La lemniscata di Bernoulli

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

La *lemniscata di Bernoulli* ha equazione polare:

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi \tag{1}$$

Ne segue che se denotiamo con γ il luogo geometrico del piano la cui equazione in coordinate polari è data dalla (1) si ha:

$$\gamma = \gamma_- \cup \gamma_+, \tag{2}$$

ove

$$\gamma_\pm : r = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad \forall \varphi \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} X_k, \tag{3}$$

essendo

$$X_k = \left[0, \frac{\pi}{4} + k\pi\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi + k\pi, \pi + k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

Cioè la lemniscata è composta da i due rami γ_- e γ_+, simmetrici rispetto all'asse polare. Inserendo l'espressione

$$r = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi},$$

nelle equazioni che esprimono le coordinate cartesiane in funzione delle coordinate polari, otteniamo la seguente rappresentazione parametrica dei predetti rami:

$$\gamma_\pm : x(\varphi) = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi, \ \ y(\varphi) = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi, \quad \varphi \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} X_k \tag{5}$$

In fig. 1 riportiamo l'andamento della lemniscata di Bernoulli.

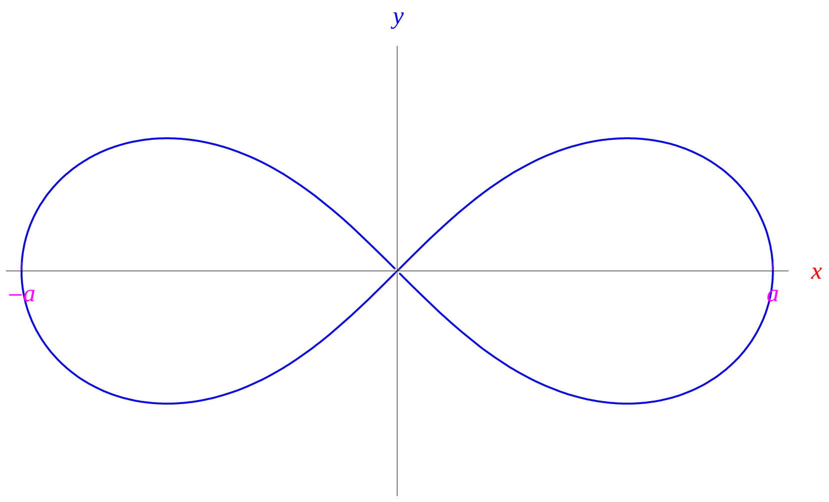

Figura 1: La lemniscata di Bernoulli.