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

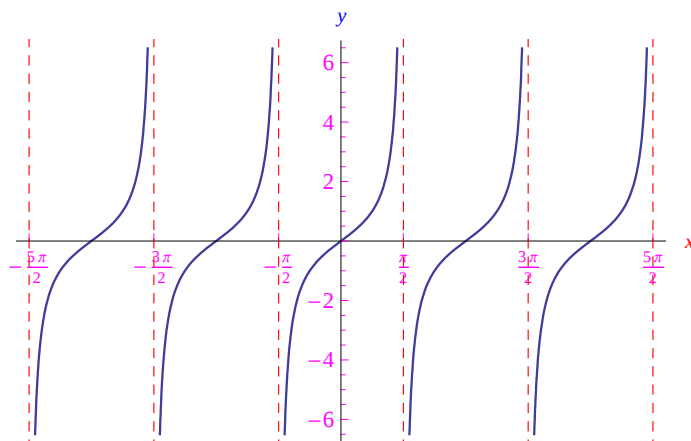


Figura 8.3: Grafico della funzione $\tan x$.

Capitolo 9

Proprietà della derivata di una funzione

9.1 Derivabilità di una funzione e continuità della derivata

Dimostriamo un teorema notevole (conseguenza del teorema di Lagrange) nel caso delle funzioni definite in un intervallo (limitato o illimitato)

Teorema 19 Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in (a, b)$ e derivabile intorno a x_0 . Cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (9.1)$$

e

$$\exists I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in (a, b) \cap I(x_0) - \{x_0\}$$

È dunque definita la funzione

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (9.2)$$

in un intorno di x_0 (escluso al più tale punto).

Se f' è regolare a sinistra [a destra] in x_0 , si ha:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \quad [f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)] \quad (9.3)$$

ovvero la funzione f è dotata di derivata sinistra [destra] (eventualmente infinita). Se in particolare, f' è convergente in x_0 , la funzione f è ivi derivabile:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \quad (9.4)$$

Dimostrazione. Per $x > x_0$ l'applicazione del teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[x_0, x]$, restituisce:

$$\exists \xi \in (x_0, x) \mid \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \quad (9.5)$$

Per ipotesi, la funzione f' è regolare a destra:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lambda, \quad |\lambda| \leq +\infty$$

Dalla (9.5)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\xi \rightarrow x_0^+} f'(\xi) = \lambda$$

Cioè

$$f'_+(x_0) = \lambda$$

In maniera analoga per $x < x_0$. ■

Esempio 84 Studiamo il comportamento della derivata della funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ nel punto $x_0 = 0$, ove è manifestamente continua. Inoltre

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

Dal momento che tale limite non esiste, la funzione non è derivabile in x_0 . Tuttavia, è derivabile in un intorno di tale punto. Più precisamente:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Ne segue che f è derivabile a sinistra e a destra in x_0 :

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$$

È interessante il caso particolare della convergenza; se f' è convergente in x_0 , si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

Ne consegue che nelle ipotesi del teorema 19, f' non può discontinuità eliminabili. Segue il corollario:

Corollario 3 Se alle ipotesi del teorema 19 aggiungiamo la derivabilità di f in x_0 , si ha che la regolarità di f' a sinistra [a destra] in x_0 , implica la continuità a sinistra [a destra].

Dimostrazione. Se f' è regolare a sinistra e a destra in x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = f'_-(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'_+(x_0)$$

Dal momento che per ipotesi f è derivabile in x_0 , lo è necessariamente a sinistra e a destra:

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

onde l'asserto. ■

Ne concludiamo che nelle ipotesi del teorema 19 e del corollario 3, la derivata f' o è continua in x_0 o ha in tale punto una discontinuità di seconda specie.

Esempio 85 Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{per } x \neq 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad (9.6)$$

manifestamente continua in $(-\infty, +\infty)$. In particolare, nel punto $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

La derivata in tale punto è

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

cioè la funzione è derivabile in x_0 . Tuttavia, derivando la (9.6)

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

che è manifestamente non regolare in x_0 , presentando ivi una discontinuità di seconda specie. In fig. 9.1 riportiamo il grafico della funzione assegnata.

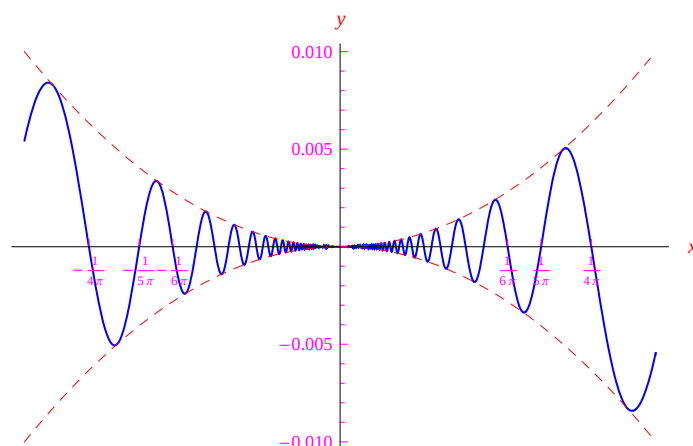


Figura 9.1: Grafico della funzione 9.6. La derivata nulla nel punto $x = 0$ ci dice che la retta secante alla curva $y = f(x)$ per i punti $(0, 0)$ e $(x, f(x))$ tende, per $x \rightarrow 0$, all'asse x . Ciò perché il rapporto incrementale è oscillante in un intorno di $x = 0$ con oscillazioni che si smorzano per $x \rightarrow 0$.

Esempio 86 Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{per } x \neq 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad (9.7)$$

manifestamente continua in $(-\infty, +\infty)$. In particolare, nel punto $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Proviamo a calcolare la derivata in tale punto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

Ma questo limite non esiste, onde la funzione assegnata non è derivabile in x_0 . Applicando le regole di derivazione otteniamo

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

che è manifestamente non regolare in x_0 , presentando ivi una discontinuità di seconda specie. In fig. ?? riportiamo il grafico della funzione assegnata.

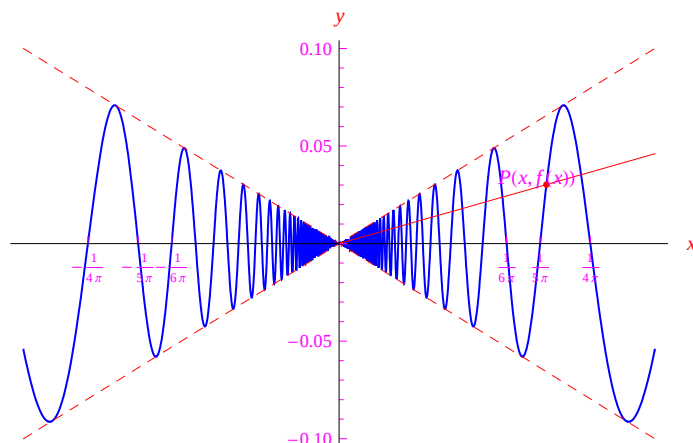


Figura 9.2: Grafico della funzione 9.7. Il rapporto incrementale relativo al punto $x_0 = 0$, cioè $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ compie infinite oscillazioni in un intorno di 0, di raggio comunque piccolo. Tali oscillazioni non si smorzano per $x \rightarrow 0$. Geometricamente significa che la retta secante non tende ad alcuna posizione limite quando il punto $P(x, f(x))$ tende a $O(0, 0)$.

9.2 Conseguenze del teorema di L'Hospital

Teorema 20 Sia f una funzione reale di una variabile reale definita in X (illimitato superiormente) e derivabile in un intorno di $+\infty$.

1. Se f è limitata nel predetto intorno, e se la derivata f' è regolare per $x \rightarrow +\infty$, necessariamente f' è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$. Cioè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$$

2. Se f è convergente per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R},$$

nelle medesime ipotesi su f' di cui al punto 1, necessariamente f' è per $x \rightarrow +\infty$, un infinitesimo di ordine maggiore di 1 (assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x^{-1}$). Cioè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 0$$

Conclusioni analoghe per una funzione derivabile in un intorno di $-\infty$.

Dimostrazione. Per ipotesi f è limitata in un intorno di $+\infty$, onde

$$\exists M > 0 \mid |f(x)| < M, \quad \forall x \in X \cap I(+\infty), \quad (9.8)$$

essendo $I(+\infty)$ un appropriato intorno di $+\infty$. Calcoliamo il limite (se esiste)

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]$$

La (9.8) implica

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

per cui $\lambda = 1$. D'altra parte, possiamo calcolare λ con la regola di L'Hospital:

$$1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + f'(x)] \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$$

Dimostriamo la seconda parte del teorema.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - l + 1] = 1$$

Segue

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[f(x) - l + 1]}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - l + 1 + xf'(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{[f(x) - l + 1]}_{=1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 0 \end{aligned}$$

Si procede in modo simile per $x \rightarrow -\infty$. ■

Interpretazione geometrica. Senza perdita di generalità, consideriamo il caso $x \rightarrow +\infty$; la retta tangente al diagramma cartesiano γ della funzione, nel punto $P(x, f(x))$ tende all'asintoto orizzontale $y = l$, come nell'esempio seguente:

Esempio 87 Sia data la funzione

$$f(x) = 1 - e^{-x}$$

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1,$$

cosicché la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a destra per il diagramma cartesiano di f . La derivata è

$$f'(x) = e^{-x},$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 0$$

Se la derivata f' è non regolare per $x \rightarrow +\infty$, la predetta retta tangente non tende a una posizione limite, ma oscilla indefinitamente intorno all'asintoto, come mostra l'esempio seguente [1]:

Esempio 88 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x}, & \text{per } x \neq 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad (9.9)$$

Osserviamo preliminarmente che tale funzione è continua in $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \sqrt{t} \right) = 0$$

Riesce poi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

giacché $\sin(x^2)$ pur essendo non regolare all'infinito, è ivi limitata. Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a destra e a sinistra.

Calcoliamo la derivata

$$f'(x) = 2 \cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

avendosi

$$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos(x^2) \implies \nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x)$$

Ne consegue che la retta tangente al grafico di f nel punto $P(x, f(x))$ per $x \rightarrow \pm\infty$ oscilla indefinitamente intorno all'asse x .

Teorema 21

Ipotesi:

1. Sia f una funzione non negativa in $[a, b]$, ivi continua e derivabile nei punti interni, i.e. in (a, b) .
2. Sia $\xi \in (a, b)$ uno zero di f .

Tesi:

- ξ è punto di minimo relativo.
- Per $x \rightarrow \xi$, le funzioni $\sqrt{f(x)}$ e $f'(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

Dimostrazione. La prima parte del teorema è evidente. Per dimostrare la seconda parte, calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)} &= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \cdot \frac{1}{f''(x)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \right] \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f''(x)}}_{\lambda > 0} \\ &= \frac{\lambda}{2} \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \end{aligned}$$

Definiamo

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)},$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \psi(x) = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \xi} \psi(x)}$$

Per le ipotesi fatte, la funzione $\psi(x)$ è regolare in $x = \xi$:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \psi(x) = l \quad (\text{finito o infinito})$$

Ne segue

$$l^2 = \frac{\lambda}{2},$$

onde l'asserto

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \psi(x) = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \neq 0$$

■

9.3 Punti estremanti

Esercizio 32 Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin \frac{10}{x}, & \text{per } x \neq 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad (9.10)$$

Soluzione

Simmetrie

La funzione è manifestamente dispari $f(-x) \equiv -f(x)$.

Simmetrie

Vediamo nel punto $x = 0$

$$|f(x)| = \left| e^{-1/x^2} \sin \frac{10}{x} \right| \leq \left| e^{-1/x^2} \right|,$$

per cui

$$-e^{-1/x^2} \leq f(x) \leq e^{-1/x^2} \quad (9.11)$$

Le funzioni $\pm e^{-1/x^2}$ sono infinitesime per $x \rightarrow 0$, onde per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Ne concludiamo che la funzione è continua in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(e^{-1/x^2} \sin \frac{10}{x} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-1/x^2}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin \frac{10}{x}}_{=0} = 0$$

Tuttavia, l'asse x non è asintoto orizzontale giacchè dalla (9.11) vediamo che il grafico oscilla tra le curve $y = \pm e^{-1/x^2}$.

Derivabilità

La derivata prima nel punto $x = 0$, può essere valutata applicando direttamente la definizione di derivata:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-1/x^2}}{x} \sin \frac{10}{x} \right)$$

Qui abbiamo il limite del prodotto di due funzioni, di cui una non regolare ($\sin \frac{10}{x}$) e l'altra infinitesima per $x \rightarrow 0$. La funzione non regolare è comunque limitata intorno al predetto punto, onde il limite è nullo:

$$f'(0) = 0$$

Per $x \neq 0$ applichiamo le regole di derivazione, ottenendo

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \sin \frac{10}{x} - \frac{10}{x^2} e^{-1/x^2} \cos \frac{10}{x}$$

Per le stesse considerazioni:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$$

Ne segue che la derivata prima è continua in $x = 0$. Tale procedimento può essere iterato a tutti gli ordini, giungendo così alla conclusione che la funzione assegnata è continua insieme alle sue derivate di ordine comunque elevato. In altri termini, la funzione è di classe C^∞ . Tuttavia non è di classe C^ω i.e. non è analitica, in quanto non è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di $x = 0$. Precisamente, il predetto sviluppo è identicamente nullo, mentre la funzione non è identicamente nulla in un intorno dello zero.

Si noti che il punto $x = 0$ è punto estremale ma non estremante, i.e. non è di max/min relativo, in quanto in ogni intorno di $x = 0$ il grafico della funzione compie infinite oscillazioni che si smorzano per $x \rightarrow 0$, per cui in ogni intorno di tale punto esistono x tali che $f(x) > f(0)$ e punti x' tali che $f(x') < f(0)$.

Il grafico è tracciato in fig. 9.3.

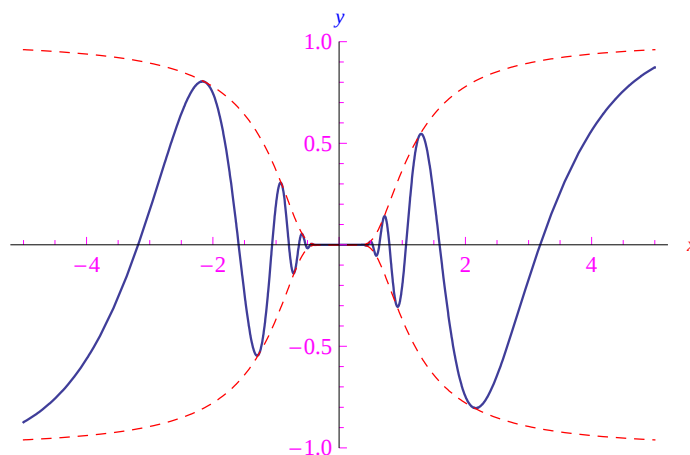


Figura 9.3: Grafico della funzione 9.10.

Parte IV

Serie numeriche e serie di funzioni

Capitolo 10

Serie numeriche

10.1 Definizioni e prime proprietà

Assegnata una successione di elementi di $\mathbb{R}$:

$$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} : u_0, u_1, \dots, u_n, \dots \quad (10.1)$$

la notazione

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots \quad \text{oppure} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad (10.2)$$

rappresenta *formalmente* la somma degli infiniti numeri $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$. Per assegnare un significato al simbolo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad (10.3)$$

procediamo con un'operazione di passaggio al limite, definendo dapprima la **somma parziale di ordine N** :

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n$$

quale elemento della successione di elementi di $\mathbb{R}$:

$$\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}} : S_0, S_1, \dots, S_N, \dots \quad (10.4)$$

È intuitivamente ovvio che il significato del simbolo (10.3) è univocamente determinato dal comportamento all'infinito della successione (10.4). Diremo, dunque, che (10.3) è una **serie numerica** o semplicemente, una **serie**.

Definizione 88 La serie (10.3) è **convergente** se tale è la successione (10.4), cioè se

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = S \in \mathbb{R} \quad (10.5)$$

Il numero reale S è la **somma** della serie e si scrive:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S \quad (10.6)$$

La serie (10.3) è **divergente** se tale è la successione (10.4), cioè se

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \begin{cases} +\infty & (\text{diverge positivamente}) \\ -\infty & (\text{diverge negativamente}) \end{cases} \quad (10.7)$$

Si scrive:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & (\text{diverge positivamente}) \\ -\infty & (\text{diverge negativamente}) \end{cases} \quad (10.8)$$

La serie (10.3) è **indeterminata** se tale è la successione (10.4), cioè se

$$\nexists \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N \quad (10.9)$$

In tal caso non ha senso determinare la somma della serie medesima.

Vediamo alcuni esempi. Sia data la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (10.10)$$

La cui somma parziale di ordine N è

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{N(N+1)}$$

che è poco maneggevole. Riduciamo il termine n -esimo in frazioni semplici:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

per cui

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ S_2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ S_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ &\dots \\ S_N &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{N} + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

Ne segue

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = 1$$

Ne concludiamo che la serie assegnata è convergente ed ha somma 1:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Di seguito la cosiddetta **serie geometrica**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1},$$

essendo x un numero reale assegnato ad arbitrio. La denominazione *geometrica* deriva dal fatto che i termini della serie

$$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, \dots$$

sono in progressione geometrica di ragione x . Vediamo che per $x = 1$ si ha

$$S_N = N \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = +\infty$$

Cioè la serie geometrica diverge positivamente per $x = 1$. Per $x \neq 1$ si ha

$$S_N = \frac{1 - x^N}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^N}{1 - x} \quad (10.11)$$

Quindi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \frac{1}{1 - x} - \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{x^N}{1 - x}, \quad \forall x \neq 1$$

Il comportamento è controllato dalla successione $\{x^N\}$ ed è facile convincersi che è indeterminata per $x \leq -1$ e tale è la serie geometrica in tale intervallo. Per $x > 1$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \frac{1}{1 - x} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{x^N}{x - 1} = \frac{1}{1 - x} + (+\infty) = +\infty$$

onde la divergenza della serie geometrica. Per $-1 < x < 1$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} x^N = 0 \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \frac{1}{1 - x}$$

Conclusione:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \begin{cases} \text{indeterminata,} & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{1}{1-x}, & \text{se } |x| < 1 \\ +\infty, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (10.12)$$

10.2 Criterio generale di convergenza e suo corollario. La serie armonica

Teorema 22 (**Criterio generale di convergenza**)

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon, \quad \text{con } p \in \mathbb{N} \text{ arbitrario}$$

Dimostrazione. La serie assegnata converge se e solo se converge la successione delle sue somme parziali:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = S \in \mathbb{R}$$

Per il criterio di convergenza di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid M, N > \nu_\varepsilon \implies |S_M - S_N| < \varepsilon$$

Osserviamo che l'intero naturale $p = M - N$ è arbitrario giacché tali sono M, N . Quindi

$$\begin{aligned} S_M - S_N &= S_{N+p} - S_N = \sum_{n=0}^{N+p} u_n - \sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N u_n + \sum_{n=N+1}^{N+p} u_n - \sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=N+1}^{N+p} u_n \\ &\implies \left| \sum_{n=N+1}^{N+p} u_n \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

cioè l'asserto. ■

Dal teorema appena dimostrato segue il corollario:

Teorema 23

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad (10.13)$$

Dimostrazione. Per ipotesi la serie converge, quindi per il criterio generale di convergenza con $p = 1$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies |u_n| < \varepsilon$$

cioè l'asserto. ■

Si noti che il teorema non si inverte, per cui abbiamo un criterio necessario ma non sufficiente per la convergenza di una serie:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \nRightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge} \quad (10.14)$$

Precisamente, condizione necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza di una serie, è che la successione i cui termini sono i termini della serie, sia infinitesima. Consideriamo, ad esempio la **serie armonica**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad (10.15)$$

Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ma la serie non converge. Per mostrare ciò, applichiamo il criterio generale di convergenza con $p = n$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| &= \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \\ &> n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

per cui

$$\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \nexists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| < \varepsilon$$

D'altra parte, la successione delle somme parziali è crescente:

$$S_{N'>N} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N'} > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = S_N$$

per cui

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = +\infty$$

Ne concludiamo che la serie armonica è positivamente divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad (10.16)$$

10.3 Combinazione lineare di serie

Siano date le seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(1)}, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(2)}, \dots, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(m)} \quad (10.17)$$

Definizione 89 Una **combinazione lineare** delle serie (10.17), è una serie il cui termine n -esimo è una combinazione lineare dei termini n -esimi di singola serie. Cioè

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (c_1 u_n^{(1)} + c_2 u_n^{(2)} + \dots + c_m u_n^{(m)}), \quad c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R} \quad (10.18)$$

Teorema 24 Hp. Le (10.17) sono convergenti:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} = S^{(k)} \in \mathbb{R}, \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (10.19)$$

Th. Una qualunque combinazione lineare delle serie assegnate, è convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^m c_k u_n^{(k)} = \sum_{k=1}^m c_k S^{(k)} \equiv S \in \mathbb{R} \quad (10.20)$$

Dimostrazione. La somma parziale di ordine N della serie k -esima è

$$S_N^{(k)} = \sum_{n=0}^N u_n^{(k)}$$

Per ipotesi:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N^{(k)} = S^{(k)} \in \mathbb{R}, \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

La somma parziale di ordine N della combinazione lineare è:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^m c_k u_n^{(k)} = \sum_{k=1}^m c_k \sum_{n=0}^N u_n^{(k)} = \sum_{k=1}^m c_k S_N^{(k)} \\ \Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m c_k S_N^{(k)} &= \sum_{k=1}^m c_k \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N^{(k)} = \sum_{k=1}^m c_k S^{(k)}, \end{aligned}$$

cioè l'asserto. ■

10.4 Resto di una serie

Sia data la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad (10.21)$$

Per un assegnato intero naturale p non nullo, possiamo scrivere:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^p u_n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n \quad (10.22)$$

Definizione 90 *La serie*

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n \quad (10.23)$$

ottenuta dalla serie assegnata cancellando i primi p termini, si dice **resto di ordine p** della serie medesima.

Ne segue che assegnare p equivale a determinare univocamente due serie distinte:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \quad \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n \quad (10.24)$$

Dimostriamo il teorema:

Teorema 25 *La serie assegnata e il suo resto di ordine p , hanno lo stesso comportamento (convergente, divergente, indeterminata).*

Dimostrazione. Scriviamo le somme parziali di ordine N di singola serie:

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n, \quad T_N = \sum_{n=p+1}^N u_n, \quad (N > p+1)$$

L'asserto segue immediatamente:

$$S_N = \sum_{n=0}^p u_n + \sum_{n=p+1}^N u_n = S_p + T_N \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} T_N = -S_p + \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$$

■

Nel caso particolare di convergenza:

$$T = S - S_p \iff \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^p u_n \quad (10.25)$$

10.5 Proprietà associativa

Come è noto, l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali assume la **struttura algebrica** di campo, attraverso un numero finito di assiomi relativi alle leggi di composizione «addizione» (+) e «moltiplicazione» ($\cdot$). Riferiamoci in particolare alla proprietà associativa dell'addizione:

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (10.26)$$

Ci proponiamo di verificare se tale proprietà si conserva nel caso di un numero infinito di addendi. A tale scopo, consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots \quad (10.27)$$

per cui siamo tentati a riscrivere tale somma di infiniti termini, in una forma del tipo:

$$(u_0 + u_1) + (u_2 + u_3 + u_4) \dots$$

Per rendere operativa l'associazione degli infiniti termini di una serie, diamo la seguente definizione:

Definizione 91 *La serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

è dedotta dalla (10.27) **associandone i termini**, se esiste una successione di indici:

$$\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_n < \dots \quad (10.28)$$

tale che

$$v_0 = u_0 + u_1 + \dots + u_{\nu_0} \quad (10.29)$$

$$v_1 = u_{\nu_0+1} + u_{\nu_0+2} + \dots + u_{\nu_1}$$

$$v_2 = u_{\nu_1+1} + u_{\nu_1+2} + \dots + u_{\nu_2}$$

...

$$v_n = u_{\nu_{n-1}+1} + u_{\nu_{n-1}+2} + \dots + u_{\nu_n}$$

...

In modo più compatto:

$$v_0 = \sum_{k=0}^{\nu_0} u_k, \quad v_n = \sum_{k=1}^{\nu_n} u_{\nu_{n-1}+k} \quad (10.30)$$

Ad esempio:

$$\nu_0 = 2, \nu_1 = 5, \nu_2 = 6, \nu_3 = 9, \nu_4 = 12, \dots$$

per cui

$$v_0 = u_0 + u_1 + u_2$$

$$v_1 = u_3 + u_4 + u_5$$

$$v_2 = u_6$$

$$v_3 = u_7 + u_8 + u_9$$

$$v_4 = u_{10} + u_{11} + u_{12}$$

...

Ciò premesso, dimostriamo:

Teorema 26 Hp.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S \in [-\infty, +\infty] \quad (\text{cioè, la serie converge o diverge}) \quad (10.31)$$

Th. Per ogni serie dedotta dalla (10.31) associandone i termini, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = S \quad (10.32)$$

Dimostrazione. Denotando con T_N la somma parziale di ordine N relativa alla serie dedotta per associazione di termini, si ha:

$$\begin{aligned} T_0 &= v_0 = u_0 + u_1 + \dots + u_{\nu_0} = S_{\nu_0} \\ T_1 &= v_0 + v_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_{\nu_0} + u_{\nu_0+1} + u_{\nu_0+2} + \dots + u_{\nu_1} = S_{\nu_1} \\ &\dots \\ T_N &= S_{\nu_N} \end{aligned}$$

z

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = S \in [-\infty, +\infty] \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} T_N = S$$

■

L'identità

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

esprime la proprietà associativa dell'addizione nel caso di un numero infinito di addendi, a patto che la serie assegnata sia convergente o divergente. Infatti, tale proprietà non vale per le serie indeterminate. Ad esempio:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

da cui può essere dedotta la serie

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

la cui somma è 0. Utilizzando una notazione imprecisa ma suggestiva:

$$\underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \dots}_{\infty \text{ termini}} \neq \underbrace{(1 - 1) + (1 - 1) + \dots}_{\infty \text{ termini}}$$

10.6 Serie a termini di segno costante. La funzione zeta di Riemann

Definizione 92 Una serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

si dice **a termini di segno costante** se

$$(u_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{oppure} \quad (u_n \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N})$$

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso delle serie i cui termini sono non negativi.

Teorema 27 *Una serie a termini non negativi non è mai indeterminata.*

Dimostrazione. Abbiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \mid u_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Consideriamo la successione delle somme parziali:

$$\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}} : S_0, S_1, \dots, S_N, \dots$$

che è ovviamente una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f : N \in \mathbb{N} &\rightarrow S_N = f(N), \quad \forall N \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Dal momento che $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ è monotonamente crescente, per una nota proprietà:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = S \leq +\infty$$

■

Osservazione 34

$$S = \sup f(\mathbb{N})$$

dove

$$f(\mathbb{N}) = \{f(N) \mid N \in \mathbb{N}\}$$

cioè il codominio della predetta funzione f .

Teorema 28 *Assegnate le serie a termini non negativi:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

tali che

$$u_n \leq cv_n \quad (c > 0)$$

si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty &\implies \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty \\ \sum_{n=0}^{+\infty} v_n < +\infty &\implies \sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty \end{aligned}$$

Dimostrazione. Consideriamo le somme parziali di singola serie:

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n, \quad T_N = \sum_{n=0}^N v_n$$

Ne segue

$$u_n \leq cv_n \implies S_N \leq cT_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S \leq cT,$$

da cui:

$$S = +\infty \implies T = +\infty$$

$$T < +\infty \implies S < +\infty$$

■

Teorema 29 Per un assegnato $\lambda \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\lambda}$$

converge per $\lambda > 1$, diverge per $\lambda \leq 1$.

Dimostrazione. Per $\lambda = 1$ abbiamo la serie armonica che per quanto visto in precedenza, è divergente. In tutti gli altri casi abbiamo comunque una serie a termini positivi per cui possiamo applicare i teoremi precedenti. In particolare:

$$\lambda < 1 \implies \frac{1}{n} < \frac{1}{n^\lambda} \implies \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty \implies \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\lambda} = +\infty \right)$$

Per $\lambda > 1$ prendiamo ad arbitrio p intero naturale non nullo, e determiniamo la somma parziale di ordine 2^{p-1} :

$$S_{2^{p-1}} = \sum_{n=1}^{2^{p-1}} \frac{1}{n^\lambda}$$

che può essere espansa raggruppando opportunamente i singoli termini:

$$\begin{aligned} S_{2^{p-1}} &= 1 + \left(\frac{1}{2^\lambda} + \frac{1}{3^\lambda} \right) + \left(\frac{1}{4^\lambda} + \frac{1}{5^\lambda} + \frac{1}{6^\lambda} + \frac{1}{7^\lambda} \right) + \\ &+ \dots + \left[\frac{1}{(2^{p-1})^\lambda} + \frac{1}{(2^{p-1}+1)^\lambda} + \dots + \frac{1}{(2^p-1)^\lambda} \right] \\ &< 1 + 2 \frac{1}{2^\lambda} + 4 \frac{1}{4^\lambda} + \dots + 2^{p-1} \frac{1}{(2^{p-1})^\lambda} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{\lambda-1}} + \left(\frac{1}{2^{\lambda-1}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^{\lambda-1}} \right)^{p-1} \equiv T_{p-1} \end{aligned}$$

essendo

$$T_{p-1} = \sum_{n=0}^{p-1} x^n, \quad x \equiv \frac{1}{2^{\lambda-1}}$$

la somma parziale di ordine $p-1$ della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Risulta:

$$x = \frac{1}{2^{\lambda-1}} \xrightarrow{\lambda > 1} 0 < x < 1$$

per cui la predetta serie geometrica è a termini positivi, ed inoltre converge:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = \frac{2^{\lambda-1}}{2^{\lambda-1}-1} \equiv T$$

Segue

$$S_{2^p-1} < T_{p-1} < \frac{2^{\lambda-1}}{2^{\lambda-1}-1}$$

Ciò implica che il codominio della successione $\{S_N\}$ è superiormente limitato. Infatti:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \mid 2^{p-1} > N \implies S_N < S_{2^p-1} < \frac{2^{\lambda-1}}{2^{\lambda-1}-1}$$

e quindi l'asserto:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = S < +\infty$$

■

La serie appena studiata, definisce nel campo reale la cosiddetta *funzione zeta di Riemann* che in realtà, è una funzione di variabile complessa. Nel campo reale è definita da:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}, \quad x \in (1, +\infty)$$

Mostriamo alcune interessanti proprietà della funzione zeta.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^\lambda} = \frac{\zeta(\lambda)}{2^\lambda} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^\lambda} = \left(1 - \frac{1}{2^\lambda}\right) \zeta(\lambda) \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\lambda} = \left(1 - \frac{1}{2^{\lambda-1}}\right) \zeta(\lambda) \end{array} \right. \quad (10.33)$$

La prima è ovvia:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda}$$

Per dimostrare la seconda componiamo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda} = \zeta(\lambda) \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^\lambda} = \frac{\zeta(\lambda)}{2^\lambda} \end{array} \right. \quad (10.34)$$

Espandiamo le singole serie, e nella prima utilizziamo la proprietà associativa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{1}{2^\lambda}\right) + \left(\frac{1}{3^\lambda} + \frac{1}{4^\lambda}\right) + \left(\frac{1}{5^\lambda} + \frac{1}{6^\lambda}\right) + \dots = \zeta(\lambda) \\ \frac{1}{2^\lambda} + \frac{1}{4^\lambda} + \frac{1}{6^\lambda} + \dots = \frac{\zeta(\lambda)}{2^\lambda} \end{array} \right. \quad (10.35)$$

Sottraendo membro a membro:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^\lambda} = \left(1 - \frac{1}{2^\lambda}\right) \zeta(\lambda)$$

Per dimostrare la terza, componiamo il sistema

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda} = \zeta(\lambda) \\ 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^\lambda} = 2 \cdot \frac{\zeta(\lambda)}{2^\lambda} \end{cases} \quad (10.36)$$

Espandendo e sottraendo membro a membro

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\lambda} = \left(1 - \frac{1}{2^{\lambda-1}}\right) \zeta(\lambda) \quad (10.37)$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\lambda}$$

definisce una nuova funzione, denominata *funzione alternata di Riemann*. Per quanto precede

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\lambda} = \left(1 - \frac{1}{2^{\lambda-1}}\right) \zeta(\lambda)$$

per cui ci aspettiamo la convergenza se e solo se $\lambda > 1$.

10.7 Serie assolutamente convergenti

A una qualunque serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

possiamo associare la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

i cui termini sono i valori assoluti dei termini della serie assegnata.

Teorema 30

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \text{ è convergente} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ è convergente}$$

Dimostrazione. Per il criterio generale di convergenza (Teorema 22) applicato come condizione necessaria, l'ipotesi implica

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \right| < \varepsilon$$

Per una nota proprietà del valore assoluto:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon \implies \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ è convergente}$$

L'implicazione segue dal predetto criterio generale di convergenza, applicato come condizione sufficiente. ■

Il teorema appena dimostrato non si inverte:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ è convergente} \not\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \text{ è convergente}$$

Inoltre, giustifica la seguente definizione:

Definizione 93 Una serie si dice **assolutamente convergente** se è convergente la serie i cui termini sono i valori assoluti dei termini della serie assegnata.

Il Teorema 24 si generalizza immediatamente:

Teorema 31 Una qualunque combinazione lineare di serie assolutamente convergenti, è a sua volta assolutamente convergente.

10.8 Proprietà commutativa

Nel paragrafo 10.5 abbiamo visto che la proprietà associativa dell'operazione di addizione nel campo reale, può essere estesa alla somma di infiniti termini, a patto che la corrispondente serie non sia indeterminata. Per la proprietà commutativa, invece, occorre una condizione più forte espressa dal seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione:

Teorema 32 La proprietà commutativa dell'operazione di addizione nel campo reale, può essere estesa alla somma di infiniti termini, a patto che la corrispondente serie sia assolutamente convergente.

10.9 Criteri di convergenza assoluta

Si tratta di importantissimi teoremi che forniscono delle condizioni sufficienti per la convergenza assoluta di una serie numerica.

Criterio 7 (Criterio di confronto)

Sia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \tag{10.38}$$

un'assegnata serie a termini positivi. Se

$$|u_n| \leq cp_n, \quad \text{con } c > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{o da un certo indice in poi})$$

e se la serie (10.38) converge, allora la serie $\sum_n u_n$ converge assolutamente. Se

$$|u_n| \geq cp_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{o da un certo indice in poi})$$

e se la serie (10.38) diverge, allora la serie $\sum_n u_n$ non converge assolutamente.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal teorema 28 ■

Corollario 4 Data la serie $\sum_n u_n$, se u_n è per $n \rightarrow +\infty$ un infinitesimo di ordine α (rispetto all'infinitesimo di riferimento $1/n$), si ha:

$$\begin{aligned}\alpha > 1 &\implies \sum_n u_n \text{ è assolutamente convergente} \\ \alpha \leq 1 &\implies \sum_n u_n \text{ non è assolutamente convergente}\end{aligned}$$

Dimostrazione. Per ipotesi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha |u_n| = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \exists a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid a \leq n^\alpha |u_n| \leq b, \quad \forall n > \nu$$

Cioè

$$\exists \nu \in \mathbb{N} \mid n > \nu \implies \frac{a}{n^\alpha} \leq |u_n| \leq \frac{b}{n^\alpha}$$

Per il teorema 29

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

e per il criterio di confronto, la serie assegnata è assolutamente convergente. Viceversa:

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq |u_n| \xRightarrow{\alpha < 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ è divergente} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \text{ è divergente}$$

■

Ad esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$$

è assolutamente convergente, giacché il termine n -esimo è per $n \rightarrow +\infty$ un infinitesimo di ordine $3/2$. C'è un secondo corollario, di cui omettiamo la dimostrazione.

Corollario 5 Sia data la serie a termini positivi $\sum_n u_n$. Sia $\sum_n p_n$ una serie di «confronto» a termini positivi. Se $\sum_n p_n$ è convergente [divergente] e u_n, p_n sono per $n \rightarrow +\infty$, infinitesimi dello stesso ordine, allora la serie $\sum_n u_n$ è convergente [divergente].

Ad esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - n}, \quad \text{quindi } u_n = \frac{1}{2^n - n}$$

Prendiamo come serie di confronto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n \quad \text{con } p_n = \frac{1}{2^n}$$

che è manifestamente convergente, in quanto è il resto di ordine 1 di una serie geometrica di ragione $1/2$. Inoltre:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{p_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = 1$$

Ne segue che u_n, p_n sono per $n \rightarrow +\infty$, infinitesimi equivalenti. Per il predetto criterio, la serie assegnata converge.

Esaminiamo quest'altro esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}, \quad \text{quindi } u_n = \frac{1}{2n-1}$$

Prendiamo come serie di confronto la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n \quad \text{con } p_n = \frac{1}{n}$$

che è divergente. Inoltre:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{p_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

da cui la divergenza della serie assegnata.

Criterio 8 (**Criterio della radice**)

$$\begin{aligned} n > \nu \implies \sqrt[n]{|u_n|} \leq p < 1 &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ è assolutamente convergente} \\ n > \nu \implies \sqrt[n]{|u_n|} \geq 1 &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ non è convergente} \end{aligned}$$

Dimostrazione.

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leq p \implies |u_n| \leq p^n$$

Ma p^n è il termine n -esimo di una serie geometrica di ragione < 1

$$0 < p < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} p^n \text{ è convergente}$$

da cui l'assoluta convergenza della serie data, in virtù del criterio di confronto 7. Proviamo la seconda affermazione:

$$\sqrt[n]{|u_n|} \geq 1 \implies |u_n| \geq 1 \text{ (definitivamente)} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0 \text{ (se esiste)}$$

onde la non convergenza della serie data, in virtù del teorema 23. ■

Negli esercizi risulta utile il seguente corollario, che però è inapplicabile per $l = 1$.

Corollario 6

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ è assolutamente convergente se } l < 1 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ non è convergente se } l > 1 \end{cases}$$

Per $l = 1$ il teorema è inapplicabile.

Dimostrazione. Se $l < 1$, dalla definizione di limite di una successione:

$$\forall \varepsilon \in (0, 1 - l), \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies \sqrt[n]{|u_n|} < l + \varepsilon < 1,$$

da cui l'assoluta convergenza della serie data, in virtù del criterio della radice.

Se $l > 1$, dalla medesima definizione:

$$\forall \varepsilon \in (0, l - 1), \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies \sqrt[n]{|u_n|} > l - \varepsilon > 1,$$

onde la non convergenza della serie data, in virtù del criterio della radice. ■

Esempio 89

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \text{ è assolutamente convergente}$$

Infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Criterio 9 (Criterio del rapporto)

Sia $\sum_n u_n$ una serie a termini tutti diversi da zero.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq p < 1 &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ è assolutamente convergente} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1 &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ non è convergente} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Proviamo la prima implicazione. Per ipotesi

$$|u_1| \leq p |u_0|, \quad |u_2| \leq p |u_1| \leq p^2 |u_0|, \quad |u_3| \leq p |u_2| \leq p^3 |u_0|, \dots$$

Cioè

$$|u_n| \leq |u_0| p^n$$

Tenendo conto che la serie geometrica di ragione p converge (in quanto $0 < p < 1$), in virtù del criterio di confronto, la serie assegnata è assolutamente convergente. Proviamo la seconda implicazione:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1 \implies \{|u_n|\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ è non decrescente} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$$

da cui la non convergenza in virtù del teorema teorema 23. ■

Negli esercizi risulta utile il seguente corollario, che però è inapplicabile per $l = 1$.

Corollario 7

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ è assolutamente convergente se } l < 1 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ non è convergente se } l > 1 \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $l < 1$, dalla definizione di limite di una successione:

$$\forall \varepsilon \in (0, 1 - l), \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < l + \varepsilon < 1,$$

da cui l'assoluta convergenza della serie data, in virtù del criterio del rapporto.

Se $l > 1$, dalla medesima definizione:

$$\forall \varepsilon \in (0, l - 1), \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > l - \varepsilon > 1,$$

onde la non convergenza della serie data, in virtù del criterio del rapporto. ■

Criterio 10 (Criterio di Raabe)

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie a termini tutti diversi da zero.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - (n+1) \geq p > 0 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ è assolutamente convergente}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - (n+1) \leq 0 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ non è assolutamente convergente}$$

Dimostrazione. Proviamo la prima implicazione. Dall'ipotesi segue

$$\begin{aligned} n |u_n| - (n+1) |u_{n+1}| \geq p |u_{n+1}| > 0 &\implies n |u_n| \geq (n+1) |u_{n+1}| \\ &\implies \{n |u_n|\} \text{ è decrescente} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} n |u_n| = \ell \geq 0 \\ &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} [n |u_n| - (n+1) |u_{n+1}|] \text{ è convergente} \end{aligned}$$

ove l'ultima implicazione si verifica immediatamente dal calcolo diretto della somma parziale di ordine N :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{+\infty} [n |u_n| - (n+1) |u_{n+1}|] = (|u_1| - 2 |u_2|) + (2 |u_2| - 3 |u_3|) + \\ &+ (3 |u_3| - 4 |u_4|) + \dots + [(N-1) |u_{N-1}| - N |u_N|] + [N |u_N| - (N+1) |u_{N+1}|] \\ &= |u_1| - (N+1) |u_{N+1}| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} |u_1| - \ell \end{aligned}$$

Inoltre:

$$n |u_n| - (n+1) |u_{n+1}| \geq p |u_{n+1}| > 0 \implies |u_{n+1}| \leq \frac{1}{p} [n |u_n| - (n+1) |u_{n+1}|]$$

da cui la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n+1}| = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$$

in virtù del criterio 7. Passiamo alla seconda implicazione. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 n \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - (n+1) \leq 0 &\implies n |u_n| \leq (n+1) |u_{n+1}| \\
 &\implies \{n |u_n|\} \text{ è non decrescente } \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} n |u_n| = \ell \mid 0 < \ell \leq +\infty \\
 &\implies |u_n| \text{ è un infinitesimo di ordine } \geq 1 \\
 &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \text{ non è assolutamente convergente}
 \end{aligned}$$

L'ultima implicazione segue al corollario 4 del criterio di confronto. ■

Corollario 8 Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie a termini tutti diversi da zero.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - 1 \right) = \ell \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ è assolutamente convergente se } \ell < 1 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ non è assolutamente convergente se } \ell > 1 \end{cases}$$

Per $\ell = 1$ il teorema è inapplicabile.

Dimostrazione. Se $\ell < 1$

$$\begin{aligned}
 \forall \varepsilon \in (0, \ell - 1), \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon &\implies n \left(\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - 1 \right) > \ell - \varepsilon \\
 &\implies n \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - (n+1) > \ell - 1 - \varepsilon > 0 \implies \sum_n u_n \text{ è ass. conv.}
 \end{aligned}$$

Se $\ell > 1$

$$\begin{aligned}
 \forall \varepsilon \in (0, 1 - \ell), \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon &\implies n \left(\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - 1 \right) < \ell + \varepsilon \\
 &\implies n \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - (n+1) < \ell - 1 + \varepsilon < 0 \implies \sum_n u_n \text{ non è ass. conv.}
 \end{aligned}$$

■

Criterio 11 (**Criterio di Kummer**)

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie a termini tutti diversi da zero. Per un'arbitraria successione $\{p_n\}$ di numeri reali positivi:

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - p_{n+1} \geq p > 0 &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ è assolutamente convergente} \\
 \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - (n+1) \leq 0 &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ non è assolutamente convergente} \\
 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty &
 \end{aligned}$$

Dimostrazione. Proviamo la prima implicazione. Dall'ipotesi segue

$$\begin{aligned} p_n |u_n| - p_{n+1} |u_{n+1}| \geq p |u_{n+1}| > 0 &\implies p_n |u_n| \geq p_{n+1} |u_{n+1}| \\ &\implies \{p_n |u_n|\} \text{ è decrescente } \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n |u_n| = \ell \geq 0 \\ &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} [p_n |u_n| - p_{n+1} |u_{n+1}|] \text{ è convergente} \end{aligned}$$

ove l'ultima implicazione si verifica immediatamente dal calcolo diretto della somma parziale di ordine N :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{+\infty} [p_n |u_n| - p_{n+1} |u_{n+1}|] = (p_1 |u_1| - p_2 |u_2|) + (p_2 |u_2| - p_3 |u_3|) + \\ &\quad + (p_3 |u_3| - p_4 |u_4|) + \dots + [p_{N-1} |u_{N-1}| - p_N |u_N|] + [p_N |u_N| - p_{N+1} |u_{N+1}|] \\ &= p_1 |u_1| - p_{N+1} |u_{N+1}| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} p_1 |u_1| - \ell \end{aligned}$$

Inoltre:

$$p_n |u_n| - p_{n+1} |u_{n+1}| \geq p |u_{n+1}| > 0 \implies |u_{n+1}| \leq \frac{1}{p} [p_n |u_n| - p_{n+1} |u_{n+1}|]$$

da cui la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n+1}| = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$$

in virtù del criterio 7. Passiamo alla seconda implicazione. Abbiamo

$$\begin{aligned} p_n \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - p_{n+1} \leq 0 &\implies p_n |u_n| \leq p_{n+1} |u_{n+1}| \\ &\implies \{p_n |u_n|\} \text{ è non decrescente } \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n |u_n| = \ell \mid 0 < \ell \leq +\infty \end{aligned}$$

Ne segue

$$\exists \lambda > 0 \mid p_n |u_n| > \lambda \implies |u_n| > \frac{\lambda}{p_n}$$

Ma per ipotesi $\sum_n \frac{1}{p_n}$ è per ipotesi divergente, da cui l'asserto in virtù del predetto criterio di confronto. ■

Notiamo che per $p_n = n$ ritroviamo il criterio di Raabe. Segue il corollario di cui omettiamo la dimostrazione:

Corollario 9 Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie a termini tutti diversi da zero.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n \left(\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - p_{n+1} \right) = \ell \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ è assolutamente convergente se } \ell < 1 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ non è assolutamente convergente se } \ell > 1 \end{cases}$$

Per $\ell = 1$ il teorema è inapplicabile.

Lemma 1 Sia $\sum_n u_n$ una serie a termini positivi. Se la successione delle sue somme parziali è limitata, allora la serie è convergente. Nel caso contrario, la serie diverge.

Dimostrazione. Segue direttamente dal teorema 27. ■

Sia data una serie a termini positivi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \mid \{u_n\} \text{ è decrescente} \quad (10.39)$$

Si ponga $u_n = f(n)$ dove

$$f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (10.40)$$

per poi generalizzare al continuo:

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \quad (10.41)$$

essendo $X = [1, +\infty)$. Tale funzione è manifestamente non negativa in X ed è ivi monotonicamente decrescente. Ne segue la sua **integrabilità** in $X' = [\xi, +\infty)$ con ξ intero naturale ≥ 1 :

$$\int_{\xi}^{+\infty} f(x) dx \leq +\infty \quad (10.42)$$

Ciò premesso, dimostriamo il teorema:

Criterio 12 (**Criterio dell'integrale**)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad \text{e} \quad \int_{\xi}^{+\infty} f(x) dx$$

convergono o divergono simultaneamente

Dimostrazione. Assegnato un intero naturale $\xi \geq 1$ e per ogni intero $N > \xi$, eseguiamo una decomposizione dell'intervallo $[\xi, N]$ in intervalli di ampiezza unitaria:

$$[\xi, N] = [\xi, \xi + 1] \cup [\xi + 1, \xi + 2] \cup \dots \cup [N - 1, N]$$

Siano rispettivamente R ed R' il plurirettangolo inscritto e il plurirettangolo circoscritto al rettangoloide di base $[\xi, N]$ e relativo a $f(x)$ (fig. 10.1).

Precisamente:

$$R = \bigcup_{n=0}^N R_{\xi+n}, \quad R' = \bigcup_{n=0}^N R'_{\xi+n}$$

essendo

$$\begin{aligned} R_{\xi+n} &= [\xi + n, \xi + n + 1] \times [0, f(\xi + n + 1)] \\ R'_{\xi+n} &= [\xi + n, \xi + n + 1] \times [0, f(\xi + n)] \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \text{mis}(R_{\xi+n}) &= f(\xi + n + 1) = u_{\xi+n+1} \\ \text{mis}(R'_{\xi+n}) &= f(\xi + n) = u_{\xi+n} \end{aligned}$$

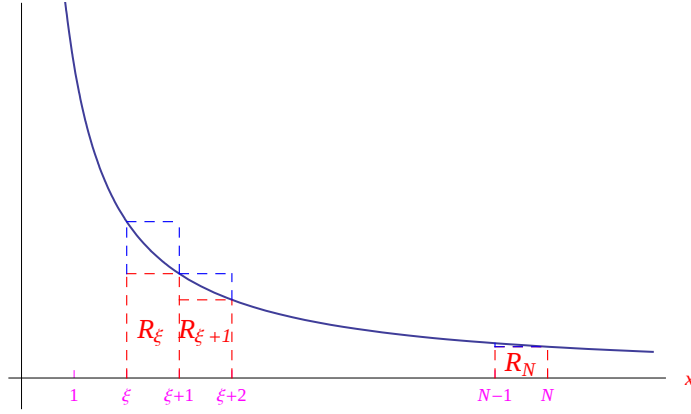


Figura 10.1: Criterio 12.

Per una nota proprietà

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N \text{mis}(R_{\xi+n}) &< \int_{\xi}^N f(x) dx < \sum_{n=0}^N \text{mis}(R'_{\xi+n}) \\
 \implies \sum_{n=0}^N u_{\xi+n+1} &< \int_{\xi}^N f(x) dx < \sum_{n=0}^N u_{\xi+n} \\
 \implies u_{\xi+1} + u_{\xi+2} + \dots + u_N &< \int_{\xi}^N f(x) dx < u_{\xi} + u_{\xi+1} + \dots + u_{N-1}
 \end{aligned}$$

Eseguendo l'operazione di passaggio al limite per $N \rightarrow +\infty$

$$u_{\xi+1} + u_{\xi+2} + \dots + u_N < \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\xi}^N f(x) dx = L \leq +\infty$$

Se $L < +\infty$ le somme parziali

$$S_N = u_1 + \dots + u_{\xi} + u_{\xi+1} \dots + u_N$$

costituiscono una successione limitata, da cui l'asserto per il lemma 1. Viceversa se l'integrale diverge, la successione delle somme parziali a sua volta diverge. ■

10.10 Criteri di convergenza non assoluta

10.10.1 Teoremi preliminari

Nei numeri precedenti abbiamo stabilito che la convergenza assoluta è una condizione sufficiente per la convergenza di una serie. Tuttavia, tale condizione non è necessaria. Enunciamo tre teoremi sulla convergenza non assoluta. Per la dimostrazione si rimanda a [3].

Teorema 33 Hp. *La successione delle somme parziali $\{S_p\}$ relative a una assegnata serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

è superiormente limitata. Inoltre, la successione di numeri reali non negativi $\{c_n\}$ è non crescente ed infinitesima.

Th. La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n u_n$$

è convergente.

Teorema 34 Hp. La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

è convergente. Inoltre, la successione di numeri reali $\{c_n\}$ è non crescente ed inferiormente limitata.

Th. La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n u_n$$

è convergente.

Teorema 35 Hp. La successione di numeri reali positivi $\{c_n\}$ è decrescente ed infinitesima.

Th. La serie «alternata»:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} c_n$$

è convergente. Denotando con σ la sua somma:

$$\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} c_n,$$

le somme parziali di ordine dispari:

$$\sigma_{2p+1} = \sum_{n=0}^{2p+1} (-1)^{n-1} c_n$$

forniscono valori approssimati per eccesso della somma σ , e le somme parziali di ordine pari:

$$\sigma_{2p} = \sum_{n=0}^{2p} (-1)^{n-1} c_n$$

forniscono valori approssimati per difetto della predetta somma.

Ad esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Qui è

$$c_n = \frac{1}{n} \implies \{c_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \text{ è decrescente ed infinitesima}$$

per cui la serie assegnata è convergente. Però non è assolutamente convergente, giacché la serie i cui termini sono i valori assoluti, è la serie armonica che come sappiamo, è divergente.

Capitolo 11

Serie di funzioni

11.1 Convergenza puntuale e convergenza uniforme

Fino a questo momento abbiamo considerato serie numeriche; precisamente, a una successione di elementi di $\mathbb{R}$:

$$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} : u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$$

possiamo associare la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Nulla ci impedisce di generalizzare tale nozione alle funzioni. A tale scopo, consideriamo una successione di funzioni reali della variabile reale x :

$$\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} : f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (11.1)$$

definite in un assegnato insieme $X \subseteq \mathbb{R}$. A tale successione possiamo associare la **serie di funzioni**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \quad (11.2)$$

Definizione 94 La serie di funzioni (11.2) è **convergente** nell'insieme X se comunque prendiamo $x_0 \in X$, è convergente la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0) \quad (11.3)$$

Ne segue che per ogni $x \in X$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N f_n(x) = f(x) \quad (11.4)$$

che definisce univocamente in X la funzione $f(x)$ quale somma della serie (11.2). Quindi, per un assegnato x :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid N > \nu_\varepsilon \implies \left| f(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x) \right| < \varepsilon$$

dove non abbiamo fatto altro che applicare la definizione di limite alla successione delle somme parziali $\{S_N(x)\}$. Notiamo tuttavia che l'indice ν_ε viene a dipendere oltre che da ε , dal punto $x \in X$. Ciò implica che per un assegnato ε , è definita la funzione:

$$\begin{aligned}\nu_\varepsilon : X &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \nu_\varepsilon : x \in X &\longrightarrow \nu_\varepsilon(x) \in \mathbb{N}\end{aligned}\tag{11.5}$$

In tal modo riscriviamo la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon(x) \in \mathbb{N} \mid N > \nu_\varepsilon(x) \implies \left| f(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x) \right| < \varepsilon \tag{11.6}$$

È possibile svincolarsi da x ? Per rispondere a tale quesito, consideriamo il codominio della predetta funzione, ovvero l'immagine di X attraverso ν_ε

$$I = \nu_\varepsilon(X) = \{\nu_\varepsilon(x) \mid x \in X\} \tag{11.7}$$

Se riesce $\sup I = \nu_0 < +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0, N > \nu_0 \implies \left| f(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in X \tag{11.8}$$

Cioè abbiamo un unico indice che dipende solo da ε . In tal caso si dice che la serie è **uniformemente convergente**. Se, invece, il codominio I non è limitato superiormente i.e. $\sup I = +\infty$, allora non è possibile svincolarsi da x e si dice che si ha **convergenza puntuale** (o **puntiforme**) o più semplicemente, *convergenza*.

Quanto appena esposto, si riformula efficacemente in termini di resto di ordine N della serie assegnata. In generale:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon(x) \in \mathbb{N} \mid N > \nu_\varepsilon(x) \implies |R_N(x)| < \varepsilon \tag{11.9}$$

Ad esempio, consideriamo in $X = [0, 1]$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1} - x^n) \tag{11.10}$$

Posto

$$f_n(x) = x^{n-1} - x^n \tag{11.11}$$

Vediamo che

$$f_1(x) = 1 - x, \quad f_2(x) = x - x^2, \quad f_3(x) = x^2 - x^3, \dots \tag{11.12}$$

cioè una successione di polinomi. La somma parziale di ordine N si scrive:

$$\begin{aligned}S_N(x) &= \sum_{n=1}^N (x^{n-1} - x^n) = (1 - x) + (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \dots + \\ &\quad + (x^{N-2} - x^{N-1}) + (x^{N-1} - x^N)\end{aligned}\tag{11.13}$$

Cioè

$$S_N(x) = 1 - x^N, \quad \forall x \in [0, 1] \tag{11.14}$$

Per calcolare

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x)$$

è preferibile esplicitare dapprima il valore della somma parziale in $x = 1$:

$$S_N(1) = 0, \quad \forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Ne segue

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x) = 0, \quad \text{per } x = 1$$

Di contro

$$x \in [0, 1) \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x) = 1 - \underbrace{\lim_{N \rightarrow +\infty} x^N}_{=0} = 1$$

In definitiva, la serie è convergente in X

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1} - x^n) = f(x)$$

con

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad (11.15)$$

Cioè la somma della serie assegnata è una funzione che presenta una discontinuità di prima specie in $x = 1$. Per vedere se la convergenza è uniforme consideriamo il resto di ordine N :

$$R_N(x) = f(x) - S_N(x) = \begin{cases} x^N, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Quindi $|R_N(1)| < \varepsilon$ è verificata per ogni N . Idem per $R_N(0) = 0$.

$$x \in (0, 1) \implies x^N < \varepsilon \implies N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \underset{0 < \varepsilon < 1}{=} -\frac{|\ln \varepsilon|}{\ln x} \quad (11.16)$$

Perciò

$$\nu_\varepsilon(x) = -\frac{|\ln \varepsilon|}{\ln x} = \left| \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \right|$$

il cui comportamento agli estremi di $(0, 1)$ è

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \nu_\varepsilon(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \nu_\varepsilon(x) = +\infty$$

cosicché $\nu_0 = +\infty$ e si ha convergenza puntuale. Tuttavia, se consideriamo la convergenza in $X' = [0, \xi]$ per $0 < \xi < 1$, si ha

$$\nu_0 = \left| \frac{\ln \varepsilon}{\ln \xi} \right|$$

Cioè la serie è ivi uniformemente convergente. In fig. 11.1 riportiamo il grafico della somma della serie e delle 15 somme parziali.

Per le serie di funzioni sussiste un criterio analogo a quello dimostrato in § 22.

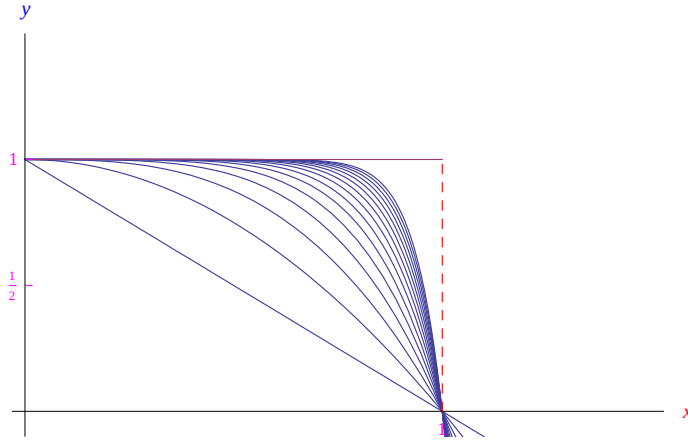


Figura 11.1: Andamento della somma $f(x)$ (eq. 11.15) e delle prime 15 somme parziali.

Criterio 13 (Criterio generale di convergenza uniforme)

La serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ è uniformemente se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon, \quad \begin{cases} \forall x \in X \\ \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \\ \nu_\varepsilon \text{ non dipende da } x \end{cases}$$

Dimostrazione.

La condizione è necessaria

Per ipotesi la serie è uniformemente convergente. Quindi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies |R_n(x)| < \varepsilon \quad (\nu_\varepsilon \text{ non dipende da } x) \quad (11.17)$$

Ne segue

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| = |R_{n+p}(x) - R_n(x)| \leq |R_{n+p}(x)| + \underbrace{|R_n(x)|}_{< \varepsilon} < \varepsilon$$

La condizione è sufficiente

Per un assegnato n

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

e quindi l'uniforme convergenza, giacché ν_ε per ipotesi non dipende da x . ■

11.2 Teorema del limite e teorema della continuità per le serie di funzioni

Consideriamo in $X \subseteq \mathbb{R}$ la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad (11.18)$$

tali che per un assegnato punto di accumulazione x_0 (al finito o all'infinito) per X , riesca:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R} \quad (11.19)$$

Se la predetta serie è convergente in X e ha somma $f(x)$, ci si può porre le seguenti questioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} l_n \stackrel{?}{=} l \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \stackrel{?}{=} l$$

o ciò che è lo stesso

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

Cioè se è lecito commutare l'operatore limite con l'operatore "somma infinita". Verifichiamo con un paio di esempi. Siano date le funzioni

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + x \\ f_n(x) &= (-x)^{n-1} - (-x)^n, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (11.20)$$

La somma parziale di ordine N è:

$$S_N(x) = 1 - (-x)^N = \begin{cases} 1 - x^N, & \text{se } N \text{ è pari} \\ 1 + x^N, & \text{se } N \text{ è dispari} \end{cases} \quad (11.21)$$

Ciò implica

$$\begin{aligned} \forall N, \quad S_N(0) = 1 &\implies \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(0) = 1 \\ S_N(1) &= \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ è pari} \\ 2, & \text{se } N \text{ è dispari} \end{cases} \implies \nexists \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(1) \end{aligned}$$

Ne consegue che la serie converge in $[0, 1)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{con} \quad f(x) = 1, \quad \forall x \in [0, 1) \quad (11.22)$$

come mostrato nel grafico di fig. 11.2 ove riportiamo l'andamento di alcune somme parziali.

Risulta inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = (-1)^{n-1} - (-1)^n = 2(-1)^{n-1} \equiv l_n$$

da cui la non convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} l_n = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$$

in quanto indeterminata. D'altra parte:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$$

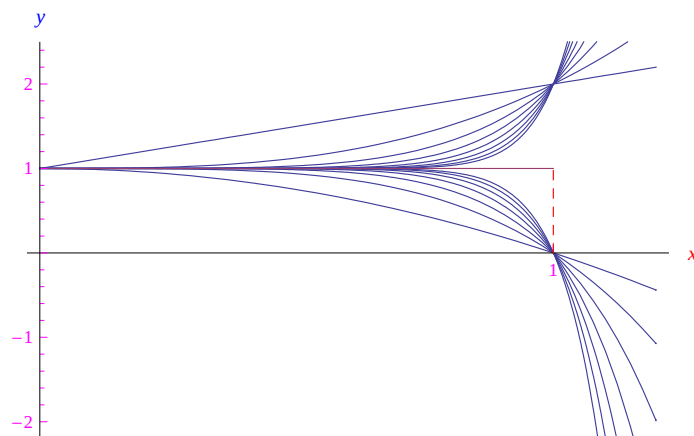


Figura 11.2: Andamento della somma $f(x)$ (eq. 11.22) e delle prime 15 somme parziali.

per cui questo esempio mostra quanto asserito in precedenza. Se poi prendiamo l'esempio della sezione precedente, si ha:

$$l_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = 0 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} l_n = 0$$

Ma

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$$

per cui la serie dei limiti non converge al limite della somma della serie di funzioni.

Da questi esempi non possiamo fare a meno di pensare alla uniforme convergenza, giacché le serie appena considerate non sono uniformemente convergenti. Infatti, sussiste il seguente teorema (di cui omettiamo la dimostrazione) che esprime una condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché la serie dei limiti converga al limite della serie delle funzioni.

Teorema 36 (**Teorema del limite**)

Se $\sum_n f_n(x)$ è uniformemente convergente in X con somma $f(x)$, e se x_0 è un punto di accumulazione (al finito o all'infinito) per X , e se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n$$

allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} l_n = l \in \mathbb{R} \quad \text{con } l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Analoga questione per la continuità espressa dal seguente teorema:

Teorema 37 (**Teorema della continuità**)

Se $\sum_n f_n(x)$ è uniformemente convergente in X con somma $f(x)$, e se in X le funzioni $f_n(x)$ sono continue, allora la predetta somma è ivi continua.

11.3 Teorema di derivazione per serie

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

che supponiamo convergente nell'intervallo X con somma $f(x)$, assumendo ivi derivabili le singole funzioni $f_n(x)$. Ci poniamo le seguenti domande:

1. La somma $f(x)$ è derivabile in X ?

2. La serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$$

è convergente in X ? E in caso affermativo, possiamo asserire che

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) ?$$

o ciò che è lo stesso

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

In generale, la risposta a tali quesiti è negativa, come mostra l'esempio di [questa serie](#), dove

$$\begin{aligned} f_n(x) &= e^{-(n-1)x} - e^{-nx}, \quad x \in X = [0, 1] \\ \implies f'_n(x) &= -(n-1)e^{-(n-1)x} + ne^{-nx} \end{aligned}$$

da cui le somme parziali

$$S'_N(x) = -Ne^{-Nx} \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} S'_N(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ +\infty, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Quindi nel caso in esame la relazione

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

non è verificata in $x = 0$. Ciò premesso, sussiste il teorema

Teorema 38 ([Teorema di derivazione per serie](#))

Hp. $\begin{cases} \text{La serie } \sum_n f_n(x) \text{ è convergente in } X; \\ \sum_n f'_n(x) \text{ è uniformemente convergente in } X \end{cases}$
Th.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \quad (11.23)$$

Dimostrazione. Per un assegnato $x_0 \in X$ preso ad arbitrio, poniamo $X_0 = X \setminus \{x_0\}$, per cui proviamo l'uniforme convergenza dei rapporti incrementali delle singole funzioni:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}$$

A tale scopo applichiamo il criterio 13, valutando per assegnati interi n, p presi ad arbitrio

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}$$

Senza perdita di generalità, supponiamo $x_0 < x$. Per il teorema di Lagrange:

$$\begin{aligned} \xi_k \in (x_0, x) \mid \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} &= f'_k(\xi_k) \\ \implies \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} &= \sum_{k=n+1}^{n+p} f'_k(\xi_k) \end{aligned} \quad (11.24)$$

Ma $\sum_k f'_k(x)$ è per ipotesi uniformemente convergente, per cui

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f'_k(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Dalla (11.24)

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f'_k(\xi_k) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

i.e. la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}$$

è uniformemente convergente in X . Passiamo al limite del rapporto incrementale della somma $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}$$

Per il teorema del limite 36

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} = \sum_{k=1}^{+\infty} f'_k(x)$$

onde l'asserto. ■

Utilizzando un linguaggio impreciso ma efficace, se è verificata la (11.23) si dice che la serie è *derivabile termine a termine*.

11.4 Teorema di integrazione per serie

Nell'intervallo $[a, b]$ sia data la serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ che assumiamo convergente con somma $f(x)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Inoltre, se le funzioni $f_n(x)$ sono continue in $[a, b]$ ha senso per ciascuna di esse l'integrale definito:

$$\int_a^b f_n(x) dx$$

Poniamo, dunque, la questione dell'esistenza dell'integrale definito della somma:

$$\int_a^b f(x) dx$$

e in caso affermativo, se possiamo scrivere

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad (11.25)$$

o ciò che è lo stesso

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad (11.26)$$

e in tal caso si dice che la serie è *integrabile termine a termine*. In generale, la risposta a tali quesiti è negativa, come mostra il seguente esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}] \quad (11.27)$$

Poniamo

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \quad (11.28)$$

di cui riportiamo il grafico per alcuni valori di n in fig. 11.3.

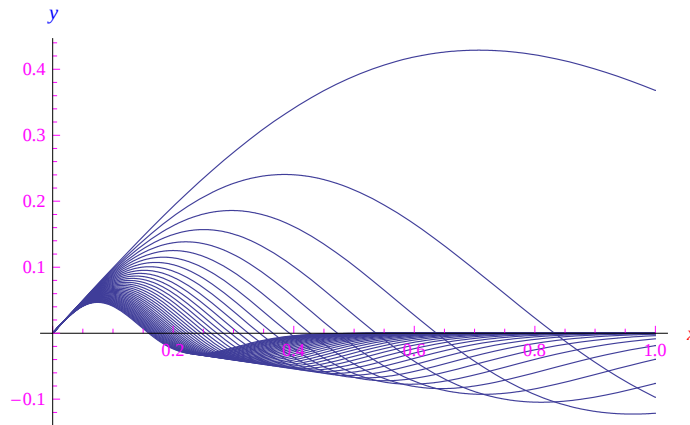


Figura 11.3: Grafico delle (11.28) per $n = 1, \dots, 40$.

Calcoliamo la somma parziale

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x) = (xe^{-x^2} + 0) + (2xe^{-2x^2} - 3xe^{-3x^2}) + (3xe^{-3x^2} - 2xe^{-2x^2}) + \dots + [(N-1)xe^{-(N-1)x^2} - (N-2)xe^{-(N-2)x^2}] + [Nxe^{-Nx^2} - (N-1)xe^{-(N-1)x^2}]$$

Cioè

$$S_N(x) = Nxe^{-Nx^2} \quad (11.29)$$

In fig. 11.4 riportiamo il grafico delle somme parziali per $N = 1, \dots, 15$.

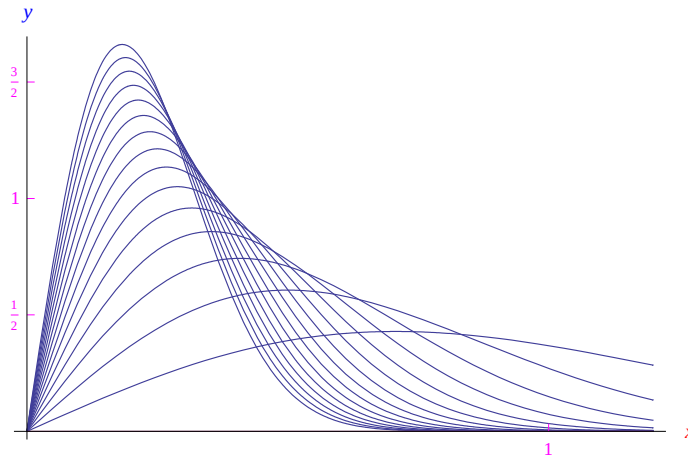


Figura 11.4: Grafico delle (11.29) per $n = 1, \dots, 15$.

Abbiamo

$$S_N(0) = 0 \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(0) = 0$$

$$0 < x \leq 1 \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{Nx}{e^{Nx^2}} = 0$$

per cui nell'intervallo $[0, 1]$ la serie assegnata converge alla funzione identicamente nulla:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1]$$

e dunque

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$

Calcoliamo ora:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= n \int_0^1 xe^{-nx^2} dx - (n-1) \int_0^1 xe^{-(n-1)x^2} dx \\ &= n \cdot \frac{1}{2n} [(1 - e^n)] - (n-1) \cdot \frac{1}{2(n-1)} [1 - e^{-(n-1)}] \\ &= \frac{e-1}{2e^n} \end{aligned}$$

Ne segue la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{e-1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^n}$$

A secondo membro compare una serie geometrica, precisamente il resto del primo ordine. Intanto calcoliamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$$

Cioè

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{e}{e-1} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{1-e},$$

onde

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$$

per cui la serie assegnata non è integrabile termine a termine:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

Osserviamo, incidentalmente, che tale serie non è uniformemente convergente (lo si provi come esercizio). Abbiamo, dunque, il seguente teorema che fornisce una condizione sufficiente per l'integrabilità termine a termine:

Teorema 39 (**Teorema di integrazione per serie**)

Se la serie $\sum_n f_n(x)$ è uniformemente convergente in $[a, b]$ con somma $f(x)$, e se le funzioni $f_n(x)$ sono continue in $[a, b]$, allora:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Dimostrazione. Dalla continuità delle funzioni $f_n(x)$ e dalla uniforme convergenza della serie, per il teorema della continuità 37, segue la continuità della somma $f(x)$, e quindi l'esistenza dell'integrale definito di $f(x)$ esteso all'intervallo $[a, b]$. Dobbiamo ora provare

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

D'altra parte, per una nota proprietà dell'integrale definito:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{n=1}^N \int_a^b f_n(x) dx \right| &= \left| \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right] dx \right| \\ &\leq \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| dx = \int_a^b |R_N(x)| dx, \end{aligned}$$

essendo $R_N(x)$ il resto di ordine N . Vediamo se è verificata la proprietà

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid N > \nu_\varepsilon \implies |R_N(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall x \in [a, b]$$

Per quanto precede, si ha

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{n=1}^N \int_a^b f_n(x) dx \right| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

da cui l'asserto. ■

11.5 Convergenza totale di una serie di funzioni

Sia data la serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ in $X \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 95 Se

1. ogni funzione $f_n(x)$ è limitata in X ;
2. $\sum_n \Lambda_n$ converge, essendo Λ_n l'estremo superiore di $|f_n(x)|$ in X . Cioè

$$\Lambda_n = \sup |f_n(x)| \implies 0 \leq \Lambda_n < +\infty$$

diremo che la serie assegnata è **totalmente convergente** in X .

Ad esempio consideriamo in $(-\infty, +\infty)$

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

per cui

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2} |\sin(nx)| \leq \frac{1}{n^2} \equiv \Lambda_n$$

avendosi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

Ne segue la totale convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \tag{11.30}$$

Nel grafico di fig. 11.5 riportiamo l'andamento della somma (calcolata con **Mathematica**).

Dimostriamo ora un importante teorema secondo cui la convergenza totale è una condizione più forte della convergenza uniforme.

Teorema 40

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ è totalmente convergente in } X \right) \begin{matrix} \implies \\ \nLeftarrow \end{matrix} \left(\begin{matrix} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ è assolutamente} \\ \text{e totalmente convergente in } X \end{matrix} \right)$$

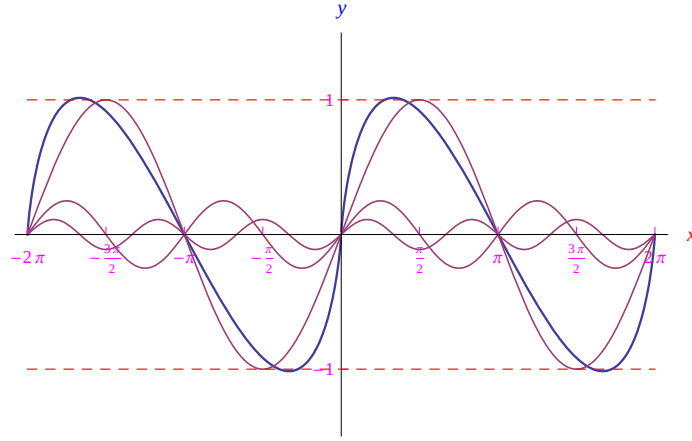


Figura 11.5: Grafico della somma della serie (eq. 11.30) ricostruita in software con Mathematica, assieme ai primi tre termini della serie. Si noti la periodicità (2π) della somma.

Dimostrazione. Per ipotesi

$$|f_n(x)| \leq \Lambda_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda_n < +\infty$$

da cui l'assoluta convergenza della serie di funzioni, in virtù del criterio di confronto (7). Per provare la convergenza uniforme, partiamo dalla convergenza di $\sum_n \Lambda_n$. Per il criterio generale di convergenza (22)

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid k > \nu_\varepsilon \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \Lambda_k \right|_{\Lambda_k \geq 0} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \Lambda_k < \varepsilon, \quad \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Ne segue

$$\forall x \in X, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \Lambda_k < \varepsilon, \quad \forall n, p \in \mathbb{N}$$

onde l'uniforme convergenza della serie di funzioni, in virtù del criterio generale di convergenza uniforme (13). ■

Per quanto precede, il teorema non è invertibile. Infatti consideriamo questa serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \quad \text{con } f_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in [0, 1]$$

Abbiamo

$$|f_n(x)| = \frac{|x^n|}{n} \leq \frac{1}{n} \equiv \Lambda_n, \quad \forall x \in [0, 1]$$

La serie non è totalmente convergente perché

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda_n = +\infty$$

ma è uniformemente convergente. Per mostrare ciò poniamo

$$c_n = \frac{1}{n} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} c_n x^n, \quad \forall x \in [0, 1]$$

che è una serie alternata e sono verificate le ipotesi del teorema 35, per cui detta serie converge. Inoltre, per il predetto teorema, si ha che denotando con $f(x)$ la somma della serie, si ha:

$$S_{N+1}(x) = \sum_{n=1}^{N+1} (-1)^{n-1} c_n x^n \text{ approssima per eccesso } f(x)$$

$$S_{2N}(x) = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n-1} c_n x^n \text{ approssima per difetto } f(x)$$

Ne segue

$$S_N(x) < f(x) < S_{N+1}(x), \quad \forall N$$

Perciò il resto di ordine N può essere maggiorato come:

$$|R_N(x)| = |f(x) - S_N(x)| \leq |S_{N+1}(x) - S_N(x)| = \left| (-1)^N \frac{x^{N+1}}{N+1} \right|_{x \in [0,1]} \leq \frac{1}{N+1}$$

Allora

$$\frac{1}{N+1} < \varepsilon \implies N > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \equiv \nu_\varepsilon$$

Cioè

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} - 1 \mid N > \nu_\varepsilon \implies |R_N(x)| < \varepsilon$$

Perciò la serie converge uniformemente giacché l'indice ν_ε non dipende da x . Vedremo in seguito che la somma di questa serie è $\ln(x+1)$.

11.6 Serie di Taylor

Consideriamo un intervallo $X \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione $f \in C^{n+1}(X)$. Preso ad arbitrio $x_0 \in X$, ricordiamo la formula di Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) \quad (11.31)$$

dove il resto $R_n(x)$ si presenta in due espressioni diverse. Precisamente, il *resto di Lagrange*:

$$R_n(x) = (x - x_0)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in \begin{cases} (x_0, x), & \text{se } x > x_0 \\ (x, x_0), & \text{se } x < x_0 \end{cases} \quad (11.32)$$

e il *resto di Cauchy*:

$$R_n(x) = (x - x_0)(x - \xi')^n \frac{f^{(n+1)}(\xi')}{(n+1)!}, \quad \xi' \in \begin{cases} (x_0, x), & \text{se } x > x_0 \\ (x, x_0), & \text{se } x < x_0 \end{cases} \quad (11.33)$$

$$\text{in generale è } \xi' \neq \xi \quad (11.34)$$

Se $f \in C^\infty(X)$ la (11.31) può essere scritta per n arbitrariamente grande, per cui è univocamente definita la serie di funzioni:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (11.35)$$

Definizione 96 La serie di funzioni (11.35) si dice **serie di Taylor relativa alla funzione $f(x)$ e ad al punto iniziale x_0 (serie di Mac Laurin se $x_0 = 0$)**.

Ciò posto, ci chiediamo:

1. la predetta serie converge?
2. In caso affermativo, la somma è $f(x)$?

A tali domande risponde il seguente teorema:

Teorema 41

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x), \quad \forall x \in X \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in X$$

Dimostrazione. La somma parziale di ordine $n + 1$ è

$$S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x) - R_n(x)$$

per cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n+1}(x) = f(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = f(x) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

■

Definizione 97 Nelle ipotesi del teorema appena dimostrato, diremo che la funzione $f(x)$ è **svilupabile in serie di Taylor, di punto iniziale x_0 , nell'intervallo X** .

Dimostriamo un criterio (condizione sufficiente, ma non necessaria) per la predetta svilupabilità.

Criterio 14

$$\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f^{(n)}(x)| \leq M \implies f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Dimostrazione. Prendiamo il resto di Lagrange:

$$|R_n(x)| = |(x - x_0)|^{n+1} \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \leq M \frac{|(x - x_0)|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|(x - x_0)|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

da cui l'asserto in virtù del teorema precedente. ■

Esaminiamo ora alcune serie notevoli.

11.6.1 Serie esponenziale

È la serie di Mac-Laurin relativa a $f(x) = e^x$. Riesce:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = e^x \implies f^{(n)}(0) = 1$$

Ne segue

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Sussiste il teorema

Teorema 42

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Occorre provare l'asserto in ogni intervallo $[-a, a]$ essendo $a > 0$ preso ad arbitrio. Abbiamo

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^a, \quad \forall x \in [-a, a]$$

da cui l'asserto in virtù del criterio 14. Inoltre

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0$$

dunque la serie esponenziale è assolutamente convergente (per il criterio del rapporto). ■

In fig. 11.6 il grafico della funzione esponenziale confrontato con quelle di alcune somme parziali della serie esponenziale.

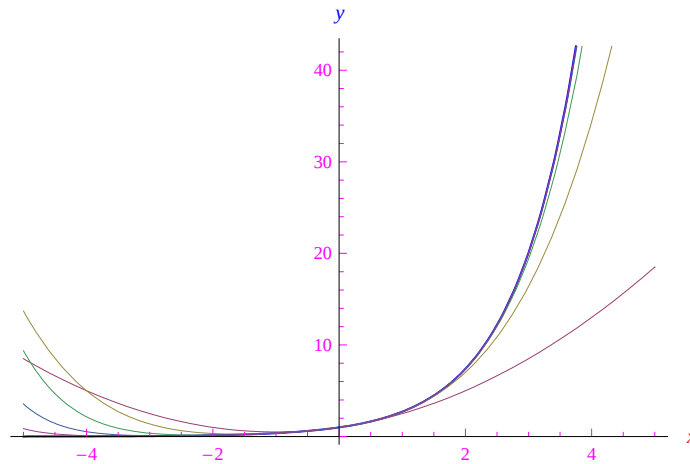


Figura 11.6: Alcune somme parziali della serie esponenziale. La curva blue scuro è il grafico di e^x .

11.6.2 Serie iperboliche

Sono le serie di Mac-Laurin relative alle funzioni iperboliche $f(x) = \cosh x$, $g(x) = \sinh x$. Riesce

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cosh x, & \text{se } n \text{ è pari} \\ \sinh x, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \implies f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad (11.36)$$

Dunque

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

che riflette la parità (+1) della funzione coseno iperbolico. Sussiste il teorema

Teorema 43

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Occorre provare l'asserto in ogni intervallo $[-a, a]$ essendo $a > 0$ preso ad arbitrio. Abbiamo

$$|f^{(n)}(x)| \leq \cosh a, \quad \forall x \in [-a, a]$$

da cui l'asserto in virtù del criterio 14. Inoltre

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{2(k+1)}}{[2(k+1)+1]!} \cdot \frac{(2k)!}{x^{2k}} \right| = 0$$

dunque la serie è assolutamente convergente (per il criterio del rapporto). ■

Per la funzione seno iperbolico abbiamo

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} \cosh x, & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \sinh x, & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases} \implies g^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0, & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases} \quad (11.37)$$

Dunque

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

che riflette la parità (−1) della funzione seno iperbolico. Sussiste un teorema analogo al precedente che si dimostra in maniera simile:

Teorema 44

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (11.38)$$

In fig. 11.7 i grafici delle funzione iperboliche $\cosh x, \sinh x$ confrontati con quelli di alcune somme parziali delle rispettive serie.

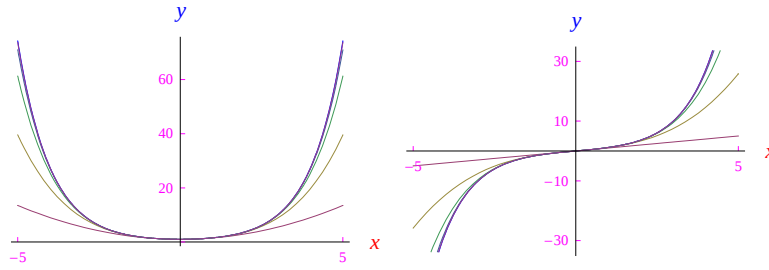


Figura 11.7: Serie iperboliche

11.6.3 Serie logaritmica

È la serie di Mac-Laurin relativa alla funzione $f(x) = \ln(1+x)$. Tale funzione è definita in $(-1, +\infty)$. Calcolando le derivate si trova:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad (11.39)$$

Enunciamo senza dimostrare, il seguente

Teorema 45 *La serie logaritmica converge assolutamente in $(-1, 1)$:*

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

In fig. 11.8 i grafici delle assegnata confrontati con quelli di alcune somme parziali.

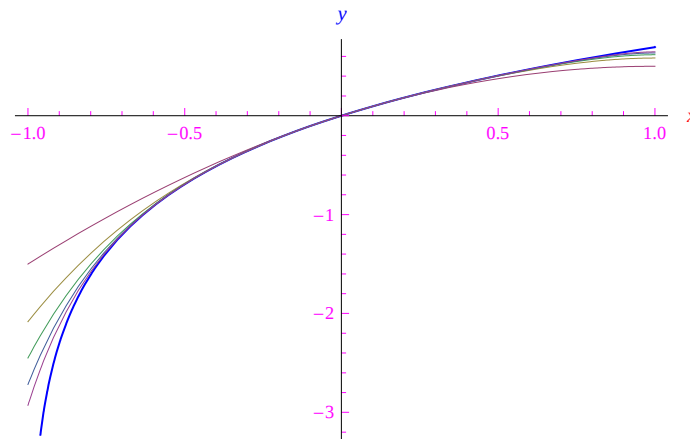


Figura 11.8: Serie logaritmica.

11.6.4 Serie binomiale

È la serie di Mac-Laurin relativa alla **funzione potenza di esponente reale** scritta come

$$f(x) = (1+x)^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ assegnato} \quad (11.40)$$

Calcolando le derivate, si perviene a

$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)}{k!} x^k \quad (11.41)$$

Il generico termine ci ricorda il coefficiente binomiale di indice n e base k

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{se } n > k \\ 0, & \text{se } n < k \end{cases}$$

ricordando che la convenzione $0! = 1$ implica:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (11.42)$$

Segue

$$\begin{aligned} n > k &\implies \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots 1}{k!(n-k)(n-k-1)\dots 1} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \end{aligned}$$

che ci consente di estendere tale sviluppo al campo reale:

$$\begin{aligned} \binom{\lambda}{k} &= \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-k+1)}{k!} \\ \binom{\lambda}{0} &= 1 \end{aligned}$$

In tal modo, la precedente serie di Mac-Laurin assume la forma compatta:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\lambda}{k} x^k \quad (11.43)$$

Si tratta, dunque, di stabilire:

$$(1+x)^\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\lambda}{k} x^k \quad (11.44)$$

Osserviamo incidentalmente che nel caso di esponente intero naturale n :

$$\forall k > n, \quad \binom{n}{k} = 0 \implies \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\lambda}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{\lambda}{k} x^k = (1+x)^n$$

Cioè la predetta serie si riduce a una somma di ordine n , restituendo la ben nota formula del binomio di Newton, valida per ogni x reale. Escludendo questo caso banale, enunciamo senza dimostrare il seguente

Teorema 46 *La serie binomiale converge assolutamente in $(-1, 1)$:*

$$(1+x)^\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\lambda}{k} x^k$$

Non converge per $|x| > 1$. Può al più convergere in $[-1, 1]$, trattando con le dovute cautele il punto $x = -1$, giacché le derivate di ordine $k > \lambda$ non sono ivi definite, per cui non è applicabile il teorema 41.

11.6.5 Serie dell'arcotangente

È la serie di Mac-Laurin relativa alla **funzione arcotangente** $f(x) = \arctan x$. Premettiamo alcune considerazioni di carattere generale. Nella ricerca dello sviluppo in serie di Taylor/Mac-Laurin di un'assegnata $f(x)$ non sempre è immediato determinare la derivata k -esima espressa in termini del solo indice k , per cui è necessario determinare la predetta serie in modo indiretto. A tale scopo, osserviamo che la serie di Taylor è una serie di potenze del binomio $(x - x_0)^k$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \quad (11.45)$$

Vedremo più avanti che lo sviluppo di Taylor se esiste, è unico. Ne segue che si con qualche artificio, giungiamo alla (11.45), è necessariamente

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.46)$$

Ciò premesso, per determinare lo sviluppo di $f(x) = \arctan x$, mostriamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1 \quad (11.47)$$

Poniamo

$$\xi = x^2 \implies \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-\xi)^k, \quad |\xi| = |x^2| = x^2 < 1, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Eseguiamo un secondo cambio di variabile

$$t = -\xi \implies |t| = |-\xi| = |\xi| < 1 \implies \sum_{k=0}^{+\infty} (-\xi)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$$

Ripristinando la variabile x

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

come volevamo mostrare. Mostriamo che la serie è totalmente convergente. A tale scopo definiamo

$$f_k(x) = (-1)^k x^{2k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

e comunque prendiamo $0 < a < 1$, tali funzioni sono continue in $[-a, a] \subset X \stackrel{\text{def}}{=} (-1, 1)$. Segue

$$|f_k(x)| = x^{2k} \leq a^{2k}, \quad \forall x \in [-a, a]$$

Perciò

$$\Lambda_k = \sup_{[-a, a]} |f_k(x)| = a^{2k} \xRightarrow{0 < a < 1} \sum_{k=0}^{+\infty} \Lambda_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (a^2)^k = \frac{1}{1 - a^2} < +\infty$$

da cui la convergenza totale in virtù della definizione 95. Ciò implica che la serie è uniformemente e assolutamente convergente in $[-a, a]$. L'uniforme convergente ci consente di integrare la serie termine a termine (teorema 39):

$$\underbrace{\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}}_{=\arctan x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt$$

Quindi

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

in virtù dell'arbitrarietà di $0 < a < 1$. In realtà, la convergenza si verifica anche in $x = \pm 1$, tenendo conto di un'estensione del teorema di integrazione per serie. Tuttavia, nei predetti punti la convergenza non è assoluta. In 11.9 i grafici della funzione $f(x) = \arctan x$ confrontato con quelli di alcune somme parziali delle rispettive serie.

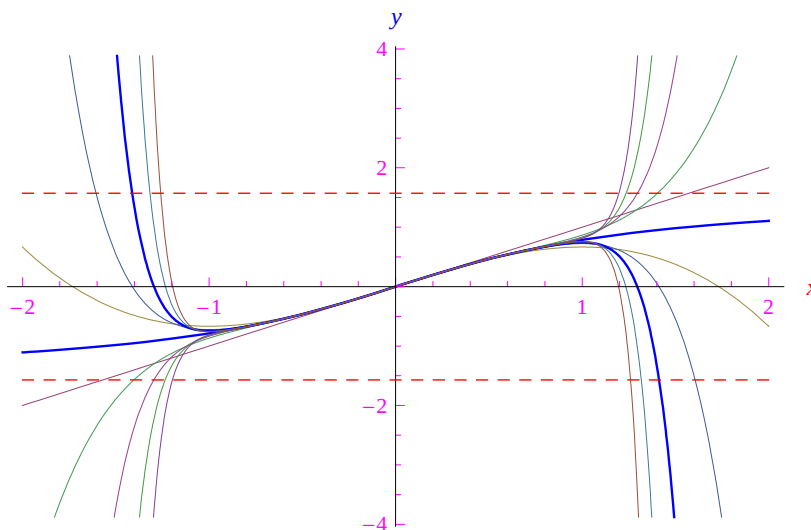


Figura 11.9: Serie dell'arcotangente.

11.6.6 Serie dell'arcoseno

È la serie di Mac-Laurin relativa alla **funzione arcoseno** $f(x) = \arcsin x$. Procediamo come nel caso dell'arcotangente, cioè determinando lo sviluppo di Mac-Laurin della derivata prima

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

A tale scopo, scriviamo la serie binomiale

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{k} x^k$$

Calcoliamo a parte il coefficiente binomiale

$$\binom{-1/2}{k} = \begin{cases} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\dots(-\frac{1}{2}+1-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}, & \text{se } k \neq 0 \\ 1, & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Segue

$$\binom{-1/2}{k \neq 0} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k}$$

Quindi

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} x^k$$

Ponendo $x = -t^2$

$$(1-t^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{k} t^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} t^{2k}, \quad \forall t \in (-1, 1)$$

Ripristinando la variabile x

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{k} x^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} x^{2k}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Mostriamo che la serie è totalmente convergente. A tale scopo definiamo

$$f_k(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} x^{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

e comunque prendiamo $0 < a < 1$, tali funzioni sono continue in $[-a, a] \subset X \stackrel{\text{def}}{=} (-1, 1)$.
Segue

$$|f_k(x)| = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} x^{2k} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} a^{2k}, \quad \forall x \in [-a, a]$$

Perciò

$$\Lambda_k = \sup_{[-a, a]} |f_k(x)| = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} a^{2k} \xrightarrow{0 < a < 1} \sum_{k=1}^{+\infty} \Lambda_k < +\infty$$

La convergenza della serie degli estremi superiori deriva da una immediata applicazione di uno dei criteri di convergenza assoluta studiati in precedenza. Dunque la serie di funzioni che stiamo studiando è totalmente convergente in $(-1, 1)$ e a più forte ragione è ivi uniformemente e assolutamente convergente. Ciò implica che possiamo eseguire un'integrazione termine a termine:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} \int_0^x t^{2k}$$

Cioè

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Per quanto riguarda il dominio di convergenza, abbiamo visto che è $(-1, 1)$. Tuttavia studiando la **sommabilità** della funzione $1/\sqrt{1-x^2}$ in $[-1, 1]$ e applicando un'estensione del teorema di integrazione per serie, si conclude che la predetta serie è assolutamente convergente in $[-1, 1]$.

In 11.10 i grafici della funzione $f(x) = \arcsin x$ confrontato con quelli di alcune somme parziali delle rispettive serie.

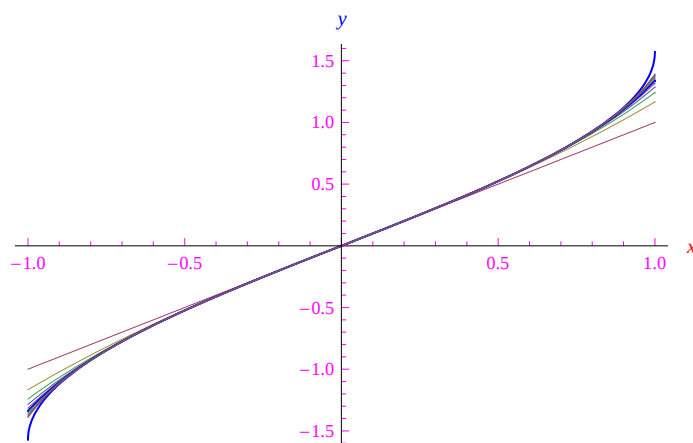


Figura 11.10: Serie dell'arcoseno.

11.6.7 Calcolo di integrali per mezzo di serie

Supponiamo di avere una funzione continua $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ e di non saper calcolare l'integrale definito

$$\int_a^b f(x) dx$$

Immaginiamo poi di conoscere uno sviluppo in serie di tale funzione:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x),$$

dove le $f_k(x)$ sono continue nel predetto intervallo e tali che il corrispondente integrale definito sia agevolmente calcolabile. Se sono verificate le ipotesi del teorema di integrazione per serie 39:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx$$

Per un assegnato ordine di approssimazione:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx$$

Ad esempio, ci proponiamo di calcolare

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

Per poter eseguire un'integrazione per serie, ridefiniamo innanzitutto la funzione integranda, in modo da bypassare la discontinuità (eliminabile) nell'estremo inferiore di integrazione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$\int_0^1 f(x) dx$$

Scriviamo lo sviluppo di Mac-Laurin di $\sin x$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ne segue

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x), \quad \text{dove } f_k(x) = (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

Mostriamo ora che la serie è totalmente convergente in $[0, 1]$. Per un arbitrario $0 < a < 1$, si ha:

$$|f_k(x)| = \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \leq \frac{a^{2k}}{(2k+1)!} \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_k, \quad \forall x \in [0, a]$$

Applicando uno dei criteri di convergenza assoluta studiati nei precedenti paragrafi:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Lambda_k < +\infty$$

per cui la serie assegnata è totalmente convergente in $[0, a]$, qualunque sia $0 < a < 1$, e quindi in $[0, 1]$. La totale convergenza implica l'uniforme convergenza, pertanto possiamo eseguire un'integrazione per serie:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^1 x^{2k+1} dx \quad (11.48)$$

Cioè

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} \quad (11.49)$$

A secondo membro abbiamo una serie a termini di segno alterno. Per il teorema 35 le somme parziali di ordine dispari restituiscono un'approssimazione per eccesso della somma della serie, mentre le somme di ordine pari ne danno un'approssimazione per difetto. Cioè

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} > \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx > \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)}$$

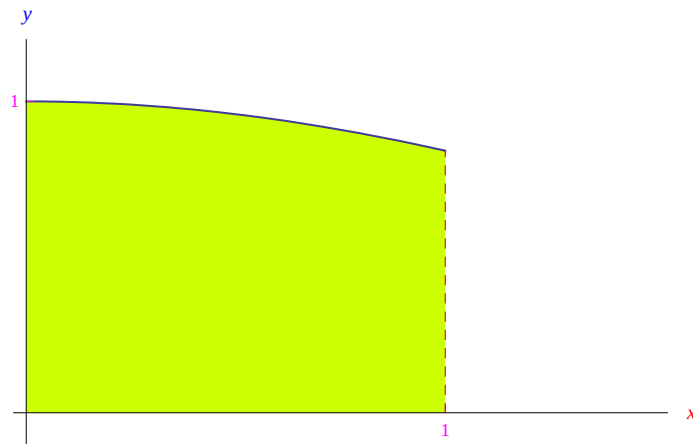


Figura 11.11: Grafico della funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ in $[0, 1]$, avendo posto $f(0) = 0$.

Per $n = 3$

$$0.946083073 > \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx > 0.946083070 \quad (11.50)$$

In fig. 11.11 riportiamo il rettangoloide relativo a $f(x)$ e di base $[0, 1]$.

FINO QUI

Parte V

Esempi addizionali

Appendice A

Miscellanea

A.1 Interpretazione cinematica dei punti di flesso a tangente verticale

Consideriamo una particella di massa m compie un moto piano lungo una traiettoria γ di rappresentazione parametrica:

$$x = v_0 t, \quad y = y(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad (\text{A.1})$$

essendo t il tempo, mentre

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0}, & \text{se } t \geq t_0 \\ y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0 - t}, & \text{se } t < t_0 \end{cases}, \quad (\text{A.2})$$

dove $v_0 > 0$ e $\eta_0 > 0$ sono due costanti con le appropriate dimensioni¹. Il numero reale $t_0 > 0$ è, invece, un istante assegnato da non confondere con l'istante iniziale che è $t = 0$. La traiettoria γ non è una curva regolare poiché $\ddot{y}(t)$ ha una discontinuità di seconda specie in t_0 . Infatti, osservando che

$$\frac{d}{dt} \sqrt{t - t_0} = \frac{1}{2\sqrt{t - t_0}}, \quad \frac{d}{dt} \sqrt{t_0 - t} = -\frac{1}{2\sqrt{t_0 - t}},$$

si ha:

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} \frac{\eta_0}{2\sqrt{t - t_0}}, & \text{se } t > t_0 \\ \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0 - t}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

cioè

$$\dot{y}(t) = \frac{\eta_0}{2\sqrt{|t - t_0|}} \quad (\text{A.4})$$

La derivata prima è definita in $[0, t_0) \cup (t_0, +\infty)$, ed eseguendo il limite per $t \rightarrow t_0$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \dot{y}(t) = +\infty, \quad (\text{A.5})$$

da cui si ha che (t_0, y_0) è un punto di flesso a tangente verticale per $\Gamma_y : y = y(t)$. Studiamo ora la funzione $y(t)$.

Insieme di definizione

¹In particolare, v_0 è la componente della velocità $\mathbf{v}$ della particella nella direzione dell'asse x .

La funzione (A.2) è definita in $\mathbb{R}$, ma dal momento che il tempo t è non negativo, consideriamo la restrizione a $[0, +\infty)$ in accordo con la (A.1).

Intersezione con gli assi

$$y(0) = y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} y_1, \quad (\text{A.6})$$

per cui il Γ_y interseca l'asse delle ordinate in $(0, y_1)$. Per determinare le radici di $y(t) = 0$, dobbiamo separare i due casi $t > t_0$ e $t < t_0$. Abbiamo

$$t > t_0 \implies y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0} = 0 \implies \sqrt{t - t_0} = -\frac{y_0}{\eta_0} < 0 \quad \text{mai!}$$

$$0 \leq t < t_0 \implies y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0 - t} = 0 \implies t_0 - t = \left(\frac{y_0}{\eta_0}\right)^2,$$

da cui $t_1 = t_0 - \left(\frac{y_0}{\eta_0}\right)^2 < t_0$ è uno zero di $y(t) \implies \Gamma_y$ interseca l'asse delle ascisse in $(t_1, 0)$.

Segno della funzione

Riesce

$$y(t) > 0, \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Per $0 \leq t < t_0$ dobbiamo risolvere la disequazione

$$y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0 - t} > 0 \iff t \geq t_1$$

Cioè

$$y(t) < 0, \quad \forall t \in [0, t_1)$$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0}) = +\infty$$

Cioè la funzione diverge positivamente per $t \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{t} = \frac{y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0}}{t} = 0 \quad (\text{per confronto tra infiniti})$$

Ne consegue l'assenza di asintoti obliqui.

Studio della derivata prima

Dalle (A.4) vediamo che

$$\dot{y}(t) > 0, \quad \forall t \in [0, +\infty) - \{t_0\} \quad (\text{A.7})$$

Cioè la funzione $y(t)$ è strettamente crescente in X .

Derivata seconda

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (t - t_0)^{-1/2} &= -\frac{1}{2} (t - t_0)^{-3/2} \\ \frac{d}{dt} (t_0 - t)^{-1/2} &= -\frac{1}{2} (t_0 - t)^{-3/2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\ddot{y}(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}}, & \text{se } t > t_0 \\ \frac{\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Riesce

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) &> 0, \quad \forall t \in [0, t_0) \\ \ddot{y}(t) &< 0, \quad \forall t \in (t_0, +\infty)\end{aligned}$$

Ne consegue che $\Gamma_y : y = y(t)$ volge la concavità verso l'alto in $[0, t_0)$, verso il basso in $(t_0, +\infty)$.

Tracciamento del grafico

A questo punto siamo in grado di tracciare il grafico Γ_y , come illustrato in fig. A.1.

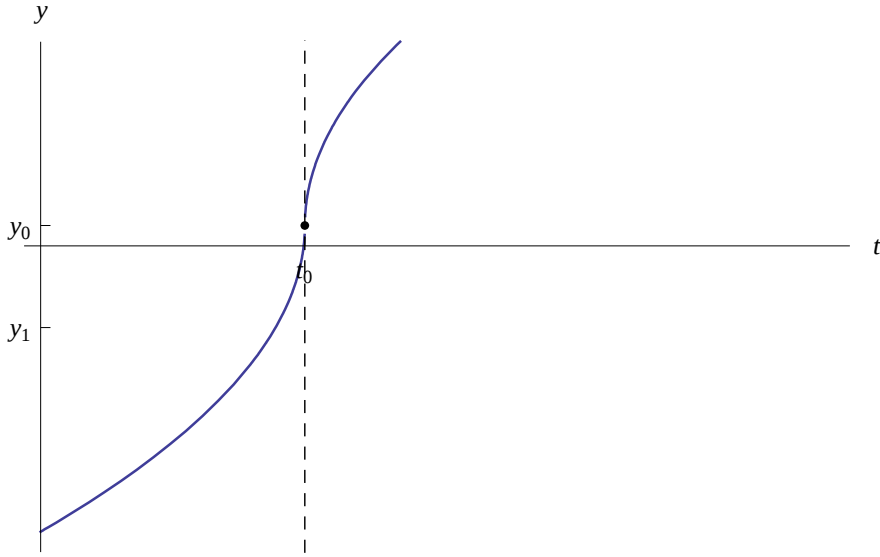


Figura A.1: Grafico dell'ordinata y della particella in funzione del tempo. Il punto (t_0, y_0) è un punto di flesso a tangente verticale (tracciata in tratteggio).

Eliminando il parametro t tra le (A.1), otteniamo la rappresentazione ordinaria della traiettoria, cioè $\gamma_{++} : y = f(x)$, dove:

$$f(x) = \begin{cases} y_0 + \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x - x_0}, & \text{se } x \geq x_0 \\ y_0 - \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x_0 - x}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases}, \quad (\text{A.9})$$

essendo $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} x(t_0)$. La cui derivata prima della funzione (A.9) è:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{x - x_0}}, & \text{se } x > x_0 \\ \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{x_0 - x}}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases},$$

Cioè

$$f'(x) = \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{|x - x_0|}},$$

avendosi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = +\infty$$

Ne consegue che $P_0(x_0, y_0)$ è un punto di flesso a tangente verticale per γ_{++} . Inoltre:

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in [0, +\infty) - \{x_0\}$$

Ciò implica che f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$. La derivata seconda è:

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{4\sqrt{(x-x_0)^3}}, & \text{se } x > x_0 \\ \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{4\sqrt{(x_0-x)^3}}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0, \quad \forall x \in [0, x_0) \\ f''(x) &< 0, \quad \forall x \in (x_0, +\infty) \end{aligned}$$

Significa che γ_{++} è concavo verso l'alto in $[0, x_0)$, concavo verso il basso in $(x_0, +\infty)$. Riguardo al comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

per cui la funzione diverge positivamente per $x \rightarrow +\infty$, mentre il grafico è privo di asintoti obliqui, giacchè $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Per ultimo:

$$f(0) = y_0 - \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x_0} = y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0} = y_1,$$

cioè $f(0) = y_1$, dove y_1 è dato dalla (A.6). Inoltre:

$$f(x) = 0 \iff x = x_0 - v_0 \left(\frac{y_0}{\eta_0} \right)^2 \stackrel{def}{=} x_1$$

Significa che γ_{++} interseca l'asse x nel punto di ascissa x_1 . L'analisi eseguita ci consente di tracciare la traiettoria della particella (cfr. fig. A.2).

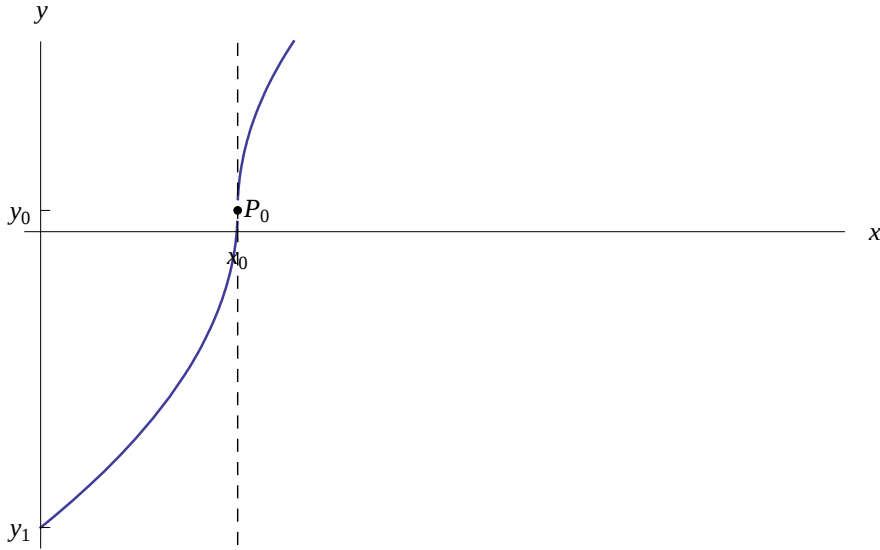


Figura A.2: Traiettoria della particella.

Il vettore velocità della particella è:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t) \mathbf{i} + \dot{y}(t) \mathbf{j} \tag{A.10}$$

essendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi coordinati. Abbiamo

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{|t-t_0|}} \mathbf{j} = \begin{cases} v_0 \mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0-t}} \mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ v_0 \mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{t-t_0}} \mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Si osservi che il moto componente secondo la direzione dell'asse x è uniforme, poichè avviene a velocità costante il cui modulo è $v_0 > 0$. Si tratta, in particolare, di un moto progressivo in quanto la particella si sposta nella direzione positiva dell'asse x . Per contro, il moto componente lungo l'asse y è accelerato per $t \in [0, t_0)$, giacchè $\ddot{y}(t) > 0$ in tale intervallo, mentre è decelerato per $t > t_0$ ($\ddot{y}(t) < 0$, $\forall t > t_0$). Inoltre, la funzione vettoriale (A.31) della variabile reale t , ha il seguente comportamento:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + (+\infty) \mathbf{j}$$

Infatti, per quanto precede, la componente secondo l'asse y , della funzione $\mathbf{v}(t)$ diverge positivamente per $t \rightarrow t_0$. Ciò implica che quando la particella transita per $P_0(x_0, y_0)$, la componente v_y della velocità tende a $+\infty$, ed è chiaro che l'accelerazione è altrettanto infinita. Più precisamente:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t) \mathbf{i} + \ddot{y}(t) \mathbf{j} \quad (\text{A.12})$$

Tenendo conto delle (A.8):

$$\mathbf{a}(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}} \mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}} \mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

In fig. A.3 sono riportati i grafici delle funzioni $\dot{y}(t)$ e $\ddot{y}(t)$.

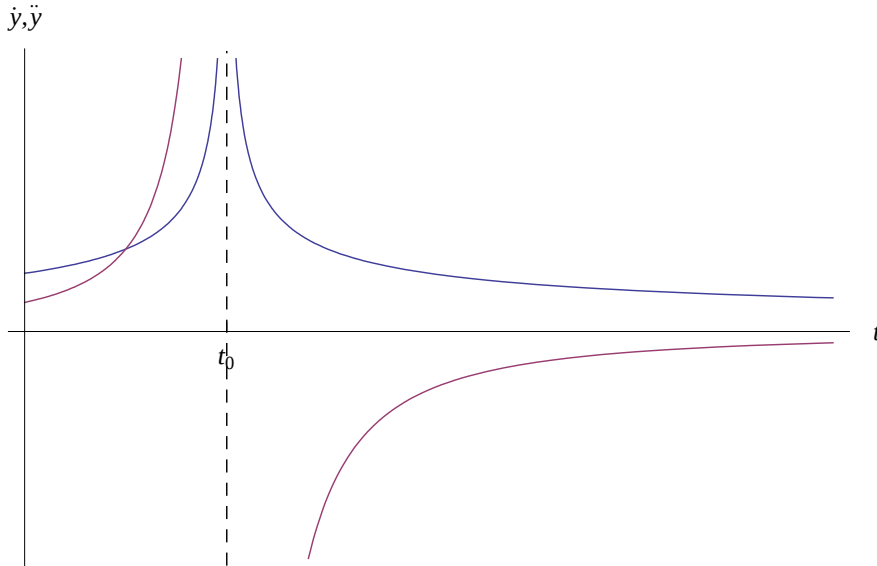


Figura A.3: La curva blu è l'andamento della componente $v_y = \dot{y}$ della velocità in funzione del tempo, mentre l'altra curva è il grafico della componente $a_y = \ddot{y}$ dell'accelerazione.

Se m è la massa della particella, la forza agente su di essa è:

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

Cioè

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} \frac{m\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}}\mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ -\frac{m\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}}\mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Dalla $y(t) = y_0 + \eta_0\sqrt{t_0-t}$ (valida per $t < t_0$) ricaviamo

$$\sqrt{t_0-t} = \frac{y_0-y}{\eta_0}, \quad \forall y \in (-\infty, y_0]$$

Dalla $y(t) = y_0 - \eta_0\sqrt{t-t_0}$ (valida per $t \geq t_0$) ricaviamo

$$\sqrt{t-t_0} = \frac{y-y_0}{\eta_0}, \quad \forall y \in [y_0, +\infty)$$

Sostituendo le formule trovate nella (A.14):

$$\mathbf{F}(y) = \begin{cases} \frac{m\eta_0^4}{4(y_0-y)^3}\mathbf{j}, & \text{se } -\infty < y < y_0 \\ -\frac{m\eta_0^4}{4(y-y_0)^3}\mathbf{j}, & \text{se } y > y_0 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Cioè la forza agente sulla particella è posizionale, e come tale deriva da un potenziale U e quindi da un'energia potenziale $V = -U$ tale che

$$\mathbf{F}(y) = \nabla U = -\nabla V,$$

osservando che $\mathbf{F}$ dipende dalla sola variabile y :

$$\mathbf{F}(y) = -\frac{dV(y)}{dy}\mathbf{j},$$

Per $-\infty < y < y_0$ troviamo:

$$\frac{dV(y)}{dy} = -\frac{m\eta_0^4}{4(y_0-y)^3}$$

Cioè

$$\begin{aligned} V(y) &= -\frac{m\eta_0^4}{4} \int (y_0-y)^{-3} dy = \frac{m\eta_0^4}{4} \int (y_0-y)^{-3} d(y-y_0) \\ &= -\frac{m\eta_0^4}{8(y_0-y)^2} + V_0 \end{aligned}$$

Un qualunque campo scalare di energia potenziale deve annullarsi all'infinito nelle coordinate spaziali:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} V(y) = 0 \implies V_0 = 0$$

Pertanto:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y_0-y)^2}, \quad \forall y \in (-\infty, y_0) \quad (\text{A.16})$$

Per $-\infty < y < y_0$ troviamo:

$$\frac{dV(y)}{dy} = \frac{m\eta_0^4}{4(y_0-y)^3}$$

Cioè

$$\begin{aligned} V(y) &= -\frac{m\eta_0^4}{4} \int (y - y_0)^{-3} dy \\ &= -\frac{m\eta_0^4}{8(y - y_0)^2} + V'_0 \end{aligned}$$

Ma

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} V(y) = 0 \implies V'_0 = 0$$

Pertanto:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y - y_0)^2}, \quad \forall y \in (y_0, +\infty) \quad (\text{A.17})$$

Le (A.16)-(A.17) si riuniscono in un'unica equazione:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y - y_0)^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R} - \{y_0\}, \quad (\text{A.18})$$

che è una buca di potenziale infinitamente profonda come riportato in fig. A.8.

Riepilogando: man mano che la particella si avvicina alla singolarità $P_0(x_0, y_0)$, il campo diviene progressivamente più intenso e tale sarà il modulo della forza che ne deriva. Quest'ultima incurverà la traiettoria fino a quando ($t \rightarrow t_0 \implies |\mathbf{F}(t)| \rightarrow +\infty$) questa risulterà essere tangente alla retta verticale $x = x_0$. Qui il vettore velocità avrà modulo infinito con orientamento verso l'alto. Si badi che tale configurazione cinematica contraddice uno dei postulati della Relatività Speciale, secondo cui l'estremo superiore dell'insieme $\mathcal{V}$ dei valori assunti dalla velocità di particelle massive è pari a c i.e. velocità della luce nel vuoto ($< +\infty$):

$$c = \sup \mathcal{V} < +\infty$$

A.2 Interpretazione cinematica dei punti cuspidali

Consideriamo una particella di massa m che compie un moto piano lungo una traiettoria γ_+ di rappresentazione parametrica:

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = y_0 + \eta_0 \sqrt{|t - t_0|}, \quad t \in [0, +\infty), \quad (\text{A.19})$$

essendo t il tempo, mentre $v_0 > 0$ e $\eta_0 > 0$ sono due costanti con le appropriate dimensioni². Il numero reale $t_0 > 0$ è, invece, un istante assegnato da non confondere con l'istante iniziale che è $t = 0$. La traiettoria γ_+ non è una curva regolare poiché $y(t)$ ha una discontinuità di seconda specie in t_0 . Infatti:

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0}, & \text{se } t \geq t_0 \\ y_0 + \eta_0 \sqrt{t_0 - t}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases}, \quad (\text{A.20})$$

onde:

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} \frac{\eta_0}{2\sqrt{t - t_0}}, & \text{se } t > t_0 \\ -\frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0 - t}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

²In particolare, v_0 è la componente della velocità $\mathbf{v}$ della particella nella direzione dell'asse x .

La derivata prima è definita in $[0, t_0) \cup (t_0, +\infty)$, ed eseguendo il limite per $t \rightarrow t_0$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \dot{y}(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} \dot{y}(t) = +\infty, \quad (\text{A.22})$$

da cui la natura cuspidale del punto $(t_0, y_0) \in \Gamma_y : y = y(t)$. Studiamo ora la funzione $y(t)$.

Insieme di definizione

La funzione (A.20) è definita in $\mathbb{R}$, ma dal momento che il tempo t è non negativo, consideriamo la restrizione a $[0, +\infty)$ in accordo con la (A.19).

Studio del segno

Risulta $y(t) \geq 0, \forall t \in [0, +\infty)$, per cui Γ_y è contenuto nel primo quadrante.

Intersezione con gli assi

$$y(t) = 0 \iff \sqrt{|t - t_0|} = -\frac{y_0}{\eta_0} \quad \text{mai!} \quad (\text{A.23})$$

giacchè è $y_0, \eta_0 > 0$. Ne consegue che Γ_y non interseca l'asse delle ascisse.

$$y(0) = y_0 + \eta_0 \sqrt{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} y_1 > y_0 \quad (\text{A.24})$$

Cioè Γ_y interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0, y_1)$.

Studio della derivata prima

Dalle (A.21) vediamo che

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &> 0 \iff t > t_0 \\ 0 \leq t < t_0 &\implies \dot{y}(t) < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Cioè la funzione $y(t)$ è strettamente crescente in $(t_0, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(0, t_0)$.

Derivata seconda

$$\ddot{y}(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}}, & \text{se } t > t_0 \\ -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Riesce

$$\ddot{y}(t) = -\frac{\eta_0}{4\sqrt{|t - t_0|^3}} < 0, \quad \forall t \in [0, t_0) \cup (t_0, +\infty)$$

Ne consegue che $\Gamma_y : y = y(t)$ volge la concavità verso il basso.

Comportamento all'infinito. Asintoti obliqui

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$$

Inoltre:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{y}(t) = 0,$$

per cui il grafico Γ_y è privo di asintoti obliqui.

Dalle (A.25) emerge che il punto cuspidale (t_0, y_0) è punto di minimo assoluto per la funzione $y(t)$.

Tracciamento del grafico

A questo punto siamo in grado di tracciare il grafico Γ_y , come illustrato in fig. A.4.

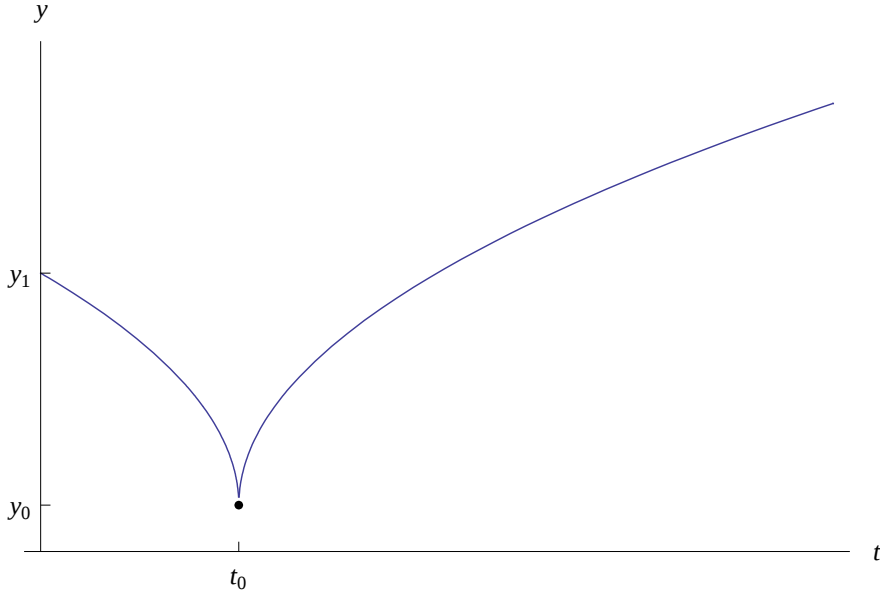


Figura A.4: Grafico dell'ordinata y della particella in funzione del tempo. Il punto (t_0, y_0) è una cuspide.

Eliminando il parametro t tra le (A.19), otteniamo la rappresentazione ordinaria della traiettoria, cioè $\gamma_+ : y = f(x)$, dove:

$$f(x) = y_0 + \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{|x - x_0|}, \quad \forall x \in [0, +\infty) \quad (\text{A.27})$$

essendo $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} x(t_0)$. Svincoliamoci dal valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} y_0 + \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x - x_0}, & \text{se } x \geq x_0 \\ y_0 + \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x_0 - x}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases}, \quad (\text{A.28})$$

la cui derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{x - x_0}}, & \text{se } x > x_0 \\ -\frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{x_0 - x}}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases}, \quad (\text{A.29})$$

avendosi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty$$

Ne consegue che $P_0(x_0, y_0)$ è un punto cuspidale per γ_+ . Inoltre:

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0, \quad \forall x \in (x_0, +\infty) \\ f'(x) &< 0, \quad \forall x \in [0, x_0) \end{aligned}$$

Ciò implica la stretta crescita di $f(x)$ in $(x_0, +\infty)$, mentre la funzione è strettamente decrescente in $(0, x_0)$. È facile persuadersi che $f''(x) < 0$, $\forall x \in (0, +\infty) - \{x_0\}$. Il comportamento agli estremi del campo di esistenza è:

$$f(0) = y_0 + \eta_0 v_0^{1/2} \sqrt{x_0} = y_0 + \eta_0 \sqrt{t_0},$$

cioè $f(0) = y_1$, dove y_1 è dato dalla (A.24). Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

per cui la funzione diverge positivamente per $x \rightarrow +\infty$, mentre il grafico è privo di asintoti obliqui, giacchè $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

L'analisi eseguita ci consente di tracciare la traiettoria della particella (cfr. fig. A.5).

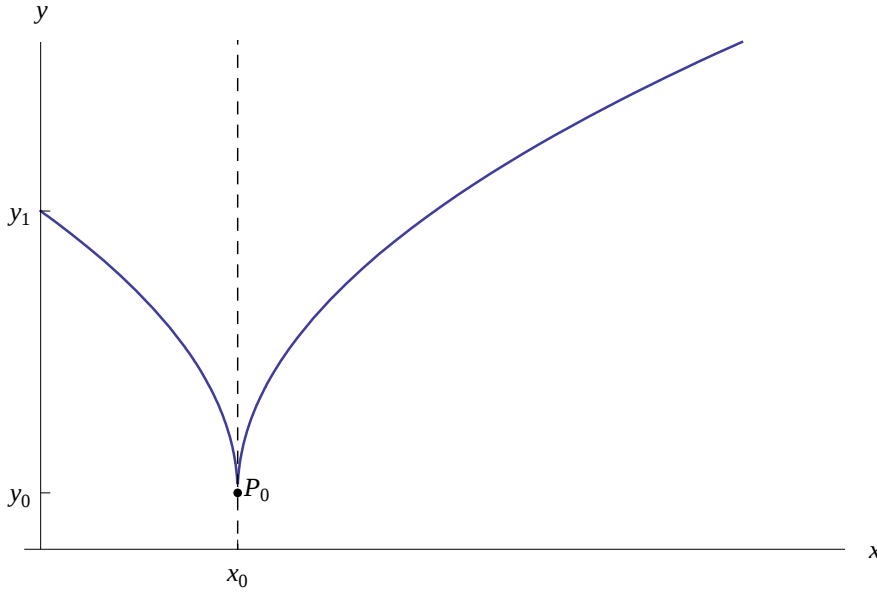


Figura A.5: Traiettoria della particella.

Il vettore velocità della particella è:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t) \mathbf{i} + \dot{y}(t) \mathbf{j} \quad (\text{A.30})$$

essendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi coordinati. Abbiamo

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} v_0 \mathbf{i} - \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0-t}} \mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ v_0 \mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{t-t_0}} \mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

Si osservi che il moto componente secondo la direzione dell'asse x è uniforme, poichè avviene a velocità costante il cui modulo è $v_0 > 0$. Si tratta, in particolare, di un moto progressivo in quanto la particella si sposta nella direzione positiva dell'asse x . Per contro, il moto componente lungo l'asse y è decelerato, giacchè $\ddot{y}(t) < 0$. Tale moto è regressivo per $t < t_0$, per poi divenire progressivo a ogni $t > t_0$. Inoltre, la funzione vettoriale (A.31) della variabile reale t , ha il seguente comportamento:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + (-\infty) \mathbf{j}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} \mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + (+\infty) \mathbf{j}$$

Infatti, per quanto precede, la componente secondo l'asse y , della funzione $\mathbf{v}(t)$ diverge negativamente per $t \rightarrow t_0^-$, positivamente per $t \rightarrow t_0^+$. Ciò implica che quando la particella

transita per $P_0(x_0, y_0)$, la componente v_y della velocità passa istantaneamente da $-\infty$ a $+\infty$, ed è chiaro che l'accelerazione è altrettanto infinita³. Più precisamente:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t) \mathbf{i} + \ddot{y}(t) \mathbf{j} \quad (\text{A.32})$$

Tenendo conto delle (A.26):

$$\mathbf{a}(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}} \mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}} \mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases}, \quad (\text{A.33})$$

o ciò che è lo stesso

$$\mathbf{a}(t) = -\frac{\eta_0}{4\sqrt{|t-t_0|^3}} \mathbf{j} \quad (\text{A.34})$$

In fig. A.6 sono riportati i grafici delle funzioni $\dot{y}(t)$ e $\ddot{y}(t)$.

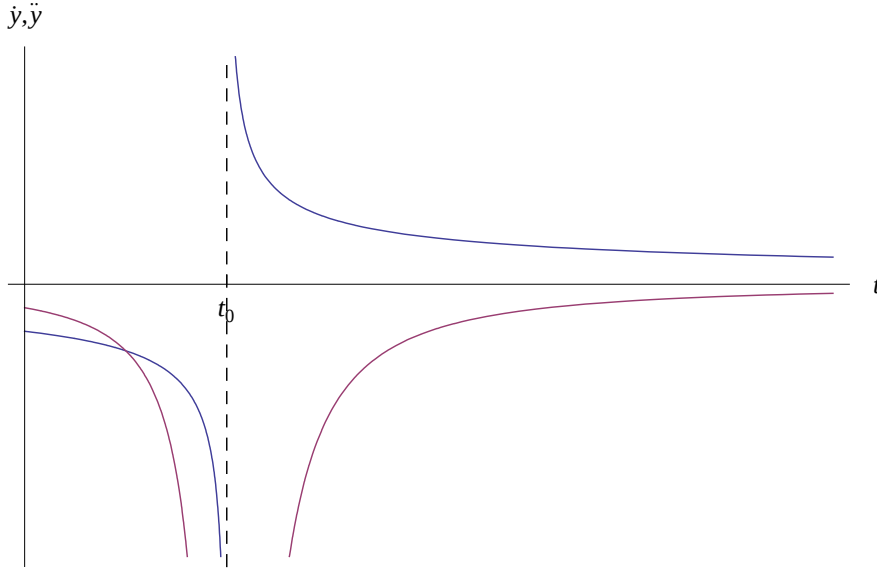


Figura A.6: La curva blu è l'andamento della componente $v_y = \dot{y}$ della velocità in funzione del tempo, mentre l'altra curva è il grafico della componente $a_y = \ddot{y}$ dell'accelerazione.

Se m è la massa della particella, la forza agente su di essa è:

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

Cioè

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{m\eta_0}{4\sqrt{|t-t_0|^3}} \mathbf{j} \quad (\text{A.35})$$

Dalla $y(t) = y_0 + \eta_0\sqrt{|t-t_0|}$ ricaviamo

$$\sqrt{|t-t_0|} = \frac{y-y_0}{\eta_0}, \quad \forall y \in [y_0, +\infty),$$

³Per $t \rightarrow t_0$, la variazione istantanea della componente $v_y(t) = \dot{y}(t)$ della velocità da $-\infty$ a $+\infty$, sembrerebbe produrre un'accelerazione divergente a $+\infty$. In realtà, l'accelerazione diverge negativamente poichè $v_y(t)$ risulta essere strettamente decrescente in ogni intorno di t_0 (cfr. grafico della fig. A.6).

per sostituirla nella (A.35):

$$\mathbf{F}(y) = -\frac{m\eta_0^4}{4(y-y_0)^3}\mathbf{j}, \quad \forall y \in (y_0, +\infty) \quad (\text{A.36})$$

Cioè la forza agente sulla particella è posizionale, e come tale deriva da un potenziale U e quindi da un'energia potenziale $V = -U$ tale che

$$\mathbf{F}(y) = \nabla U = -\nabla V,$$

osservando che $\mathbf{F}$ dipende dalla sola variabile y :

$$\mathbf{F}(y) = -\frac{dV(y)}{dy}\mathbf{j},$$

per cui

$$\begin{aligned} V(y) &= \frac{m\eta_0^4}{4} \int \frac{dy}{(y-y_0)^3} \\ &= -\frac{m\eta_0^4}{8(y-y_0)^2} + V_0, \quad \forall y \in (y_0, +\infty) \end{aligned}$$

Un qualunque campo si annulla all'infinito, onde:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} V(y) = 0 \implies V_0 = 0$$

Quindi:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y-y_0)^2}, \quad \forall y \in (y_0, +\infty) \quad (\text{A.37})$$

Riepilogando: man mano che la particella si avvicina alla singolarità $P_0(x_0, y_0)$, il campo diviene progressivamente più intenso e tale sarà il modulo della forza che ne deriva. Quest'ultima incurverà la traiettoria fino a quando ($t \rightarrow t_0 \implies |\mathbf{F}(t)| \rightarrow +\infty$) questa risulterà essere tangente alla retta verticale $x = x_0$. Qui il vettore velocità avrà modulo infinito con orientamento verso il basso, per invertire istantaneamente il verso, conservando la direzione. Per tale ragione, il punto cuspidale $P_0(x_0, y_0)$ è anche denominato *punto di regresso* (*rebroussement* [1]). Si badi che tale configurazione cinematica contraddice uno dei postulati della Relatività Speciale, secondo cui l'estremo superiore dell'insieme $\mathcal{V}$ dei valori assunti dalla velocità di particelle massive è pari a c i.e. velocità della luce nel vuoto ($< +\infty$):

$$c = \sup \mathcal{V} < +\infty$$

Consideriamo ora la traiettoria γ_- di rappresentazione parametrica:

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = y_0 - \eta_0 \sqrt{|t - t_0|}, \quad t \in [0, +\infty) \quad (\text{A.38})$$

Studiando la funzione $y(t) = y_0 - \eta_0 \sqrt{|t - t_0|}$ si perviene al grafico riportato in fig. A.7.

Riportiamo di seguito le derivate – prima e seconda – della $y(t)$:

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{2\sqrt{t-t_0}}, & \text{se } t > t_0 \\ \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0-t}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

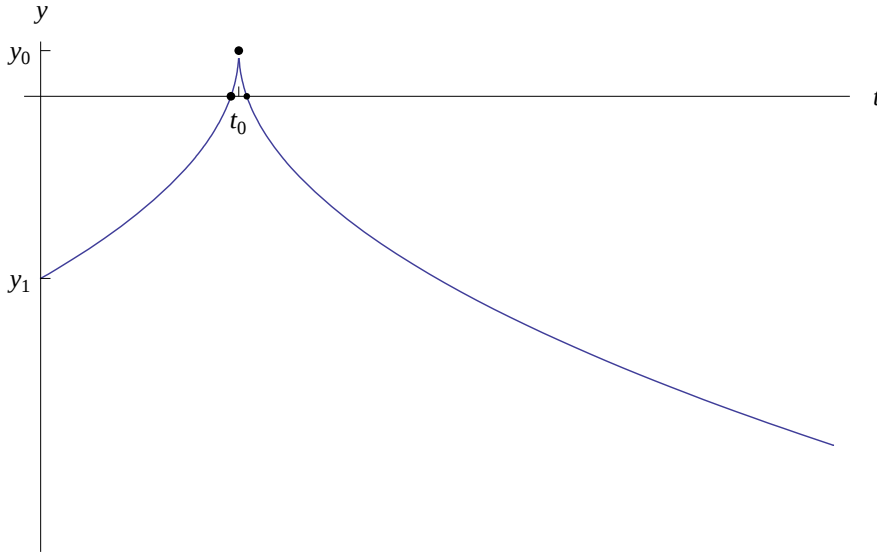


Figura A.7: Andamento dell'ordinata $y = y_0 - \eta_0 \sqrt{|t - t_0|}$ in funzione del tempo t . In questo caso, il diagramma orario interseca l'asse delle ascisse nei punti $t_{1,2} = t_0 \mp \left(\frac{y_0}{\eta_0}\right)^2$. Il diagramma interseca l'asse delle ordinate nel punto di ordinata $y_1 = y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0}$.

$$\ddot{y}(t) = \frac{\eta_0}{4\sqrt{|t - t_0|}^3}$$

Quindi il vettore velocità:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} v_0 \mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0 - t}} \mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ v_0 \mathbf{i} - \frac{\eta_0}{2\sqrt{t - t_0}} \mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases}, \quad (\text{A.40})$$

e il vettore accelerazione:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\eta_0}{4\sqrt{|t - t_0|}^3} \mathbf{j} \quad (\text{A.41})$$

E la forza:

$$\mathbf{F}(t) = \frac{m\eta_0}{4\sqrt{|t - t_0|}^3} \mathbf{j} \quad (\text{A.42})$$

In questo caso la velocità ha il seguente comportamento:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + (+\infty) \mathbf{j}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} \mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + (-\infty) \mathbf{j}$$

da cui vediamo che transitando per la cuspidè, la componente v_y del vettore velocità passa istantaneamente da $+\infty$ a $-\infty$. Svincoliamoci dalla variabile t ricavando dalla $y(t) = y_0 - \eta_0 \sqrt{|t - t_0|}$

$$\sqrt{|t - t_0|} = \frac{y_0 - y}{\eta_0}, \quad \forall y \in (-\infty, y_0),$$

che sostituita nella (A.42) porge

$$\mathbf{F}(y) = \frac{m\eta_0^4}{4(y_0 - y)^3} \mathbf{j}, \quad \forall y \in (-\infty, y_0) \quad (\text{A.43})$$

L'energia potenziale del campo $\mathbf{F}(y)$ è

$$\begin{aligned} V(y) &= -\frac{m\eta_0^4}{4} \int (y_0 - y)^{-3} dy \\ &= -\frac{m\eta_0^4}{8(y_0 - y)^2} + V'_0, \quad \forall y \in (-\infty, y_0) \end{aligned}$$

Al solito, il campo si annulla all'infinito:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} V(y) = 0,$$

onde $V'_0 = 0$. Quindi:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y_0 - y)^2}, \quad \forall y \in (-\infty, 0) \quad (\text{A.44})$$

Le (A.37)-(A.44) si riuniscono in un'unica equazione:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y - y_0)^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R} - \{y_0\}, \quad (\text{A.45})$$

che è una buca di potenziale infinitamente profonda come riportato in fig. A.8.

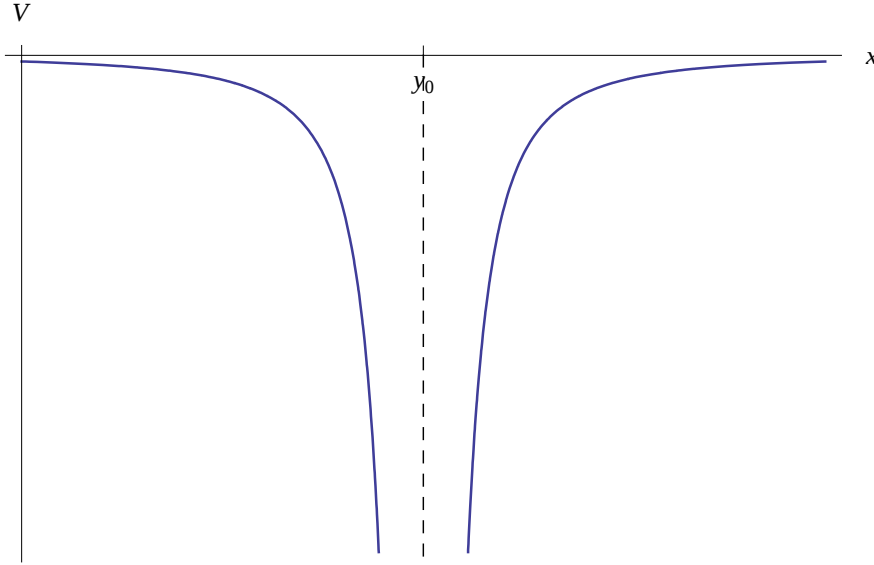


Figura A.8: Buca di potenziale infinitamente profonda.

Per quanto riguarda l'espressione analitica della forza agente sulla particella, le (A.36)-(A.43) si riuniscono nell'unica espressione:

$$\mathbf{F}(y) = -\frac{m\eta_0^4}{4|y - y_0|^3} \mathbf{j}$$

Ne consegue che le traiettorie $\gamma_{\pm}$ sono le curve integrali del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -\frac{\eta_0^4}{4|y - y_0|^3} \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

Le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \\ y(0) &= y_1 > 0, \quad \dot{y}(0) = -\frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0}} \end{aligned}$$

danno luogo alla traiettoria γ_+ . L'ordinata y_1 è fissata dai parametri $\eta_0 > 0, t_0 > 0$, giacchè $y_1 = y_0 + \eta_0\sqrt{t_0}$. Le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \\ y(0) &= y_1 < 0, \quad \dot{y}(0) = \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0}} \end{aligned}$$

danno luogo alla traiettoria γ_- . Si noti che anche qui l'ordinata y_1 è fissata dai parametri $\eta_0 > 0, t_0 > 0$, avendosi $y_1 = y_0 - \eta_0\sqrt{t_0}$.

A.3 La notazione di Iverson e il Teorema di Gödel

Nella definizione della [funzione signum](#) abbiamo utilizzato le **parentesi di Iverson**. Se Π è l'insieme delle proposizioni $\mathcal{P}$ associate a un sistema formale Σ :

$$[\cdot] : \Pi \rightarrow \mathbb{N} \quad \mathcal{P} \rightarrow [\mathcal{P}], \quad \forall \mathcal{P} \in \Pi \quad (\text{A.47})$$

Tale legge è

$$[\mathcal{P}] = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{P} \text{ è vera} \\ 0, & \text{se } \mathcal{P} \text{ è falsa} \end{cases} \quad (\text{A.48})$$

La funzione (A.47) è definita in Π e il suo codominio è $[\cdot](\Pi) = \{0, 1\}$. Di seguito, ora, alcune considerazioni intuitive collegate al Teorema di Gödel secondo cui, in ogni sistema formale esistono proposizioni indecidibili, nel senso che non possono essere nè dimostrate nè confutate. Come è noto, Gödel partì dal famoso paradosso del mentitore. Si consideri, ad esempio, la seguente proposizione:

$$\mathcal{P}_* = \text{questa proposizione è falsa} \quad (\text{A.49})$$

È chiaro che $\mathcal{P}_*$ è vera se e solo se è falsa. Ciò implica che le parentesi di Iverson applicate a $\mathcal{P}_*$ non restituiscono alcun valore logico (cioè 0 o 1). In altri termini:

$$\forall \Sigma, \exists \mathcal{P}_* \in \Sigma \mid \text{la funzione } [\cdot] \text{ non è definita}$$

Ciò è riportato schematicamente in [A.9](#).

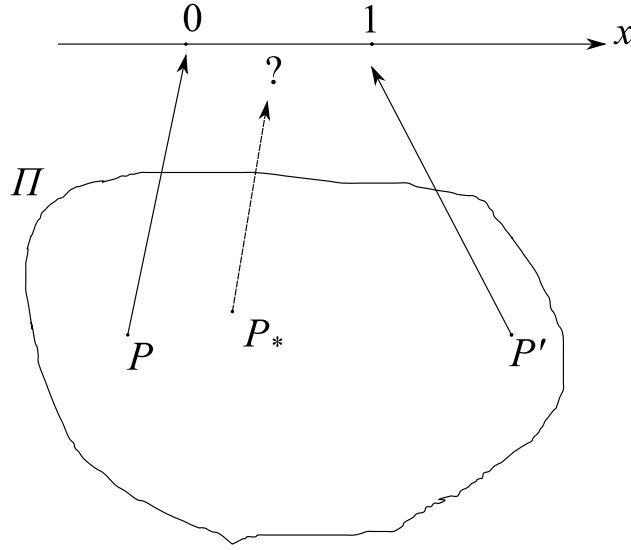


Figura A.9: Rappresentazione schematica della funzione A.47. La proposizione $P_* \in \Sigma$ è *indecidibile*, per cui la funzione $[\cdot]$ non è ivi definita.

A.4 Suriettività e inieltività

Su un [gruppo](#) di Facebook dedicato alla Matematica, c'è stato uno scambio di idee con un utente. In fig. A.10 riportiamo lo screenshot dell'osservazione sulle funzioni suriettive ed inieltive.

Rivediamo un attimo la nostra definizione di funzione surieltiva. A tale scopo denominiamo tale definizione con Definizione 01, mentre l'altra la chiamiamo Definizione 02.

Data la funzione (o applicazione):

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto y, \quad \forall x \in X, \quad (\text{A.50})$$

ricordiamo che X è il dominio di f , mentre l'insieme $f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x), \forall x \in X\} \subseteq Y$ è il codominio di f che nella Definizione 02 è indicato con il simbolo $\text{cod}(f)$ o $\text{Im}(f)$. Nella Definizione 01 la funzione (A.50) è surieltiva se e solo se $f(X) = Y$. Nella Definizione 02 abbiamo: comunque prendiamo un insieme $B \subseteq Y$, la funzione (A.50) è surieltiva se e solo se $B \subseteq f(X)$. Nel tentativo di comprendere la differenza tra queste due definizioni, consideriamo l'esempio seguente:

Esempio 90 Sia data la funzione esponenziale:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.51})$$

Qui è $X = Y = \mathbb{R}$ e $f(X) = (0, +\infty)$, per cui secondo la Definizione 01, la funzione esponenziale non è surieltiva. Secondo la Definizione 02, invece, la funzione esponenziale è surieltiva su **ogni** insieme $B \subseteq (0, +\infty)$.

Ma, a questo punto, è chiaro che la definizione di surieltività viene a dipendere dalla scelta dell'insieme Y . Infatti, scrivendo:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), \quad x \mapsto e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.52})$$

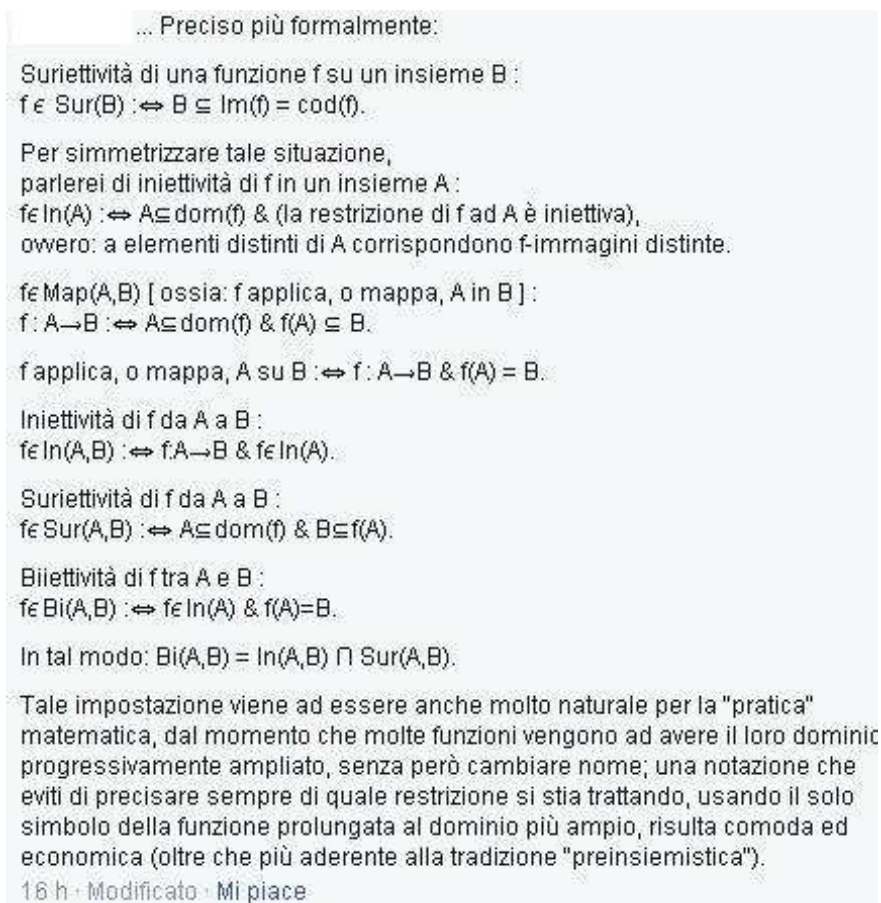


Figura A.10: Screenshot della pagina facebook. Per questioni di privacy abbiamo oscurato il nome dell'utente.

la funzione esponenziale risulta suriettiva secondo la Definizione 01. Per contro, scrivendo:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow B' \quad , \quad x \mapsto y, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (A.53)$$

la funzione esponenziale risulta non suriettiva, $\forall B' \supset (0, +\infty)$.

Utilizzando un linguaggio suggestivo, ma efficace, possiamo concludere che la definizione di suriettività dipende dall'insieme bersaglio Y :

$$f : X \rightarrow Y \quad , \quad x \mapsto y, \quad \forall x \in X \quad (A.54)$$

A.5 Funzioni asintoticamente periodiche

Rammentiamo la definizione di *funzione periodica*:

Definizione 98

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ è } \textbf{periodica} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists T > 0 \mid \forall x \in X, \quad f(x) = f(x + kT), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (A.55)$$

Il numero reale $T > 0$ è il **periodo** della funzione.

La definizione (A.55) implica che l'insieme di definizione $X \subseteq \mathbb{R}$ è illimitato sia superiormente, sia inferiormente⁴, giacchè $\forall x \in X, \quad (x + kT) \in X, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

In alcuni applicazioni (la serie di Fourier) il numero reale T che verifica la proprietà (A.55) si chiama **periodo fondamentale** della funzione. Tale denominazione deriva dal fatto che $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad nT$ è ancora un **periodo** della funzione.

Tuttavia nel seguito, quando parliamo di periodo, ci riferiamo al periodo fondamentale. Risulta

$$f(X) = f(A),$$

dove $A = X \cap [0, T)$. Cioè l'immagine di X tramite f coincide con l'immagine di A tramite f . Quest'ultima è il codominio della restrizione di f all'insieme A , ovvero della funzione $f_A : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Il diagramma cartesiano di una funzione f definita in X illimitato e periodica di periodo T , è l'unione di un numero infinito di archi ciascuno dei quali è il grafico della restrizione f_A traslato lungo l'asse x con traslazione di ampiezza $|k|T$, dove $k \in \mathbb{Z}$. Per $k > 0$ la traslazione è nel verso delle x crescenti, mentre per $k < 0$ è nel verso delle x decrescenti. Cioè:

$$\Gamma = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma_k,$$

essendo $\Gamma_k : y = f_A(x)$ traslato lungo l'asse x di $|k|T$. Precisamente:

$$\Gamma_k : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [kT, (k+1)T), \quad k \in \mathbb{Z}$$

⁴Tipicamente, nelle applicazioni X è illimitato solo superiormente. Si pensi ad una grandezza periodica che sia funzione del tempo t , per cui abbiamo una funzione periodica $f(t)$. In questo caso l'insieme di definizione è $[0, +\infty)$.

Abbiamo, dunque, una successione di archi di curva $\{\Gamma_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Esplicitando i singoli termini:

$$\begin{aligned}
 & \dots \\
 & \Gamma_{-|n|} : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [-|n|T, (-|n|+1)T) \\
 & \dots \\
 & \Gamma_{-2} : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [-2T, -T) \\
 & \Gamma_{-1} : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [-T, 0) \\
 & \Gamma_0 : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [0, T) \\
 & \Gamma_1 : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [T, 2T) \\
 & \Gamma_2 : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [2T, 3T) \\
 & \dots \\
 & \Gamma_n : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [nT, (n+1)T) \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

Ad esempio, Γ_2 è la curva $y : f_A(x)$ traslata nella direzione dell'asse x con una traslazione di ampiezza 2 nel verso delle x crescenti, mentre Γ_{-2} è la curva $y : f_A(x)$ traslata nella direzione dell'asse x con una traslazione di ampiezza 2 nel verso delle x decrescenti, come illustrato in fig. A.11.

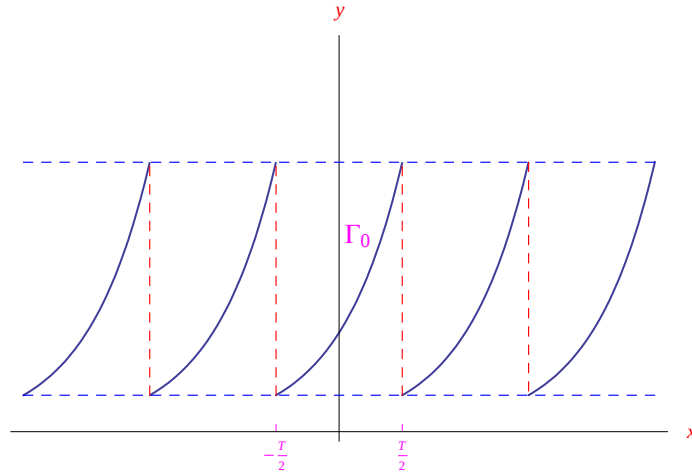


Figura A.11: Il grafico di una funzione periodica si compone di infiniti archi, ciascuno dei quali ottenuto da Γ_0 per traslazione nella direzione dell'asse x .

Esempi immediati di funzioni periodiche sono le funzioni circolari $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, etc, e una qualunque combinazione lineare o prodotto di esse, come ad esempio: $\sin x + \cos x$, $\sin x \cos x$, $\tan x - \cos x$. In questi casi il periodo va determinato dalla (A.55). Ad esempio, per la funzione $\sin x$:

$$\sin(x + kT) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Sviluppando il primo membro con le note formule di addizione degli archi:

$$\sin x \cos kT + \sin kT \cos x = \sin x$$

Tale uguaglianza deve essere verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall k \in \mathbb{Z}$, per cui:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} \cos kT = 1 \\ \sin kT = 0 \end{cases} \iff kT = 2k\pi$$

Ciòè il periodo della funzione $\sin x$ è 2π . Si noti che a tale conclusione si giunge per via grafica, osservando che nell'intervallo $[0, 2\pi]$ il grafico di $\sin x$ compie un'oscillazione completa.. Procedendo in maniera simile si determina il periodo delle rimanenti funzioni circolari. Se invece prendiamo la funzione $\sin 2x$, vediamo che è periodica di periodo π , , giacchè il grafico di $\sin 2x$ compie un'oscillazione completa in $[0, \pi]$. Anche la funzione $|\sin x|$ ha periodo dimezzato a causa della presenza del valore assoluto , come possiamo vedere dalla fig. A.12.

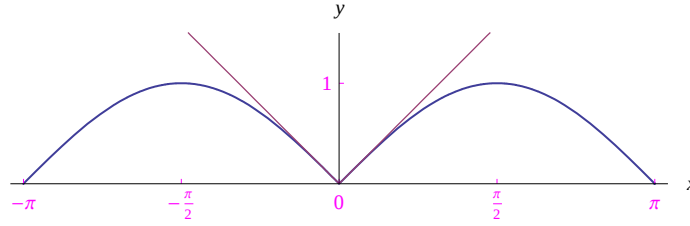


Figura A.12: Andamento del grafico di $|\sin x|$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ confrontato con quello di $\sin x$.

Nelle applicazioni, x può essere la grandezza ωt , dove ω è una frequenza angolare (o pulsazione) e t il tempo, mentre la funzione $\sin x$ è la tensione (differenza di potenziale) V_{in} all'ingresso di un circuito raddrizzatore. Precisamente, all'ingresso si ha la grandezza alternata:

$$V_{in}(t) = V_0 \sin \omega t,$$

periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, mentre la differenza di potenziale ai capi dell'uscita del circuito è:

$$V_{out}(t) = V_0 |\sin \omega t|,$$

ancora periodica (di periodo $T' = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$) ma non alternata, nel senso che le *semionde negative* sono ora *positive*. Tali considerazioni sono illustrate nelle figg. A.13-A.14.

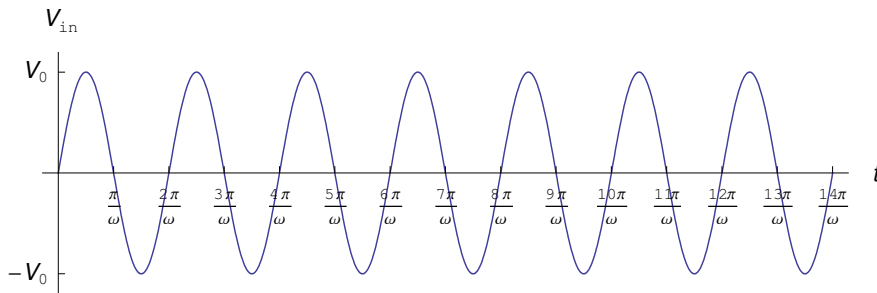


Figura A.13: Andamento della differenza di potenziale all'ingresso di un circuito raddrizzatore. La tensione varia sinusoidalmente nel tempo: $V_{in}(t) = V_0 \sin \omega t$.

Se $f(x)$ è periodica (di periodo T) e $g(x)$ è una funzione lineare, i.e. $g(ax + b)$ con $a \neq 0$, la funzione composta $f[g(x)] = f(ax + b)$ è a sua volta periodica di periodo $T' = \frac{T}{a}$. Ad esempio, la funzione $\sin(ax + b)$ è periodica di periodo $\frac{2\pi}{a}$, mentre $\sin(ax^2 + b)$ non è una funzione periodica, come nemmeno $\sin \sqrt{x}$. Viceversa, se la componente interna g è periodica, la funzione composta $f[g(x)]$ è una funzione periodica, per ogni f . Ad esempio, $\sin \sqrt{x}$ non è periodica, mentre $\sqrt{\sin x}$ lo è. Assegnata la funzione periodica $f(x)$ e una funzione non periodica $\phi(x)$, il prodotto $\phi(x)f(x)$ è manifestamente non periodico e la funzione $\phi(x)$

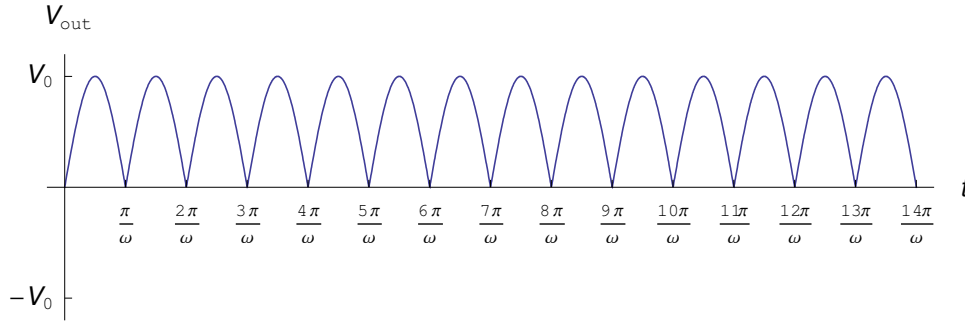


Figura A.14: Andamento della differenza di potenziale all'uscita di un circuito raddrizzatore, risultando $V_0(t) = V_0 |\sin \omega t|$.

si dice *inviluppo di modulazione*. Tale denominazione deriva dalla nozione di *modulazione di ampiezza*, quale sistema di comunicazione utilizzato in radiotecnica. Più precisamente, consideriamo la trasmissione di un segnale a bassa frequenza (non periodico) $\phi(t)$ utilizzando le onde elettromagnetiche come mezzo di trasmissione. Per la sua trasmissione si utilizza un *segnale portante* $u(t)$ che è periodico di periodo T . Qui $u(t)$ rappresenta la generica componente⁵ del campo elettrico $\mathbf{E}$ o del campo magnetico $\mathbf{B}$. Lo scopo del segnale portante è quello di *trasportare* (da qui il nome “portante”) il segnale a bassa frequenza. Il trasporto può avvenire attraverso la modulazione di ampiezza, nel senso che l'ampiezza del segnale portante non è costante, ma dipende dal tempo secondo la legge $\phi(t)$. In altre parole, il segnale modulato è $\phi(t)u(t)$. In fig. A.15 riportiamo un esempio di modulazione di ampiezza, in cui il segnale modulante è una gaussiana di larghezza ω^{-2} , dove ω è la frequenza angolare del segnale portante. Abbiamo, dunque, un *inviluppo gaussiano*.

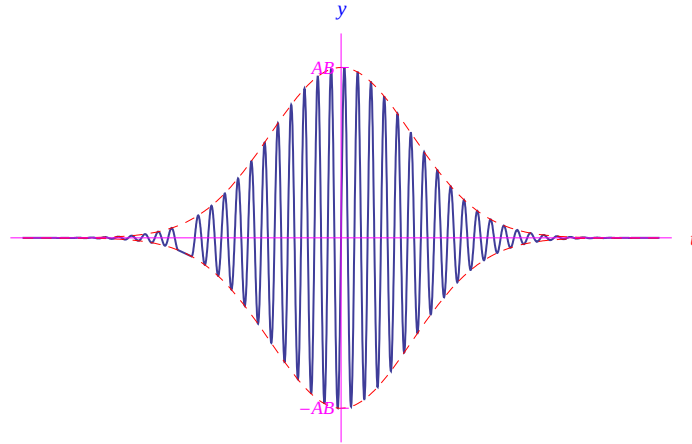


Figura A.15: Il segnale a radiofrequenza $u(t) = A \sin \omega t$ è modulato in ampiezza da un segnale a bassa frequenza “di prova”, dato dalla gaussiana $\phi(t) = B e^{-\omega^2 t^2}$ di larghezza ω^{-2} .

A questo punto è necessario fare un'osservazione. Abbiamo visto che se $\phi(x)$ è una funzione non periodica e $f(x)$ è una funzione periodica, il prodotto $\phi(x)f(x)$ non è una funzione periodica. Infatti:

$$\nexists T > 0 \mid \forall x, \phi(x)f(x) = \phi(x + kT)f(x + kT), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.56})$$

⁵Dovremmo tener conto della dipendenza dalle coordinate spaziali (x, y, z) , ma a noi interessa solo la dipendenza dal tempo t .

Fa eccezione il caso in cui $\phi(x)$ è una funzione costante. Ad esempio, $\phi(x) = A \neq 0, \forall x$. Infatti, in tal caso abbiamo:

$$Af(x) = Af(x + kT), \quad \forall x, \forall k \in \mathbb{Z},$$

giacchè $f(x)$ è per ipotesi periodica di periodo T . Peraltro, questo è un caso banale poichè se $f(x)$ ha periodo T , il prodotto di una costante A per $f(x)$ è una funzione periodica di periodo T . Chiameremo, pertanto, *inviluppo banale di $f(x)$* , ogni funzione costante $\phi(x) = A \neq 0$ che moltiplica $f(x)$.

Abbiamo visto che la modulazione di ampiezza è ottenuta moltiplicando il segnale portante $f(x)$ (qui la variabile x è il tempo) di periodo T , per il segnale modulante (non periodico) $\phi(x)$. Il risultato di tale composizione è la funzione (segnale modulato) non periodica:

$$g(x) = \phi(x) f(x) \quad (\text{A.57})$$

Osserviamo che l'ampiezza della funzione $f(x)$ può essere modulata sostituendo nella (A.57) all'operazione di moltiplicazione di funzioni, l'operazione di addizione di funzioni, ottenendo:

$$g(x) = \phi(x) + f(x)$$

Infatti, nella sezione 2.3 abbiamo visto l'esempio della funzione $x + 2\pi \sin x$, che ora riproponiamo nella forma:

$$g(x) = x + B \sin x, \quad B > 0,$$

in cui il segnale portante è $B \sin x$, mentre il modulante è la funzione identica. Il grafico di $g(x)$ oscilla sinusoidalmente tra le rette $r_{\pm} : y = x \pm B$, come mostrato in fig. A.16, poichè $x - B \leq g(x) \leq x + B, \forall x \in \mathbb{R}$.

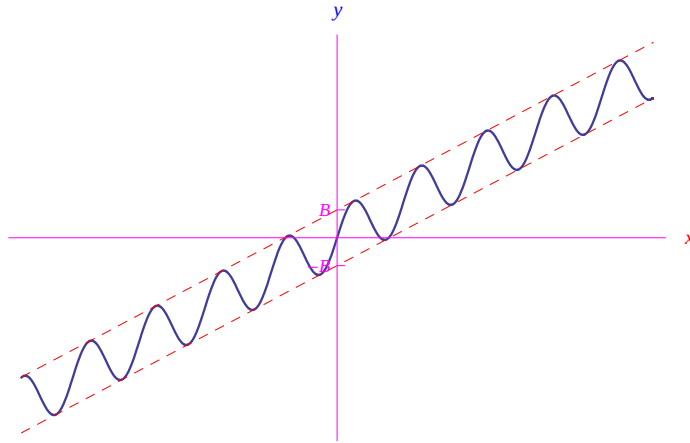


Figura A.16: Il segnale portante $B \sin x$ è modulato in ampiezza dal segnale $\phi(x) = x$.

Abbiamo:

$$x - B \leq g(x) \leq x + B,$$

onde per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + B \sin x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + B \sin x) = -\infty$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + B \sin x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x \left(1 + B \frac{\sin x}{x} \right) \right] \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \right) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + B \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= (\pm\infty) (1 + 0) = \pm\infty,\end{aligned}\tag{A.58}$$

poichè $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Vediamo ora un esempio di segnale portante modulato da una gaussiana, con il metodo della somma. Definiamo:

$$g(x) = Ae^{-ax^2} + B \sin x,\tag{A.59}$$

onde il segnale modulante è la gaussiana Ae^{-ax^2} con $a > 0$. Si ricava facilmente:

$$Ae^{-ax^2} - B \leq g(x) \leq Ae^{-ax^2} + B,$$

per cui $\Gamma : y = g(x)$ oscilla sinusoidalmente tra $\gamma_- : y = Ae^{-ax^2} - B$ e $\gamma_+ : y = Ae^{-ax^2} + B$, cioè tra due gaussiane centrate nell'origine di larghezza a^{-1} e traslate di $\pm B$ lungo l'asse y . Più precisamente, assumendo $A < B$, la gaussiana γ_- interseca l'asse y nel punto $(0, A - B)$ e ha per asintoto orizzontale la retta $y = -B$. La gaussiana γ_+ , invece, interseca l'asse y nel punto $(0, A + B)$ e ha per asintoto orizzontale la retta $y = B$. Ciò è mostrato in fig. A.17.

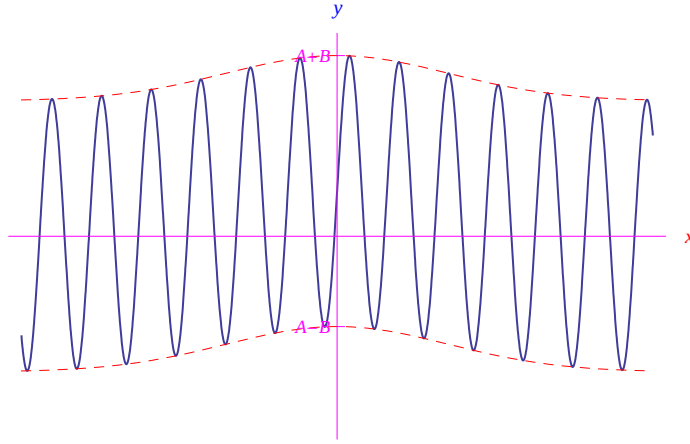


Figura A.17: Il segnale portante $B \sin x$ è modulato in ampiezza da un segnale gaussiano.

Per quanto visto, la funzione $g(x) = \phi(x) + f(x)$ con $\phi(x) = Ae^{-ax^2}$, $f(x) = B \sin x$, non è periodica. Tuttavia, siccome $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$, la $g(x)$ è **asintoticamente periodica**. Applicando la definizione di limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0 \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x > \delta_\varepsilon \implies |\phi(x)| < \varepsilon \implies_{|\phi(x)|=\phi(x)} \phi(x) < \varepsilon \right) \tag{A.60}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0 \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x < -\delta_\varepsilon \implies |\phi(x)| < \varepsilon \implies_{|\phi(x)|=\phi(x)} \phi(x) < \varepsilon \right)$$

Tenendo conto che $x > \delta_\varepsilon$, $x < -\delta_\varepsilon \iff |x| > \delta_\varepsilon$, le (A.60) possono essere riscritte in forma più compatta:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid |x| > \delta_\varepsilon \implies \phi(x) < \varepsilon)$$

Deve essere $Ae^{-ax^2} < \varepsilon$, da cui $|x| > +\sqrt{\frac{1}{a} \ln \left(\frac{A}{\varepsilon} \right)}$, onde $\delta_\varepsilon = +\sqrt{\frac{1}{a} \ln \left(\frac{A}{\varepsilon} \right)}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = +\sqrt{\frac{1}{a} \ln \left(\frac{\varepsilon}{A} \right)} \mid |x| > \delta_\varepsilon \implies \phi(x) < \varepsilon,$$

come illustrato in fig. [A.18](#)

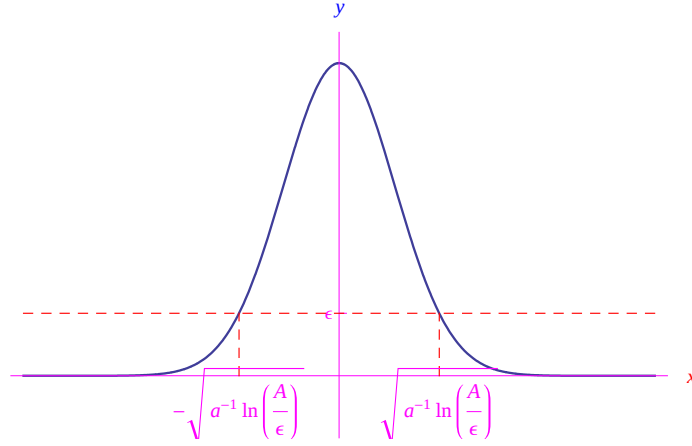


Figura A.18: La definizione di limite per $|x| \rightarrow +\infty$.

Nella ([A.59](#)) il termine Ae^{-ax^2} risulta essere asintoticamente trascurabile, nel senso che fissata una tolleranza $0 < \varepsilon \ll 1$, risulta $g(x) \approx B \sin x$. Ciò si esprime dicendo che il segnale modulato $g(x) = Ae^{-ax^2} + B \sin x$ è *asintoticamente periodico*, i.e. periodico per $|x| > \sqrt{a^{-1} \ln \left(\frac{A}{\varepsilon} \right)}$. Tale comportamento viene rappresentato con la notazione simbolica $T_\infty = 2\pi$. Nel caso generale, $g(x) = Ae^{-ax^2} + f(x)$ con $f(x)$ non necessariamente sinusoidale e periodica di periodo T , risulta $T_\infty = T$.

A.6 Formule trigonometriche

A.6.1 Formule di addizione e sottrazione

1. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

A.6.2 Formule di duplicazione

1. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
2. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$
3. $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

A.6.3 Formule di prostaferesi

1. $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$

A.6.4 Formule parametriche

Esprimono $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, come funzione razionale di $\tan \frac{x}{2} \stackrel{def}{=} t$.

1. $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

2. $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

3. $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

4. $\cot x = \frac{1-t^2}{2t}$

Bibliografia

- [1] Fiorenza R., Greco D. 1978. *Lezioni di Analisi Matematica*. Liguori Editore.
- [2] Orecchia G., Spataro S., *Limiti. Esercizi* Tecnos – Collana Esami
- [3] Ghizzetti A., *Lezioni di Analisi Matematica* – Veschi