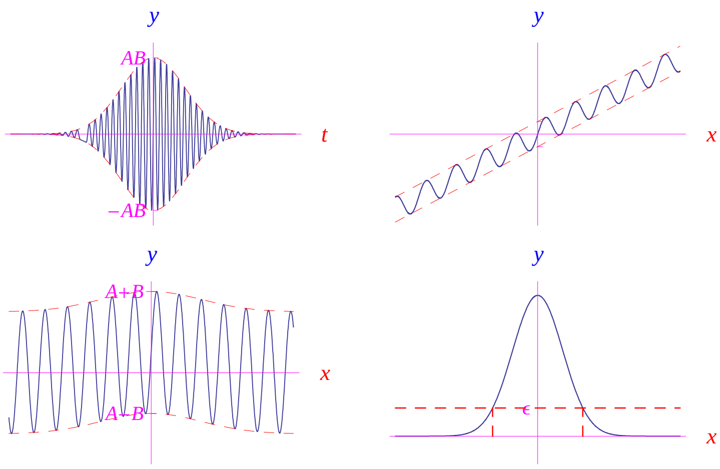
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty}a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)$$

Inviluppo di modulazione

Marcello Colozzo



Indice

1 Funzioni periodiche

Definizione 1

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ è } \textbf{periodica} \overset{def}{\iff} \exists T > 0 \mid \forall x \in X, \ \ f(x) = f(x + kT), \ \ \forall k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Il numero reale $T > 0$ è il **periodica** *della funzione.*

La definizione (1) implica che l'insieme di definizione $X \subseteq \mathbb{R}$ è illimitato sia superiormente, sia inferiormente[1], giacchè $\forall x \in X, \ \ (x + kT) \in X, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

In alcuni applicazioni (la serie di Fourier) il numero reale T che verifica la proprietà (1) si chiama **periodo fondamentale** della funzione. Tale denominazione deriva dal fatto che $\forall n \in \mathbb{N} \diagdown \{0, 1\}, \ nT$ è ancora un **periodo** della funzione.

Tuttavia nel seguito, quando parliamo di periodo, ci riferiamo al periodo fondamentale.

Risulta

$$f(X) = f(A),$$

dove $A = X \cap [0, T)$. Cioè l'immagine di X tramite f coincide con l'immagine di A tramite f. Quest'ultima è il codominio della restrizione di f all'insieme A, ovvero della funzione $f_A : A \to \mathbb{R}$.

Il diagramma cartesiano di una funzione f definita in X illimitato e periodica di periodo T, è l'unione di un numero infinito di archi ciascuno dei quali è il grafico della restrizione f_A traslato lungo l'asse x con traslazione di ampiezza $|k| T$, dove $k \in \mathbb{Z}$. Per $k > 0$ la traslazione è nel verso delle x crescenti, mentre per $k < 0$ è nel verso delle x decrescenti. Cioè:

$$\Gamma = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma_k,$$

essendo $\Gamma_k : y = f_A(x)$ traslato lungo l'asse x di $|k| T$. Precisamente:

$$\Gamma_k : y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [kT, (k+1) T), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Abbiamo, dunque, una successione di archi di cuva $\{\Gamma_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Esplicitando i singoli termini:

$$\begin{aligned}
&\ldots \\
\Gamma_{-|n|} &: y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [-|n| T, (-|n| + 1) T) \\
&\ldots \\
\Gamma_{-2} &: y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [-2T, -T) \\
\Gamma_{-1} &: y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [-T, 0) \\
\Gamma_{0} &: y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [0, T) \\
\Gamma_{1} &: y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [T, 2T) \\
\Gamma_{2} &: y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [2T, 3T) \\
&\ldots \\
\Gamma_{n} &: y = f(x), \quad \forall x \in X \cap [nT, (n+1) T) \\
&\ldots
\end{aligned}$$

[1] Tipicamente, nelle applicazioni X è illimitato solo superiormente. Si pensi ad una grandezza periodica che sia funzione del tempo t, per cui abbiamo una funzione periodica $f(t)$. In questo caso l'insieme di definizione è $[0, +\infty)$.

Ad esempio, Γ_2 è la curva $y : f_A(x)$ traslata nella direzione dell'asse x con una traslazione di ampiezza 2 nel verso delle x crescenti, mentre Γ_{-2} è la curva $y : f_A(x)$ traslata nella direzione dell'asse x con una traslazione di ampiezza 2 nel verso delle x decrescenti, come illustrato in fig. 1.

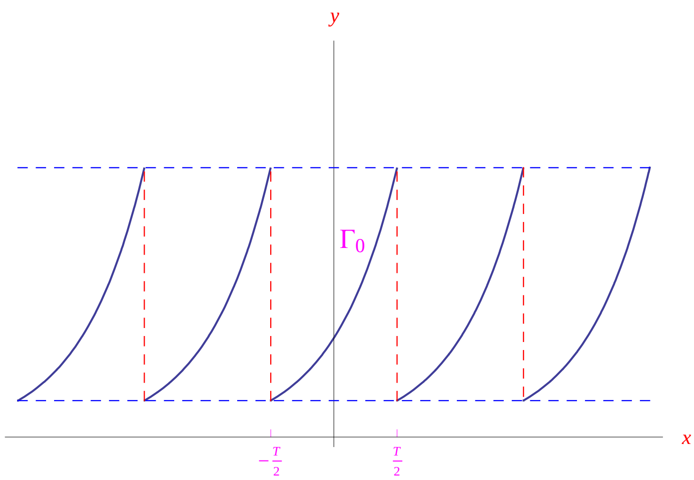


Figura 1: Il grafico di una funzione periodica si compone di infiniti archi, ciascuno dei quali ottenuto da Γ_0 per traslazione nella direzione dell'asse x.

Esempi immediati di funzioni periodiche sono le funzioni circolari $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, etc, e una qualunque combinazione lineare o prodotto di esse, come ad esempio: $\sin x + \cos x, \sin x \cos x$, $\tan x - \cos x$. In questi casi il periodo va determinato dalla (1). Ad esempio, per la funzione $\sin x$:

$$\sin(x + kT) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Sviluppando il primo membro con le note formule di addizione degli archi:

$$\sin x \cos kT + \sin kT \cos x = \sin x$$

Tale uguaglianza deve essere verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall k \in \mathbb{Z}$, per cui:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \ \begin{cases} \cos kT = 1 \\ \sin kT = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow kT = 2k\pi$$

Ciòè il periodo della funzione $\sin x$ è 2π. Si noti che a tale conclusione si giunge per via grafica, osservando che nell'intervallo $[0, 2\pi]$ il grafico di $\sin x$ compie un'oscillazione completa.. Procedendo in maniera simile si determina il periodo delle rimanenti funzioni circolari. Se invece prendiamo la funzione $\sin 2x$, vediamo che è periodica di periodo π, , giacchè il grafico di $\sin 2x$ compie un'oscillazione completa in $[0, \pi]$. Anche la funzione $|\sin x|$ ha periodo dimezzato a causa della presenza del valore assoluto , come possiamo vedere dalla fig. 2.

Nelle applicazioni, x può essere la grandezza ωt, dove ω è una frequenza angolare (o pulsazione) e t il tempo, mentre la funzione $\sin x$ è la tensione (differenza di potenziale) V_{in} all'ingresso di un circuito raddrizzatore. Precisamente, all'ingresso si ha la grandezza alternata:

$$V_{in}(t) = V_0 \sin \omega t,$$

periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, mentre la differenza di potenziale ai capi dell'uscita del circuito è:

$$V_{out}(t) = V_0 |\sin \omega t|,$$

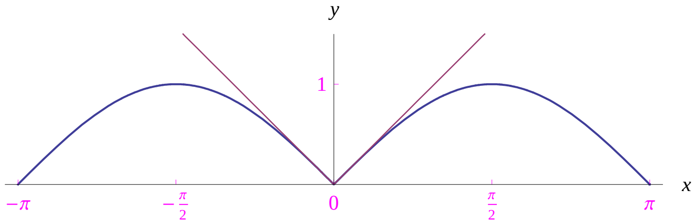


Figura 2: Andamento del grafico di $|\sin x|$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ confrontato con quello di $\sin x$.

ancora periodica (di periodo $T' = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$) ma non alternata, nel senso che le *semionde negative* sono ora *positive*. Tali considerazioni sono illustrate nelle figg. 3-4.

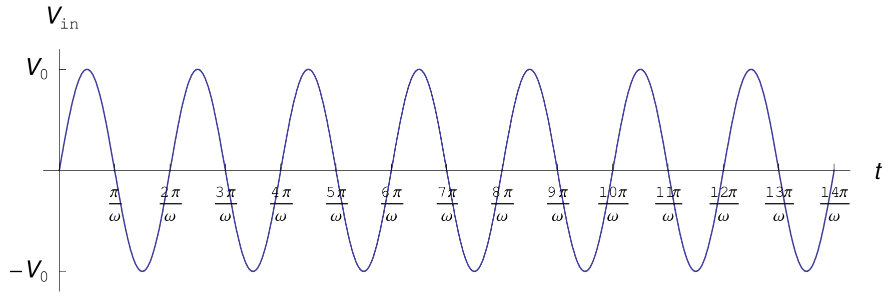


Figura 3: Andamento della differenza di potenziale all'ingresso di un circuito raddrizzatore. La tensione varia sinusoidalmente nel tempo: $V_{in}(t) = V_0 \sin \omega t$.

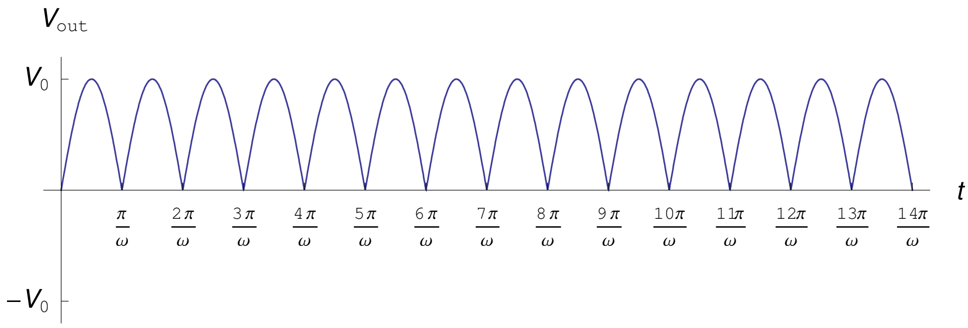


Figura 4: Andamento della differenza di potenziale all'uscita di un circuito raddrizzatore, risultando $V_0(t) = V_0 |\sin \omega t|$.

Se $f(x)$ è periodica (di periodo T) e $g(x)$ è una funzione lineare, i.e. $g(ax+b)$ con $a \neq 0$, la funzione composta $f[g(x)] = f(ax+b)$ è a sua volta periodica di periodo $T' = \frac{T}{a}$. Ad esempio, la funzione $\sin(ax+b)$ è periodica di periodo $\frac{2\pi}{a}$, mentre $\sin(ax^2+b)$ non è una funzione periodica, come nemmeno $\sin\sqrt{x}$. Viceversa, se la componente interna g è periodica, la funzione composta $f[g(x)]$ è una funzione periodica, per ogni f. Ad esempio, $\sin\sqrt{x}$ non è periodica, mentre $\sqrt{\sin x}$ lo è.

2 Inviluppo di modulazione

Assegnata la funzione periodica $f(x)$ e una funzione non periodica $\phi(x)$, il prodotto $\phi(x) f(x)$ è manifestamente non periodico e la funzione $\phi(x)$ si dice *inviluppo di modulazione*. Tale denominazione deriva dalla nozione di *modulazione di ampiezza*, quale sistema di comunicazione utilizzato in radiotecnica. Più precisamente, consideriamo la trasmissione di un segnale a bassa frequenza (non periodico) $\phi(t)$ utilizzando le onde elettromagnetiche come mezzo di trasmissione. Per la sua trasmissione si utilizza un *segnale portante* $u(t)$ che è periodico di periodo T. Qui $u(t)$ rappresenta la generica componente[2] del campo elettrico $\mathbf{E}$ o del campo magnetico $\mathbf{B}$. Lo scopo del segnale portante è quello di *trasportare* (da qui il nome "portante") il segnale a bassa frequenza. Il trasporto può avvenire attraverso la modulazione di ampiezza, nel senso che l'ampiezza del segnale portante non è costante, ma dipende dal tempo secondo la legge $\phi(t)$. In altre parole, il segnale modulato è $\phi(t)\,u(t)$. In fig. 5 riportiamo un esempio di modulazione di ampiezza, in cui il segnale modulante è una gaussiana di larghezza ω^{-2}, dove ω è la frequenza angolare del segnale portante. Abbiamo, dunque, un *inviluppo gaussiano*.

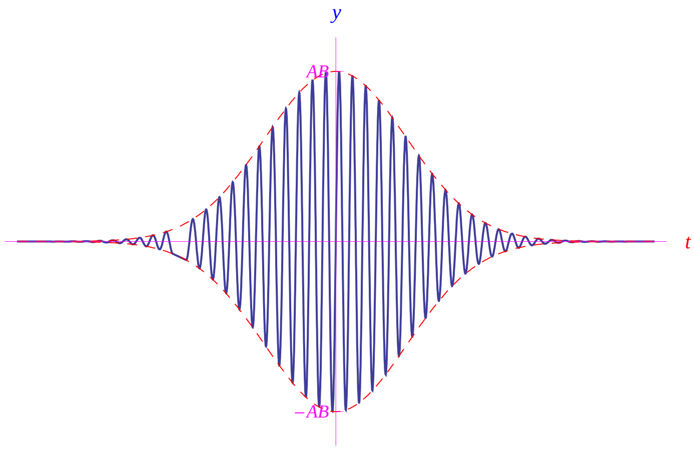


Figura 5: Il segnale a radiofrequenza $u(t) = A\sin\omega t$ è modulato in ampiezza da un segnale a bassa frequenza "di prova", dato dalla gaussiana $\phi(t) = Be^{-\omega^2 t^2}$ di larghezza ω^{-2}.

A questo punto è necessario fare un'osservazione. Abbiamo visto che se $\phi(x)$ è una funzione non periodica e $f(x)$ è una funzione periodica, il prodotto $\phi(x)\,f(x)$ non è una funzione periodica. Infatti:

$$\nexists T > 0 \mid \forall x, \;\; \phi(x)\;f(x) = \phi(x+kT)\,f(x+kT)\,, \;\; \forall k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

Fa eccezione il caso in cui $\phi(x)$ è una funzione costante. Ad esempio, $\phi(x) = A \neq 0, \;\forall x$. Infatti, in tal caso abbiamo:

$$Af(x) = Af(x+kT)\,, \quad \forall x, \; \forall k \in \mathbb{Z},$$

giacchè $f(x)$ è per ipotesi periodica di periodo T. Peraltro, questo è un caso banale poichè se $f(x)$ ha periodo T, il prodotto di una costante A per $f(x)$ è una funzione periodica di periodo T. Chiameremo, pertanto, *inviluppo banale di* $f(x)$, ogni funzione costante $\phi(x) = A \neq 0$ che moltiplica $f(x)$.

Abbiamo visto che la modulazione di ampiezza è ottenuta moltiplicando il segnale portante $f(x)$ (qui la variabile x è il tempo) di periodo T, per il segnale modulante (non periodico) $\phi(x)$. Il risultato di tale composizione è la funzione (segnale modulato) non periodica:

$$g(x) = \phi(x)\,f(x) \tag{3}$$

[2] Dovremmo tener conto della dipendenza dalle coordinate spaziali (x, y, z), ma a noi interessa solo la dipendenza dal tempo t.

Osserviamo che l'ampiezza della funzione $f(x)$ può essere modulata sostituendo nella (3) all'operazione di moltipicazione di funzioni, l'operazione di addizione di funzioni, ottenendo:

$$g(x) = \phi(x) + f(x)$$

Infatti, nella sezione **??** abbiamo visto l'esempio della funzione $x + 2\pi \sin x$, che ora riproponiamo nella forma:

$$g(x) = x + B \sin x, \quad B > 0,$$

in cui il segnale portante è $B \sin x$, mentre il modulante è la funzione identica. Il grafico di $g(x)$ oscilla sinusoidalmente tra le rette $r_{\pm} : y = x \pm B$, come mostrato in fig. 6, poichè $x - B \leq g(x) \leq x + B$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

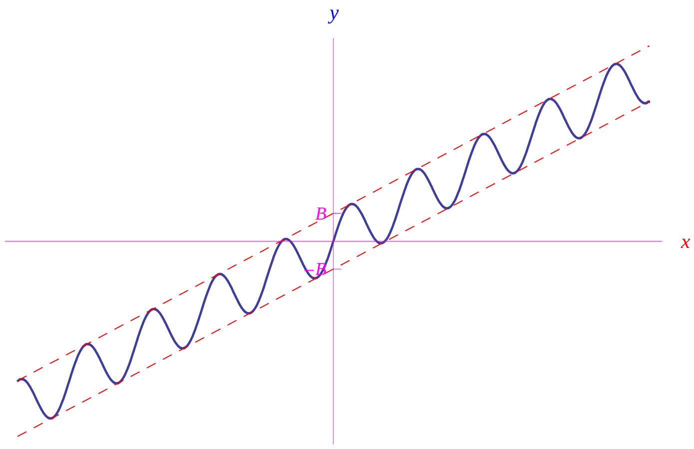


Figura 6: Il segnale portante $B \sin x$ è modulato in ampiezza dal segnale $\phi(x) = x$.

Abbiamo:

$$x - B \leq g(x) \leq x + B,$$

onde per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x \to +\infty} (x + B \sin x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} (x + B \sin x) = -\infty$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} (x + B \sin x) &= \lim_{x \to \pm\infty} \left[x \left(1 + B \frac{\sin x}{x} \right) \right] \\ &= \left(\lim_{x \to \pm\infty} x \right) \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + B \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= (\pm\infty)(1 + 0) = \pm\infty, \end{aligned} \tag{4}$$

poichè $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Vediamo ora un esempio di segnale portante modulato da una gaussiana, con il metodo della somma. Definiamo:

$$g(x) = A e^{-ax^2} + B \sin x, \tag{5}$$

onde il segnale modulante è la gaussiana $A e^{-ax^2}$ con $a > 0$. Si ricava facilmente:

$$A e^{-ax^2} - B \leq g(x) \leq A e^{-ax^2} + B,$$

per cui $\Gamma : y = g(x)$ oscilla sinusoidalmente tra $\gamma_- : y = Ae^{-ax^2} - B$ e $\gamma_+ : y = Ae^{-ax^2} + B$, cioè tra due gaussiane centrate nell'origine di larghezza a^{-1} e traslate di $\pm B$ lungo l'asse y. Più precisamente, assumendo $A < B$, la gaussiana γ_- interseca l'asse y nel punto $(0, A - B)$ e ha per asintoto orizzontale la retta $y = -B$. La gaussiana γ_+, invece, interseca l'asse y nel nel punto $(0, A + B)$ e ha per asintoto orizzontale la retta $y = B$. Ciò è mostrato in fig. 7.

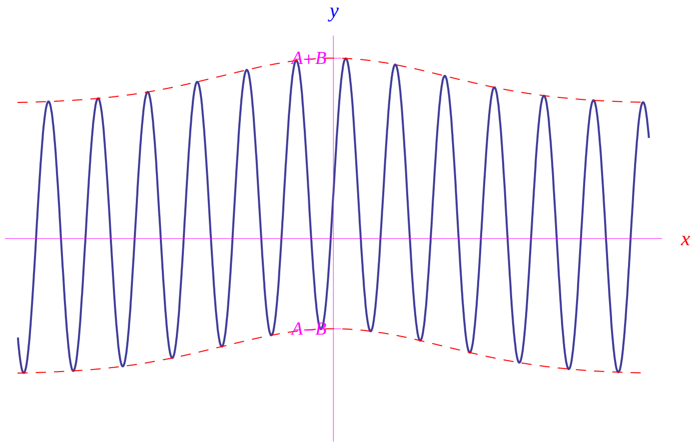


Figura 7: Il segnale portante $B \sin x$ è modulato in ampiezza da un segnale gaussiano.

3 Funzioni asintoticamente periodiche

Per quanto visto, la funzione $g(x) = \phi(x) + f(x)$ con $\phi(x) = Ae^{-ax^2}$, $f(x) = B \sin x$, non è periodica. Tuttavia, siccome $\lim_{|x| \to +\infty} \phi(x) = 0$, la $g(x)$ è **asintoticamente periodica**. Applicando la definizione di limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = 0 \Longleftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow |\phi(x)| < \varepsilon \underset{|\phi(x)| = \phi(x)}{\Longrightarrow} \phi(x) < \varepsilon \right. \tag{6}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \phi(x) = 0 \Longleftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x < -\delta_\varepsilon \Longrightarrow |\phi(x)| < \varepsilon \underset{|\phi(x)| = \phi(x)}{\Longrightarrow} \phi(x) < \varepsilon \right.$$

Tenendo conto che $x > \delta_\varepsilon$, $x < -\delta_\varepsilon \Longleftrightarrow |x| > \delta_\varepsilon$, le (6) possono essere riscritte in forma più compatta:

$$\lim_{|x| \to +\infty} \phi(x) = 0 \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid |x| > \delta_\varepsilon \Longrightarrow \phi(x) < \varepsilon$$

Deve essere $Ae^{-ax^2} < \varepsilon$, da cui $|x| > +\sqrt{\frac{1}{a} \ln\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)}$, onde $\delta_\varepsilon = +\sqrt{\frac{1}{a} \ln\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon = +\sqrt{\frac{1}{a} \ln\left(\frac{\varepsilon}{A}\right)} \mid |x| > \delta_\varepsilon \Longrightarrow \phi(x) < \varepsilon,$$

come illustrato in fig. 8

Nella (5) il termine Ae^{-ax^2} risulta essere asintoticamente trascurabile, nel senso che fissata una tolleranza $0 < \varepsilon \ll 1$, risulta $g(x) \approx B \sin x$. Ciò si esprime dicendo che il segnale modulato $g(x) = Ae^{-ax^2} + B \sin x$ è *asintoticamente periodico*, i.e. periodico per $|x| > \sqrt{a^{-1} \ln\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)}$. Tale comportamento viene rappresentato con la notazione simbolica $T_\infty = 2\pi$. Nel caso generale, $g(x) = Ae^{-ax^2} + f(x)$ con $f(x)$ non necessariamente sinusoidale e periodica di periodo T, risulta $T_\infty = T$.

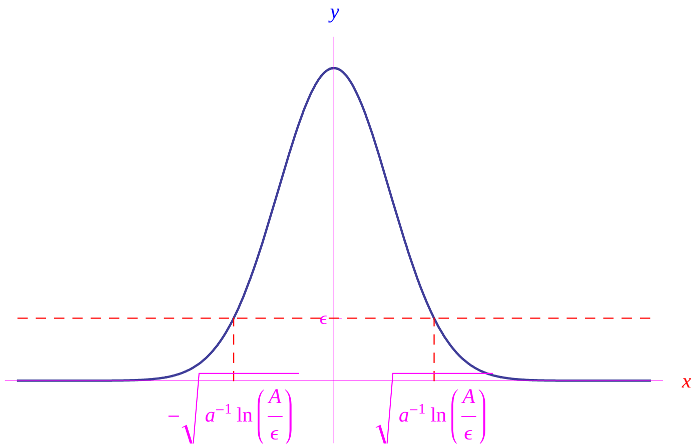


Figura 8: La definizione di limite per $|x| \to +\infty$.