Un esempio di macchina ricorsiva: il Sistema di Navigazione Inerziale

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

L'*Operazione Paukenschlag*[1] fu un'azione a sorpresa ideata dall'ammiraglio Karl Dönitz della marina militare tedesca durante la seconda guerra mondiale, e comandante della flotta sottomarina. Tale operazione impegnò due distinte squadre di *U-boat* lungo le coste Usa e del Canada.

Nello stesso periodo storico, un ufficiale della marina tedesca, G.M. Boykon, in collaborazione con l'ing. Von Braun, realizzò il primo sistema di navigazione inerziale di guida dei razzi V2. Da alcuni archivi storici è emerso che il sistema inerziale venne utilizzato a bordo dei sommergibili tedeschi.

Lo start up dell'Operazione Paukenschlag avvenne il 9 gennaio 1942. Ma diamo il via alla storia...

L'U-boat 130 partì da un punto A al largo della base francese di La Rochelle:

$$A \equiv \begin{cases} \varphi_A = 46^\circ \ \ 14' \text{ N} \\ \lambda_A = 01^\circ \ \ 27' \text{ W} \end{cases}, \tag{1}$$

diretto verso un punto B al largo di Halifax (Canada):

$$B \equiv \begin{cases} \varphi_B = 44^\circ \ \ 16' \text{ N} \\ \lambda_B = 62^\circ \ \ 32' \text{ W} \end{cases}, \tag{2}$$

Le formule (1)-(2) forniscono le coordinate geografiche (latitudine φ e longitudine λ) del punto di partenza e del punto di arrivo. Senza scrivere un trattato di Navigazione, è necessaria una precisazione. Assegnate le coordinate di partenza e di arrivo, è possibile determinare la distanza e l'angolo di rotta, a patto di specificare il tipo di traiettoria seguita. Vengono, allora, formulate delle ipotesi circa la forma della superficie che più approssima quella terrestre, e quella più semplice è la superficie di una sfera. E, come è noto, il percorso più breve che unisce due punti sulla sfera è l'arco di circolo massimo (minore di 180°) passante per essi. In Appendice **??** abbiamo eseguito i calcoli servendoci di formule ricavate dalla trigonometria sferica [1]. Inoltre, uno dei problemi principali in Navigazione è la determinazione del *punto-nave*, ovvero la determinazione delle coordinate geografiche (φ, λ). I sistemi, per così dire, tradizionali, risolvono tale problema eseguendo misure/osservazioni (astronomiche, ricezioni di segnali elettromagnetici, etc.). Tuttavia, tali sistemi dipendono dall'esterno: si pensi a problemi di visibilità o a propagazione anomale delle onde elettromagnetiche. In quest'ultimo caso, c'è da aggiungere la possibilità di intercettazione dei segnali e quindi della posizione di una nave nemica. Diversamente, il sistema di navigazione inerziale è esclusivamente basato sulla misura dell'accelerazione della nave. Più precisamente, approssimando la superficie terrestre a quella di una sfera di raggio R, fissiamo una terna di assi cartesiani ortogonali $\mathcal{T}\,(Oxyz)$ con l'origine nel centro della sfera, il piano coordinato xy coincidente con il piano equatoriale terrestre, orientando l'asse x in direzione del meridiano di Greenwhich. Chiamiamo $\mathcal{T}\,(Oxyz)$ **terna terrestre**. A rigore non si tratta di un sistema di riferimento inerziale[2], a causa della rotazione diurna della Terra e del suo moto di rivoluzione intorno al Sole. Tuttavia, con buona approssimazione $\mathcal{T}\,(Oxyz)$ può essere considerata una terna inerziale. Le equazioni che legano le coordinate cartesiane (x, y, z) alle coordinate geografiche (φ, λ) sulla sfera terrestre sono:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\lambda \\ y = R\cos\varphi\sin\lambda \\ z = R\sin\varphi \end{cases}, \tag{3}$$

[1] *Operazione colpo di tamburo.*

[2] In un sistema di riferimento inerziale è valida la legge di inerzia: una particella non sottoposta a forze (o se la risultante è nulla) o è in quiete o si muove di moto rettilineo ed uniforme.

dove R è il raggio della sfera terrestre, mentre gli angoli φ e λ sono espressi in radianti. A bordo dell'U-boat 130 è montato un *accelerometro*, ovvero uno strumento in grado di determinare in un generico istante t, l'accelerazione del sommergibile rispetto alla terna terrestre $\mathcal{T}\left(Oxyz\right)$, che è il vettore:

$$\mathbf{a}\left(t\right) = a_x\left(t\right)\mathbf{i} + a_y\left(t\right)\mathbf{j} + a_z\left(t\right)\mathbf{k}, \tag{4}$$

essendo $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori degli assi coordinati. Ma $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} \overset{def}{=} \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, cioè la derivata rispetto al tempo della velocità, per cui:

$$\mathbf{v}\left(t\right) = \int \mathbf{a}\left(t\right) dt = \left(\int a_x\left(t\right) dt\right)\mathbf{i} + \left(\int a_y\left(t\right) dt\right)\mathbf{j} + \left(\int a_z\left(t\right) dt\right)\mathbf{k}$$

Eseguendo una seconda integrazione, possiamo determinare il vettore posizione $\mathbf{x}\left(t\right) = x\left(t\right)\mathbf{i} + y\left(t\right)\mathbf{j} + z\left(t\right)\mathbf{k}$ dell'U-boat, giacchè $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$. Note le coordinate cartesiane al tempo t, invertendo le (3) si ottengono le coordinate geografiche al tempo t, ovvero il punto-nave. Possiamo quindi tracciare uno schema a blocchi per ciò che riguarda il "funzionamento" di un sistema di navigazione inerziale (cfr. fig. 1).

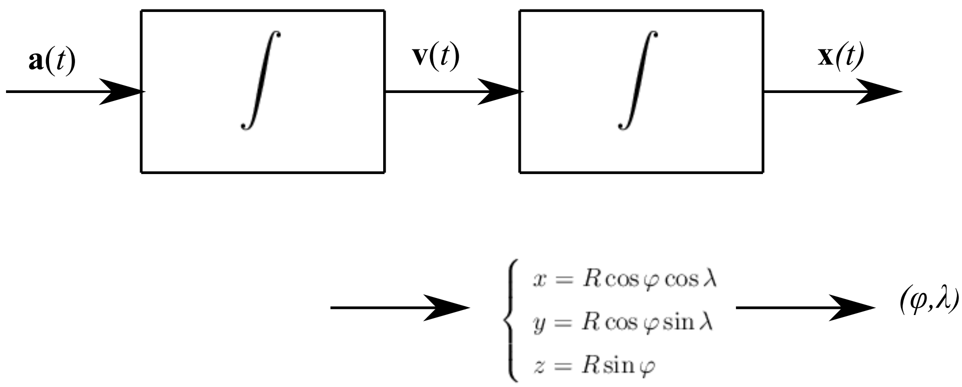

Figura 1: *Schema a blocchi che illustra il principio di un sistema di navigazione inerziale. Un accelerometro fornisce al tempo t il valore dell'accelerazione* $\mathbf{a}$ *della nave. Il calcolatore esegue una prima integrazione (rispetto al tempo), fornendo la velocità* $\mathbf{v}$ *all'istante t. L'output di una seconda integrazione è la posizione* $\mathbf{x}$ *e, quindi, le coordinate geografiche.*

È chiaro che l'affidabilità di un sistema di navigazione inerziale dipende essenzialmente dai due fattori:

1. Possibilità di misurare l'accelerazione con una precisione adeguata.

2. Possibilità di eseguire l'integrazione di una funzione vettoriale di una variabile reale.

D'altra parte, per la seconda legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, segue che il problema della navigazione inerziale è riconducibile a ciò che nella teoria delle equazioni differenziali si chiama *problema di Cauchy*. Precisamente:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{F}}{m} \\ \mathbf{x}\left(t_0\right) = \mathbf{x}_0 \end{cases}, \tag{5}$$

dove t_0 è un istante iniziale e $\mathbf{x}_0$ la posizione iniziale, supposta nota. $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{F}}{m}$ è un'equazione differenziale vettoriale (quindi, un sistema di equazioni differenziali) del secondo ordine che, però, può essere ridotto al primo,:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{F}}{m} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \end{cases} \tag{6}$$

Infatti, integrando la prima delle (6) si perviene alla funzione vettoriale $\mathbf{v}(t)$ che, a sua volta, ci darà la possibilità di determinare la posizione $\mathbf{x}(t)$. Senza perdita di generalità, ci si può riferire (per poi generalizzare) a moti unidimensionali, cosicchè il sistema precedente si scrive:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{F}{m} \\ \dot{x} = v \end{cases} \tag{7}$$

Quindi il problema di Cauchy che ci interessa è:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{F}{m} \\ v(t_0) = v_0 \end{cases} \tag{8}$$

Una volta determinata la velocità $v(t)$, integrando otteniamo la posizione $x(t) = \int v(t)\,dt$. Tipicamente, la forza F dipende dal tempo, dalla posizione e dalla velocità, per cui è $F(t, x, \dot{x})$. Particolarmente interessante è il caso in cui F dipende (esplicitamente) solo dalla velocità $\dot{x}$, per cui il problema (8) diventa:

$$\begin{cases} \dot{v} = f(v) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}, \tag{9}$$

avendo definito $f(v) = \frac{F(v)}{m}$. L'equazione $\dot{v} = f(v)$ appartiene a una particolare classe di equazioni differenziali: i cosiddetti *sistemi autonomi*. Questi ultimi sono l'argomento principale del presente lavoro.

Nell'ipotesi (9) l'accelerometro darà "in pasto" al calcolatore di bordo l'espressione della funzione $f(v)$, i.e. la derivata $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$. Il calcolatore dovrà, quindi, integrare tale equazione differenziale. In questa nostra simulazione *virtuale* immaginiamo che il calcolatore disponga di un unico algoritmo per l'integrazione (numerica) della suddetta equazione: il metodo di Eulero. Vedremo che per una classe di funzioni $f(v)$ il calcolatore entrerà in un *loop caotico*, con tanto di *punti periodici, punti di biforcazione* e di tutti quegli elementi che caratterizzano il cosiddetto **caos deterministico**. L'aggettivo *deterministico* si riferisce al fatto che i sistemi in istudio obbediscono al determinismo fisico. Nel caso specifico del problema (5) o della sua versione "ridotta" (9), il determinismo fisico si traduce matematicamente in un teorema secondo cui sotto ragionevoli ipotesi di regolarità della funzione $f(v)$ (cioè se $f(v)$ è *onesta*, come amano dire i fisici teorici), il problema (5) ammette una ed una sola soluzione. Detto in altro modo, assegnato lo stato iniziale $v(t_0) = v_0$ e la "legge" $f(v)$, resta univocamente determinato lo stato (cioè la velocità) a tutti i tempi. Tuttavia, esistono sistemi autonomi che pur essendo deterministici (in quanto la funzione $f(v)$ è onesta) risultano imprevedibili, nel senso che non è possibile conoscere $v(t)$ per $t > t_0$. È altresì necessario osservare che tale comportamento si realizza integrando numericamente la $\dot{v} = f(v)$ con il metodo di Eulero.

Questo lavoro è così suddiviso:

- Nel Capitolo 1 dopo una necessaria introduzione sulle equazioni differenziali, daremo la definizione assiomatica di *sistema dinamico a tempo continuo*, prestando particolare attenzione a quelli lineari.

- Nel Capitolo 1 affronteremo lo studio del Metodo di Eulero per l'integrazione di equazioni differenziali del primo ordine, definendo, poi, l'importante nozione di **Macchina ricorsiva**.

- Nei Capitoli successivi esploreremo alcune interessanti applicazioni delle macchine ricorsive, ovvero il metodo di Eulero applicato all'integrazione di un sistema autonomo lineare. Passeremo in rassegna il fenomeno dei transitori circuitali in una serie RC e RL rispettivamente, mostrando in seguito, che il comportamento di un diodo a giunzione non può essere simulato da un sistema autonomo. Come ultima applicazione, consideriamo la caduta libera di una palla da tennis in un campo gravitazionale uniforme.

Riferimenti bibliografici

[1] Capasso I., Fede S., 1976. *Navigazione.* Hoepli