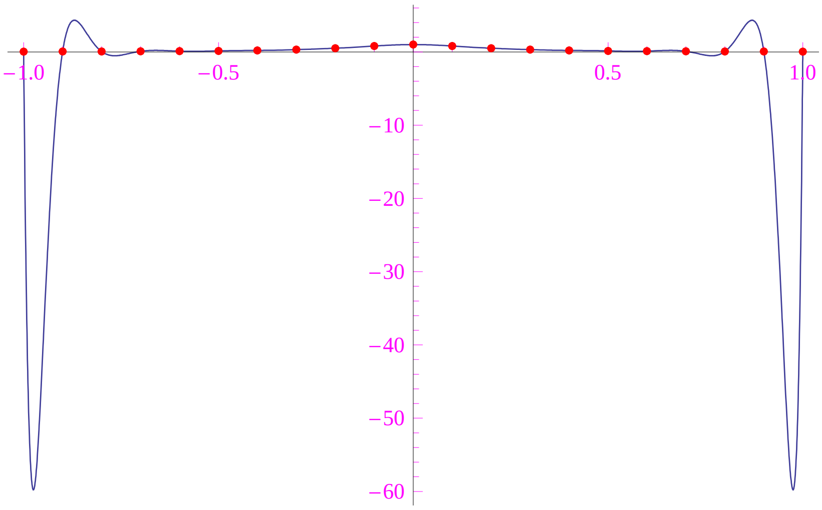
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Interpolazione con Mathematica

Marcello Colozzo



Indice

1 Polinomiale

Supponiamo di misurare una grandezza y in funzione del tempo t, per ottenere una sequenza di dati:

$$y_1, y_2, ..., y_n \tag{1}$$

tali che

$$y_k = f(t_k), \qquad (k = 1, 2, ..., n) \tag{2}$$

essendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione reale della variabile reale t con $t_k \in [a, b]$ per $k = 1, 2, ..., n$. Per essere più specifici, l'intervallo $[a, b]$ risulta partizionato nel modo seguente:

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [t_k, t_{k+1}], \qquad \text{con } t_1 = a, \ t_n = b \tag{3}$$

Per rendere più maneggevoli (nel senso dell'Analisi matematica) i dati (1) possiamo trovare una cosiddetta *polinomiale* ovvero un insieme di polinomi raccordati a due a due nei singoli punti (t_k, y_k). Precisamente:

$$f_{app}(t) = \begin{cases} p_1(t), & \text{se } t \in [t_1, t_2] \\ p_2(t), & \text{se } t \in [t_2, t_3] \\ ... \\ p_{n-1}(t), & \text{se } t \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases} \tag{4}$$

dove $p_1(t), ..., p_{n-1}(t)$ sono polinomi dello stesso grado. Le condizioni di raccordo implicano la continuità del polinomio e della derivata prima:

$$\begin{cases} p_{k-1}(t_k) = p_k(t_k) \\ p'_{k-1}(t_k) = p'_k(t_k) \end{cases} \tag{5}$$

In tale ordine di approssimazione, anziché lavorare sui dati (1) ci si concentra sulla funzione 4.

2 L'istruzione ≪Interpolation≫

Mathematica dispone dell'istruzione `Interpolation` che restituisce una cosiddetta `InterpolatingFunction` che può essere trattata come una usuale funzione nel senso dell'Analisi matematica. Vediamo alcuni esempi in questo file PDF, dal quale prendiamo il grafico di fig. 1.

3 Opzioni di ≪Interpolation≫

Nel numero precedente abbiamo detto che attraverso l'istruzione `Interpolation`, *Mathematica* esegue un'interpolazione utilizzando un insieme di polinomi dello stesso grado. Per default, il grado è 3. Se i dati non sono molti, *Mathematica* non riesce ad interpolare mediante polinomi di terzo grado, per cui occorre in tal caso portare a 1 il predetto grado, attraverso l'opzione `InterpolationOrder`. Viene cioè eseguita una interpolazione lineare, come in questo esempio da cui prendiamo il grafico di fig. 2.

Se settiamo `InterpolationOrder` su zero, si ottiene un'interpolazione costante a tratti. In questo esempio vediamo come modulare l'ordine di interpolazione, in modo da restituire i grafici di fig. 3, dove il grado è rispettivamente $n = 0, 1, 2, 3$.

Per quanto precede, il grado di default è 3, perchè sembra che sia l'approssimazione migliore. In questo esempio vediamo che aumentare il grado equivale a generare degli errori di approssimazione, illustrati nei grafici di fig. 4.

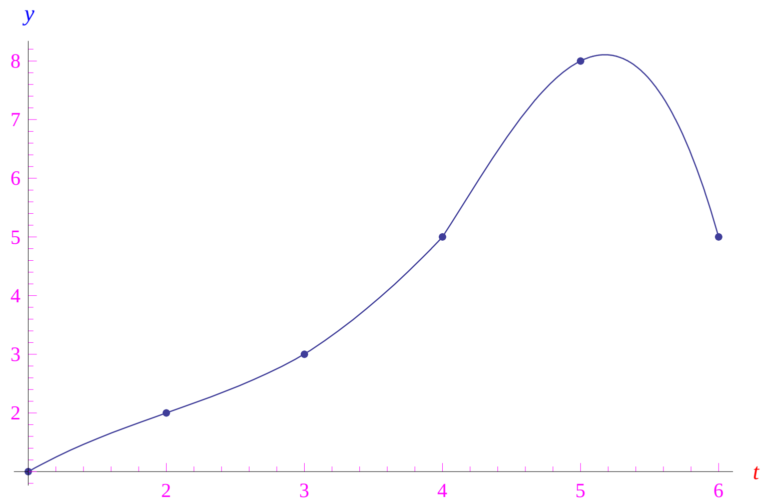


Figura 1: Qui la lista (1) è $y_1 = 1,\ y_2 = 2, y_3 = 3,\ y_4 = 5,\ y_5 = 8,\ \ y_6 = 5.$

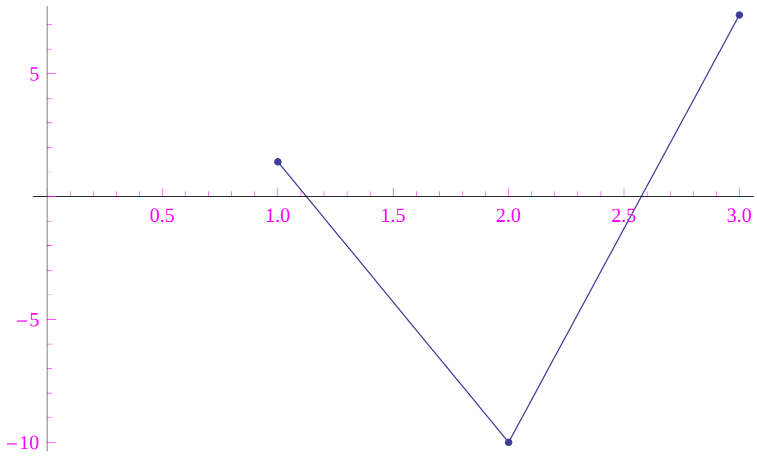


Figura 2: Qui la lista (1) è $y_1 = \sqrt{2},\ y_2 = -10, y_3 = e^2.$

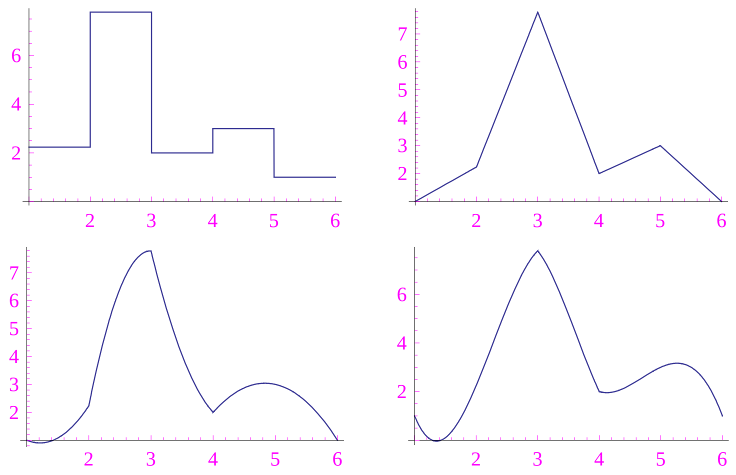


Figura 3: Qui la lista (1) è $y_1 = 1,\ y_2 = \sqrt{5}, y_3 = 4\ln 7, y_4 = 2, y_5 = 3, y_{6=1}.$

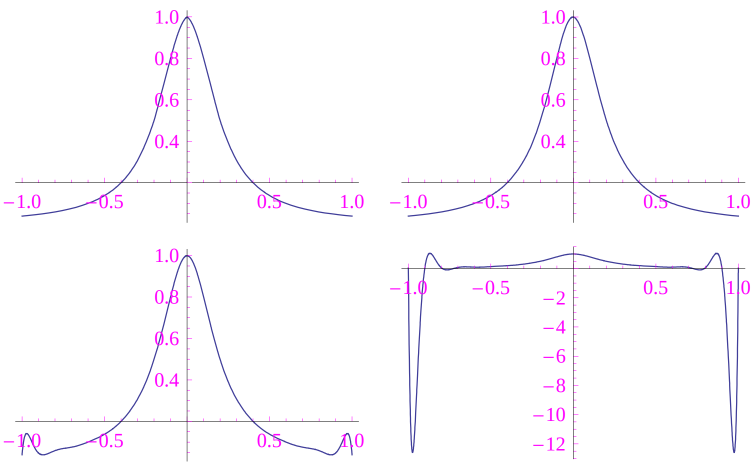


Figura 4: Abbiamo una buona approssimazione per $n = 3$ quale ordine di interpolazione. L'approssimazione peggiora al crescere di n.

4 Continuità della funzione di interpolazione

Per quanto visto nei numeri precedenti, l'istruzione `Interpolation` restituisce una funzione continua, che però potrebbe non essere derivabile, come in questo esempio da cui prendiamo il grafico presentato in fig. 5.

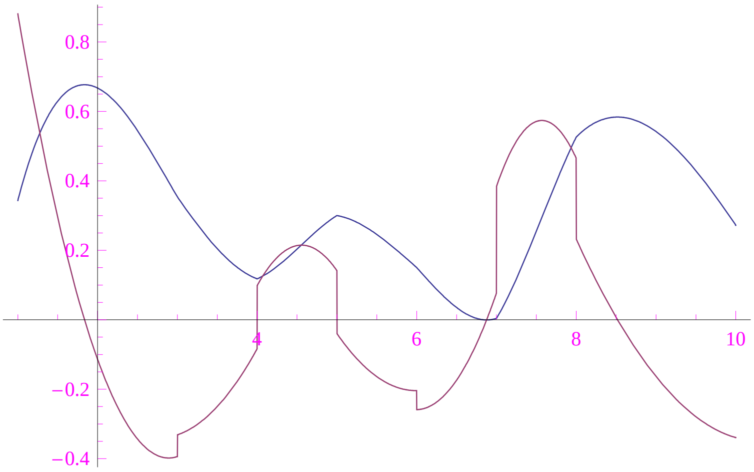


Figura 5: Qui i dati sono numeri reali pseudocasuali.

5 L'istruzione «InterpolatingPolynomial»

L'istruzione `InterpolatingPolynomial` restituisce un polinomio approssimante di grado assegnato, come possiamo vedere in questo esempio graficato in fig.6.

6 Il fenomeno di Runge

Il fenomeno di Runge è un problema relativo all'interpolazione polinomiale su nodi equispaziati con polinomi di grado elevato. Vediamo come trattarlo in questo esempio da cui prendiamo il grafico presentato in fig. 7.

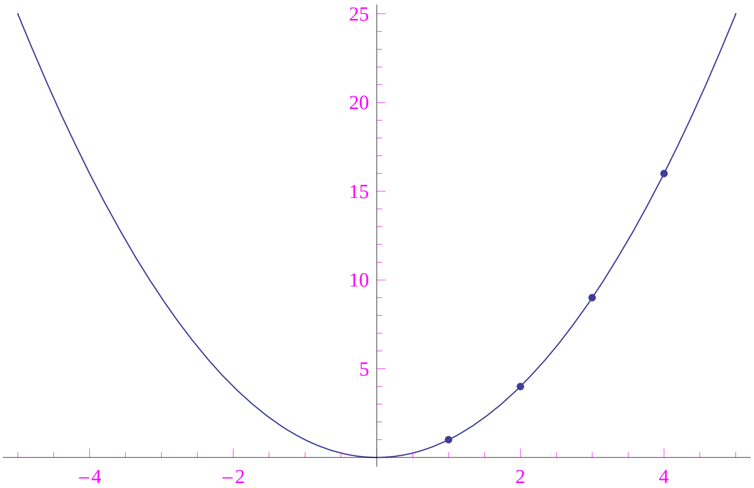


Figura 6: Qui i dati $\{1, 4, 9, 16\}$ sono interpolati da un polinomio di grado 2.

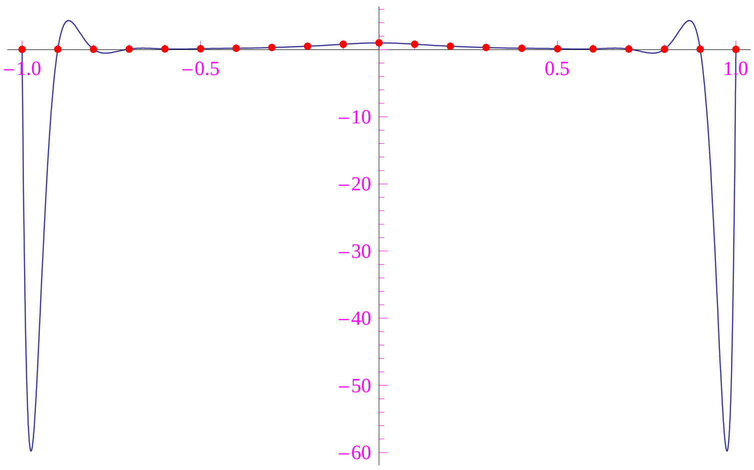


Figura 7: Approssimazione della funzione di Runge $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$.