Nullità di un funzionale lineare

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert n-dimensionale con $n \leq +\infty$. Ricordiamo che un *funzionale lineare* o *forma lineare algebrica* è un'applicazione lineare da $\mathcal{H}$ verso $\mathbb{C}$, dove quest'ultimo è considerato spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ medesimo. Quindi:

$$\begin{aligned} &\phi : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \\ &\phi : \xi \to \phi(\xi), \quad \forall \xi \in \mathcal{H} \end{aligned} \tag{1}$$

Segue $\phi \in \hom(\mathcal{H}, \mathbb{C})$, essendo $\hom(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ lo spazio vettoriale degli omomorfismi da $\mathcal{H}$ verso $\mathbb{C}$. Come è noto, $\hom(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ si dice *spazio duale* di $\mathcal{H}$:

$$^*\mathcal{H} = \hom(\mathcal{H}, \mathbb{C}), \tag{2}$$

Riesce:

$$\dim(^*\mathcal{H}) = (\dim \mathcal{H}) \cdot (\dim \mathbb{C}) \underset{\dim \mathbb{C}=1}{=} \dim \mathcal{H}, \tag{3}$$

cioè $\mathcal{H}$ e $^*\mathcal{H}$ sono isodimensionali. Per un noto teorema, segue che essi sono isomorfi. In fig. 1 è visibile l'azione di un elemento $\phi \in (^*\mathcal{H})$ su un qualunque vettore ξ di $\mathcal{H}$.

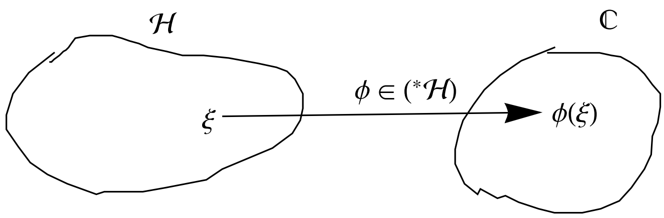

Figura 1: Un elemento ϕ dello spazio duale $^*\mathcal{H}$, associa al vettore ξ lo scalare $\phi(\xi)$.

La *nullità* di $\phi \in (^*\mathcal{H})$ è

$$N(\phi) = \dim \ker \phi, \tag{4}$$

essendo

$$\ker\phi = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \phi(\xi) = 0\}, \tag{5}$$

il kernel dell'applicazione lineare ϕ.

Proposizione 1 $N(\phi) = n - 1, \quad \forall\phi \in ({}^*\mathcal{H})$

Dimostrazione. Se $\{e_k\}$ è una base di $\mathcal{H}$:

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k, \tag{6}$$

dove $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n \in \mathbb{C}$ sono le componenti di $\xi \in \mathcal{H}$ nella predetta base. In virtù della linearità di $\phi \in ({}^*\mathcal{H})$:

$$\phi(\xi) = \phi\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \phi(e_k),$$

che può essere scritta come

$$\phi(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + ... + a_n\xi_n, \tag{7}$$

essendo

$$a_k \stackrel{def}{=} \phi(e_k) \tag{8}$$

Cioè i coefficienti (complessi) a_k sono i valori assunti da ϕ sui vettori di base. La (7) è manifestamente lineare nelle variabili $\xi_1, ..., \xi_n$ (come appunto doveva essere), giacché per un assegnato funzionale ϕ i coefficienti a_k non dipendono dalle ξ_k ma solo dai vettori di base.

Segue

$$\xi \in \ker\phi \iff \phi(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = 0, \tag{9}$$

cosicché $\ker\phi$ è lo spazio soluzione dell'equazione lineare omogenea su $\mathbb{C}$:

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + ... + a_n\xi_n = 0, \tag{10}$$

che ammette ∞^{n-1} soluzioni non banali, per cui $\dim\ker\phi = n - 1$. ■