Ipotesi di De Broglie

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Come è noto, la radiazione elettromagnetica esibisce una doppia natura: ondulatoria e corpuscolare. La prima tiene conto dei fenomeni di interferenza e diffrazione. La seconda, invece, interviene nei processi di assorbimento (effetto fotoelettrico) e di diffusione (effetto Compton). In base a questi dati empirici, a un'onda elettromagnetica piana e monocromatica di frequenza ν e lunghezza d'onda λ, si deve attribuire un'energia E e una quantità di moto p dati dalle seguenti relazioni

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}, \tag{1}$$

che possono essere riscritte in termini della costante ridotta di Planck $\hbar = \frac{h}{2\pi}$:

$$E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k, \tag{2}$$

essendo $\omega = 2\pi\nu$ e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ rispettivamente la frequenza angolare e il numero d'onde. Ne consegue che in tutti i processi in cui si presenta l'aspetto corpuscolare, la radiazione si comporta come una particella di energia $E = \hbar\omega$ e quantità di moto $p = \hbar k$. Per l'ipotesi di De Broglie, tale corrispondenza è invertibile: il moto di una particella di quantità di moto $\mathbf{p}$ ed energia E, equivale alla propagazione di un'onda piana monocromatica. Ricordiamo che nel caso unidimensionale l'equazione di D'Alembert

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0,$$

ammette soluzioni del tipo onda piana $\psi(x \pm ct)$. Nel caso particolare di un'onda piana monocromatica, in forma complessa si ha:

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}, \tag{3}$$

che si generalizza al caso tridimensionale:

$$\psi(\mathbf{x},t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \tag{4}$$

dove $\mathbf{k}$ è il vettore che definisce la direzione di propagazione (*vettore d'onda*), il cui modulo è il numero d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Per l'ipotesi di De Broglie:

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar} \tag{5}$$

Quindi

$$\psi(\mathbf{x},t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)}, \tag{6}$$

che si propaga alla velocità di fase:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} \tag{7}$$

Se p non è esattamente definito, la corrispondente propagazione ondulatoria coincide con il moto di un *pacchetto d'onde*, ovvero una sovrapposizione lineare di onde piane monocromatiche, rappresentata – in virtù della linearità dell'equazione di D'Alembert – dalla seguente espressione:

$$\psi(\mathbf{x},t) = A\int_D e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-E(\mathbf{p})t)}d^3p, \tag{8}$$

dove D è un dominio limitato dello spazio degli impulsi, in cui il momento lineare $\mathbf{p}$ della particella è non nullo. Dalla teoria della propagazione ondosa, sappiamo che la velocità del pacchetto d'onde è la velocità di gruppo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dp}\frac{dp}{dk} = \frac{dE}{dp} \tag{9}$$

Ad esempio, per una particella non relativistica:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \Longrightarrow \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v, \tag{10}$$

per cui

$$v_g = v \tag{11}$$

Per quanto precede, la funzione (6) è soluzione dell'equazione d'onda di D'Alembert. Verifichiamo che tale funzione risolve anche l'equazione di Schrödinger. Senza perdita di generalità, consideriamo il caso unidimensionale:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\,\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{12}$$

Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \psi}{\partial x} = -kAe^{i(kx-\omega t)} \Longrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2\psi(x,t) \\
&\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega\psi(x,t)
\end{aligned}$$

che sostituite nell'equazione di Schrödinger:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x) = \hbar\omega$$

Per l'ipotesi di De Broglie:

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = E,$$

cioè l'energia meccanica di una particella che compie un moto non relativistico in un campo di forze posizionali di energia potenziale $V(x)$.