Temperatura calorica o temperatura media del fluido

Nello scambio termico fluido-fluido il fluido caldo – che entra caldo nello scambiatore per essere raffreddato – possiede una viscosità, la quale diventa più grande mentre esso si raffredda. Il fluido freddo – il raffreddante – entrante in contro-corrente ha una viscosità che, al contrario, decresce mentre esso si riscalda. Dal calcolo della LMTD ricordiamo che per il fluido caldo c'è un terminale dato da T_1-t_2, mentre per il fluido freddo il suo terminale è T_2-t_1. L'esperienza mostra che i coefficienti di scambio termico esterno e interno al tubo - h_o e h_i – variano lungo la lunghezza del tubo e producono un coefficiente di scambio termico complessivo U maggiore nel terminale caldo rispetto a quello del terminale freddo. Nel 1933 l'ingegnere chimico Colburn propose di calcolare il coefficiente U come una funzione lineare della temperatura. Il problema si è risolto partendeo dalle seguenti assunzioni:

1. La funzione U è lineare con la temperatura: $U=a^*(1+b^*t)$
2. Flusso, in massa, costante
3. Calore specifico costante
4. Nessun cambiamento di fase

Siano M e C, m e c, rispettivamente le masse e il calore specifico del fluido caldo e del fluido freddo.

(1) $Q = M\ C\ (T_1 - T_2) = m\ c\ (t_2 - t_1)$ Ricordiamo quanto già visto in precedenti esercizi che

$Q = \dfrac{\Delta\text{temperatura}}{\sum R = \text{resistenza}}$ proporzionale alla variazione di temperatura, inversamente proporzionale alle resistenze.

In tubi circolari concentrici (si esamini il contro-corrente) il coefficiente complessivo di scambio termico U vale:

(3) $\dfrac{1}{U} = \dfrac{1}{h_i\,(S_i/S)} + \dfrac{1}{2\,(k_m/D_o)} \ln\left(\dfrac{D_o}{D_i}\right) + \dfrac{1}{h_o}$ dove

$S =$ superficie esterna del tubo
$D =$ diametro del tubo
$h =$ coefficiente di scambio termico del fluido
$i =$ interno al tubo
$o =$ esterno al tubo
$k_m =$ conduttività termica del metallo (tubo)

Il bilancio termico per una superficie dS è

(4) $dQ = U\ (T - t)\ dS = m\ c\ dt \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dt}{U\,(T-t)} = \dfrac{dS}{mc} \quad \Rightarrow \quad U = a^*\left(1 + b^* t\right)$ sostituendo si ha

(5) $\dfrac{dt}{U = a^*\left(1+b^*t\right)(T-t)} = \dfrac{dS}{mc} \quad \Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \dfrac{dt}{U = a^*\left(1+b^*t\right)(T-t)} = \int_S \dfrac{dS}{mc} \quad \Rightarrow$ integrando per parti si ha:

(6) $\dfrac{1}{a^*\left(R - 1 - b^* T_2 + b^* R T_1\right)} \left[\ln \dfrac{T_2 - R t_1 + (R-1) t_2}{T_2 - R t_1 + (R-1) t_1} - \ln \dfrac{1 + b^* t_2}{1 + b^* t_1} \right] = \dfrac{S}{mc}$

Posto il pedice 1 per indicare il terminale freddo e il pedice 2 per indicare il terminale caldo si può scrivere:

(7) $\Delta t_1 = T_2 - t_1$ e $\Delta t_2 = T_1 - t_2 \quad \Rightarrow \quad U_1 = a^*\left(1 + b^* t_1\right)$ e $U_2 = a^*\left(1 + b^* t_2\right)$ la (6) diventa

(8) $\dfrac{t_2 - t_1}{U_1 \Delta t_2 - U_2 \Delta t_1} \ln \dfrac{U_1 \Delta t_2}{U_2 \Delta t_1} = \dfrac{S}{mc} \quad \Rightarrow$ ricordando $Q = mc\,(t_2 - t_1)$ si ottiene

(9) $\dfrac{Q}{S} = \dfrac{U_1 \Delta t_2 - U_2 \Delta t_1}{\ln\left(U_1 \Delta t_2 / U_2 \Delta t_1\right)}$

Questa relazione è insoddisfacente perché obbliga a calcolare due volte il coefficiente complessivo di scambio termico: una volta U_1 per cui S=0 e l'altra U_2 per cui $S=S_i$.

Colburn scelse di ottenere un singolo coefficiente U_x per poter scrivere la (9) così:

(10) $$\frac{Q}{S}=\frac{U_1\Delta t_2-U_2\Delta t_1}{\ln\left(U_1\Delta t_2/U_2\Delta t_1\right)}=U_x\frac{\Delta t_2-\Delta t_1}{\ln\left(\Delta t_2/\Delta t_1\right)}$$

Il coefficiente U_x è funzione di una temperatura t_c : $U_x=a^*\left(1+b^*t_c\right)$ Scrivendo per esteso la (10) si ha:

(11) $$U_x=a^*\left(1+b^*t_c\right)=\frac{\frac{U_1\Delta t_2-U_2\Delta t_1}{\ln\left(U_1\Delta t_2/U_2\Delta t_1\right)}}{\frac{\Delta t_2-\Delta t_1}{\ln\left(\Delta t_2/\Delta t_1\right)}}=\frac{\frac{a^*\left(1+b^*t_1\right)\Delta t_2-a^*\left(1+b^*t_2\right)\Delta t_1}{\ln\left[a^*\left(1+b^*t_1\right)\Delta t_2/a^*\left(1+b^*t_2\right)\Delta t_1\right]}}{\frac{\Delta t_2-\Delta t_1}{\ln\left(\Delta t_2/\Delta t_1\right)}}$$

(12) Sia F_C una frazione così definita $F_C=\frac{t_C-t_1}{t_2-t_1}$ dove $t_C=$ ***temperatura calorica della corrente fredda.***

(13) Definiamo i seguenti rapporti $K_C=\frac{t_2-t_1}{1/b^*+t_1}=\frac{U_2-U_1}{U_1}$ e $r=\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{\Delta t_{freddo}}{\Delta t_{caldo}}$

Tenendo conto degli equivalenti della (11) si ottiene:

(14) $$\frac{1+b^*t_2}{1+b^*t_1}=K_C+1 \quad \text{e} \quad \frac{1+b^*t_C}{1+b^*t_1}=K_CF_C+1 \quad \Rightarrow$$

(15) $$F_C=\frac{\left(1/K_C\right)+\left[r/\left(r-1\right)\right]}{1+\frac{\ln\left(K_C+1\right)}{\ln r}}-\frac{1}{K_C} \quad \text{dove} \quad K_C=\frac{U_2-U_1}{U_1}=\frac{U_{caldo}-U_{freddo}}{U_{freddo}}$$

Le temperature caloriche dei fluidi sono:

(16) fluido caldo: $T_C=T_2+F_C\left(T_1-T_2\right)$ fluido freddo: $t_C=t_2+F_C\left(t_1-t_2\right)$

Esempio

Calcolo della temperatura calorica in uno scambiatore di calore con fluidi in contro-corrente. I dati sono:

$$\begin{cases}\text{fluido caldo - lato mantello}\\ T_{media}=250\\ T_1=300\\ T_2=200\\ \Delta T=100\end{cases}\quad\begin{cases}\\ \text{temp. media}\\ \text{temp. maggiore}\\ \text{temp. minore}\\ \text{differenza}\end{cases}\quad\begin{cases}\text{fluido freddo - lato tubi}\\ t_{media}=100\\ t_2=120\\ t_1=80\\ \Delta t=40\end{cases}\quad\begin{cases}\\ \Delta t_2=180\\ \Delta t_1=120\\ \\ \end{cases}$$

Il rapporto K_C dei due fluidi si conosce dal calcolo di U_{caldo} e U_{freddo} secondo la (3).

Nel caso in esame si ha: fluido caldo $K_C=0,68$ fluido freddo $K_C\le 0,10$.

Il valore più grande di K_C $(0,68)$ corrisponde al coefficiente di scambio termico di controllo, assunto per stabilire la variazione di U con la temperatura. Quindi il rapporto r:

$$r=\frac{\Delta t_{freddo}}{\Delta t_{caldo}}=\frac{200-80}{300-120}=0,667 \quad \Rightarrow \quad F_C=\frac{\left(1/K_C\right)+\left[r/\left(r-1\right)\right]}{1+\frac{\ln\left(K_C+1\right)}{\ln r}}-\frac{1}{K_C}=1,886-\frac{1}{0,68}=0,415$$

Le temperature caloriche secondo la (16):

fluido caldo: $T_C=T_2+F_C\left(T_1-T_2\right)$=200+0,415*100=241,5°C

fluido freddo: $t_C=t_2+F_C\left(t_1-t_2\right)=80+0,415*40=97°C$

$LMTD=\frac{180-120}{\ln\left(180/120\right)}=98,65°C$ c.v.d. *questa non è la vera temperatura per un sistema in contro - corrente.*