Inviluppo di una famiglia di curve piane

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

1 Introduzione

Consideriamo una famiglia (ad un parametro) di curve piane:

$$\Phi = \{\gamma_t : f(x, y, t) = 0, \ \ t \in [a, b]\}, \tag{1}$$

dove f è una assegnata funzione reale sufficientemente regolare. Per definizione di famiglia, un assegnato $t \in [a, b]$ individua univocamente una curva di Φ.

Definizione 1 *Dicesi* **inviluppo** *per la famiglia Φ, una curva regolare Γ tale che per ogni suo punto P passi una ed una sola curva $\gamma_t \in \Phi$, la quale risulti in P tangente a Γ.*

Osservazione 2 *La locuzione: γ_t è tangente a Γ nel punto $P \in \Gamma \cap \gamma_t$, equivale a quest'altra: γ_t e Γ hanno in P la medesima retta tangente.*

Supponiamo che l'inviluppo Γ sia dotato di una rappresentazione parametrica regolare

$$\Gamma : x = x(t), \ y = y(t), \ \ t \in [a, b] \tag{2}$$

Per definizione di inviluppo, deve essere:

$$P(t') \in \Gamma \Longrightarrow \exists! \gamma_t \in \Phi \mid \begin{cases} P(t') \in \Gamma \cap \gamma_t \\ \gamma_t \text{ è ivi tangente a } \Gamma \end{cases} \tag{3}$$

In generale è $t' \neq t$ in quanto il primo parametro definisce una rappresentazione parametrica di Γ, mentre il secondo parametro seleziona una curva della famiglia Φ. Possiamo comunque eseguire una sostituzione di parametro ammissibile (ovvero una riparametrizzazione di Γ) tale che $t' = t$:

$$P(t) \in \Gamma \Longrightarrow \exists! \gamma_t \in \Phi \mid \begin{cases} P(t) \in \Gamma \cap \gamma_t \\ \gamma_t \text{ è ivi tangente a } \Gamma \end{cases} \tag{4}$$

Segue

$$\begin{cases} P(t) \in \Gamma \Longrightarrow P[x(t), y(t)] \\ P(t) \in \Gamma \Longrightarrow f[x(t), y(t), t] = 0 \end{cases}, \quad \forall t \in [a, b] \tag{5}$$

L'equazione della retta tangente a Γ in $P[x(t), y(t)]$ è

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)} \tag{6}$$

L'equazione della retta tangente a γ_t in $P[x(t), y(t)]$ è

$$f_x[x(t), y(t), t][x - x(t)] + f_y[x(t), y(t), t][y - y(t)] = 0 \tag{7}$$

Tenendo conto della (6):

$$f_x[x(t), y(t), t]\, x'(t) + f_y[x(t), y(t), t]\, y'(t) = 0 \tag{8}$$

D'altra parte, derivando primo e secondo membro della

$$f\left[x\left(t\right),y\left(t\right),t\right]=0$$

si ha

$$f_x\left[x\left(t\right),y\left(t\right),t\right]x'\left(t\right)+f_y\left[x\left(t\right),y\left(t\right),t\right]y'\left(t\right)+f_t\left[x\left(t\right),y\left(t\right),t\right]=0 \tag{9}$$

Dalla (8) segue

$$f_t\left[x\left(t\right),y\left(t\right),t\right]=0 \tag{10}$$

Ne concludiamo che la curva inviluppo se esiste, ha una rappresentazione parametrica che è soluzione del sistema:

$$\begin{cases} f\left[x\left(t\right),y\left(t\right),t\right]=0 \\ f_t\left[x\left(t\right),y\left(t\right),t\right]=0 \end{cases} \tag{11}$$

Alternativamente, si osserva che un punto $(x,y)\in\Gamma\cap\gamma_t$ corrispondente a quell'assegnato valore di t che, in funzione di x,y, è univocamente determinato dalla

$$f_t\left(x,y,t\right)=0 \tag{12}$$

Da questa si ricava $t=t\left(x,y\right)$. Ne consegue che $(x,y)\in\Gamma$ verifica l'equazione della $\gamma_{t(x,y)}$

$$f\left[x,y,t\left(x,y\right)\right]=0 \tag{13}$$

Quest'ultima è l'equazione ordinaria (i.e. cartesiana) dell'inviluppo. La regola pratica consiste, quindi, nell'eliminare il parametro t tra le equazioni

$$\begin{cases} f\left(x,y,t\right)=0 \\ f_t\left(x,y,t\right)=0 \end{cases} \tag{14}$$

Esempio 3 *Determiniamo l'inviluppo della famiglia di rette:*

$$x+ty+t^2=0, \quad t\in(-\infty,+\infty)$$

Qui è

$$f\left(x,y,t\right)=x+ty+t^2,$$

onde

$$f_t\left(x,y,t\right)=y+2t$$

Segue

$$\begin{cases} x+ty+t^2=0 \\ y+2t=0 \end{cases}$$

Eliminando t

$$y^2=4x,$$

cioè una parabola, come illustrato in fig. 1.

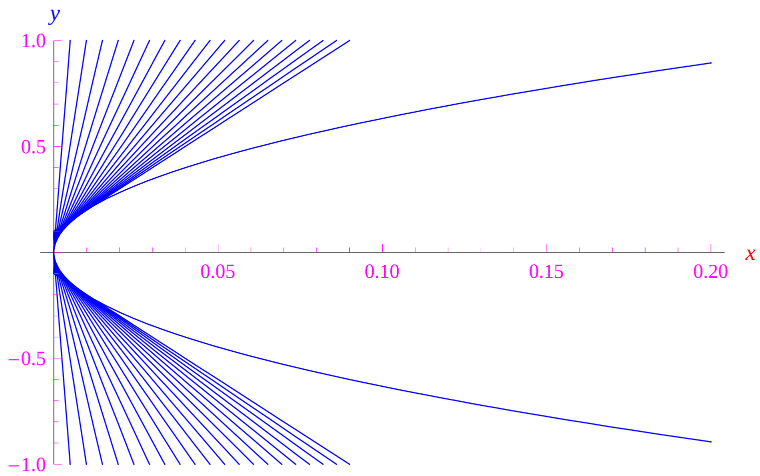

Figura 1: Inviluppo della famiglia di rette $x + ty + t^2 = 0$.

2 Teorema del Dini

In questa sezione studiamo la compatibilità del sistema che conduce alle equazioni parametriche della curva inviluppo della famiglia di curve piane:

$$\Phi : f(x, y, t) = 0 \tag{15}$$

Infatti, per quanto visto, occorre studiare la compatibilità del sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, t) = 0 \\ f_t(x, y, t) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Più precisamente, le (16) compongono un sistema le cui incognite sono le funzioni $x(t), y(t)$. Nel linguaggio delle funzioni implicite, le predette equazioni definiscono implicitamente x e y in funzione di t. Ne consegue che per garantire l'esistenza di soluzioni, dobbiamo invocare il ben noto Teorema del Dini. A tale scopo, supponiamo che la funzione f sia definita in un campo A dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Ipotizziamo, poi, l'esistenza di almeno una soluzione del sistema (16):

$$\exists P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \in A \mid \begin{cases} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0 \\ f_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Definizione 4 *Chiamiamo P* **punto soluzione** *del sistema (16).*

Prendiamo un intorno del predetto punto soluzione:

$$I_{\delta_x \delta_y \delta_t}(P) = [\bar{x} - \delta_x, \bar{x} + \delta_x] \times [\bar{y} - \delta_y, \bar{y} + \delta_y] \times [\bar{t} - \delta_t, \bar{t} + \delta_t], \quad I(P) \subset A \tag{18}$$

che può essere riscritto come:

$$I_{\delta_x \delta_y \delta_t}(P) = I_{\delta_x \delta_y} \times I_{\delta_t}, \tag{19}$$

dove

$$I_{\delta_x \delta_y} \stackrel{def}{=} [\bar{x} - \delta_x, \bar{x} + \delta_x] \times [\bar{y} - \delta_y, \bar{y} + \delta_y], \quad I_{\delta_t} \stackrel{def}{=} [\bar{t} - \delta_t, \bar{t} + \delta_t] \tag{20}$$

Definizione 5 *il sistema*

$$\begin{cases} f(x,y,t) = 0 \\ f_t(x,y,t) = 0 \end{cases} \tag{21}$$

è **univocamente e localmente risolubile** *se*

$$\exists I_{\delta_x\delta_y\delta_t}(P) = I_{\delta_x\delta_y} \times I_{\delta_t} \mid t \in I_{\delta_t} \Longrightarrow \exists! (x,y) \in I_{\delta_x\delta_y} \mid \begin{cases} f(x,y,t) = 0 \\ f_t(x,y,t) = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Ciò premesso, sussiste il seguente teorema:

Teorema 6 *(***Teorema del Dini***)*
Ipotesi:

1. $f, f_t \in C^1(A)$

   Per un assegnato punto soluzione $P(\bar{x},\bar{y},\bar{t}) \in A$, il seguente determinante jacobiano è diverso da zero:

$$J(\bar{x},\bar{y},\bar{t}) = \begin{vmatrix} f_x(\bar{x},\bar{y},\bar{t}) & f_y(\bar{x},\bar{y},\bar{t}) \\ f_{xt}(\bar{x},\bar{y},\bar{t}) & f_{yt}(\bar{x},\bar{y},\bar{t}) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{23}$$

Tesi:
Il sistema

$$\begin{cases} f(x,y,t) = 0 \\ f_t(x,y,t) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

è univocamente risolubile in un intorno

$$I_{\delta_x\delta_y\delta_t}(P) = I_{\delta_x\delta_y} \times I_{\delta_t}$$

tale che

$$J(x,y,t) = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ f_{xt} & f_{yt} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall (x,y,t) \in I_{\delta_x\delta_y\delta_t}(P) \tag{25}$$

La soluzione del sistema (24)

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \forall t \in I_{\delta_t},$$

è tale che le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono di classe C^1 in I_{δ_t}.

Per la dimostrazione rimandiamo a [1].

Osservazione 7 *Per ipotesi deve essere $f_t \in C^1(A)$, per cui le derivate parziali f_{xt}, f_{yt}, f_{tt} risultano continue in A.*

Se $x(t), y(t)$ è una soluzione locale del sistema, dovrà aversi:

$$f_t[x(t), y(t), t] = 0$$

Derivando rispetto a t:

$$f_{xt}[x(t), y(t), t]\, x'(t) + f_{yt}[x(t), y(t), t]\, y'(t) + f_{tt}[x(t), y(t), t] = 0$$

Se imponiamo

$$f_{tt}[x(t), y(t), t] \neq 0, \tag{26}$$

dalla precedente segue

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0, \quad \forall t \in I_{\delta_t}$$

Cioè le derivate $x'(t)$, $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente in I_{δ_t}. La (26) permette di definire univocamente la variabile t colme funzione di x, y, i.e. $t(x, y)$. Infatti, derivando rispetto a x primo e secondo membro di

$$f_t[x(t), y(t), t(x, y)] = 0,$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} f_t[x(t), y(t), t(x, y)] = 0$$

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$f_{xt}[x(t), y(t), t(x, y)] + f_{tt}[x(t), y(t), t(x, y)] \frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

da cui

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{f_{xt}[x(t), y(t), t(x, y)]}{f_{tt}[x(t), y(t), t(x, y)]},$$

giacchè è $f_{tt}[x(t), y(t), t] \neq 0$. Alla stessa maniera:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{f_{yt}[x(t), y(t), t(x, y)]}{f_{tt}[x(t), y(t), t(x, y)]},$$

che definiscono la funzione $t(x, y)$, la cui monodromia implica che ogni (x, y) proviene da uno ed un sol valore della variabile t. Riassumendo:

1. $x(t), y(t) \in C^1(I_{\delta_t})$
2. $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0, \quad \forall t \in I_{\delta_t}$
3. Esiste una corrispondenza biunivoca tra I_{δ_t} e il luogo dei punti:

$$x = x(t), \; y = y(t), \quad t \in I_{\delta_t} \tag{27}$$

Ne consegue che le (27) costituiscono una rappresentazione parametrica di una curva regolare Γ. Dobbiamo ora far vedere che Γ è proprio l'inviluppo che stiamo cercando. A tale scopo, prendiamo ad arbitrio $P[x(t), y(t)] \in \Gamma$. Per quanto precede, esiste uno ed un sol valore di t tale che $t = t(x, y)$ che a sua volta definisce univocamente la curva di Φ

$$\gamma_t : f(x, y, t) = 0$$

passante per P. Quindi

$$\begin{cases} f[x(t), y(t), t] = 0 \\ f_t[x(t), y(t), t] = 0 \end{cases} \tag{28}$$

Deriviamo la prima rispetto a t:

$$f_x[x(t), y(t), t]\, x'(t) + f_y[x(t), y(t), t]\, y'(t) + f_t[x(t), y(t), t] = 0,$$

quindi mettiamo a sistema

$$\begin{cases} f_x[x(t), y(t), t]\, x'(t) + f_y[x(t), y(t), t]\, y'(t) + f_t[x(t), y(t), t] = 0 \\ f_t[x(t), y(t), t] = 0, \end{cases} \tag{29}$$

da cui

$$f_x\left[x\left(t\right),y\left(t\right),t\right]x'\left(t\right)+f_y\left[x\left(t\right),y\left(t\right),t\right]y'\left(t\right)=0 \tag{30}$$

La retta tangente e γ_t in P è

$$\tau: f_x\left[x\left(t\right),y\left(t\right),t\right]\left[x-x\left(t\right)\right]+f_y\left[x\left(t\right),y\left(t\right),t\right]\left[y-y\left(t\right)\right]=0$$

La retta tangente e Γ in P è

$$\tau': \frac{x-x\left(t\right)}{x'\left(t\right)}=\frac{y-y\left(t\right)}{x'\left(t\right)}$$

Tenendo conto della (30) si ha $\tau\equiv\tau'$, per cui Γ è l'inviluppo della famiglia Φ.

Riferimenti bibliografici

[1] Ghizzetti A.,1978. *Lezioni di Analisi Matematica, vol. II.* Veschi Editore.