Integrazione complessa

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Sia $f(z) = f(x,y)$ unau funzione della variabile complessa $z = x + iy$, continua nell'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Denotiamo con $\gamma(z_0, \bar{z})$ un arco di curva regolare contenuto in A. Una rappresentazione parametrica regolare di γ sia data da:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [t_0, \bar{t}], \tag{1}$$

con $z_0 = x(t_0) + iy(t_0)$ e $\bar{z} = x(\bar{t}) + iy(\bar{t})$.

Definizione 1 *Si dice* **integrale curvilineo complesso** *(o semplicemente* **integrale complesso***) della funzione $f(z)$ esteso all'arco $\gamma(z_0, \bar{z})$ nel verso da z_0 a $\bar{z}$ e si denota con*

$$\int_{\gamma(z_0,\bar{z})} f(z)\, dz, \tag{2}$$

l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare $f(x,y)\,dx + if(x,y)\,dy$ esteso all'arco $\gamma(z_0, \bar{z})$ nel verso da z_0 a $\bar{z}$:

$$\int_{\gamma(z_0,\bar{z})} f(z)\, dz = \int_{\gamma(z_0,\bar{z})} f(x,y)\,dx + if(x,y)\,dy \tag{3}$$

Per definizione di integrale curvilineo di una forma differenziale lineare esteso a una curva regolare:

$$\int_{\gamma(z_0,\bar{z})} f(z)\, dz = \int_{t_0}^{\bar{t}} f[x(t), y(t)]\,[x'(t) + iy'(t)]\, dt \tag{4}$$

Questa definizione si estende immediatamente al caso in cui γ è una curva generalmente regolare, i.e. l'unione di un numero finito di curve regolari aventi in comune gli estremi:

$$\gamma(z_0, \bar{z}) = \bigcup_{k=1}^{N} \gamma(z_{k-1}, z_k) \tag{5}$$

Eseguendo una decomposizione $\mathcal{D}([t_0, \bar{t}])$ dell'intervallo $[t_0, \bar{t}]$

$$[t_0, \bar{t}] = \bigcup_{k=1}^{N} [t_{k-1}, t_k] \tag{6}$$

tale che

$$\gamma(z_{k-1}, z_k) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t),\ y = y(t), \quad t_{k-1} \le t \le t_k\right\} \tag{7}$$

Per definizione di integrale curvilineo di una forma differenziale lineare esteso a una curva generalmente regolare:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma(z_0,\bar{z})} f(z)\, dz &= \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma(z_{k-1},z_k)} f(x,y)\,dx + if(x,y)\,dy \\ &= \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f[x(t), y(t)]\,[x'(t) + iy'(t)]\, dt\end{aligned} \tag{8}$$

Gli integrali complessi verificano proprietà e teoremi che costituiscono l'analogo di proprietà e teoremi degli integrali curvilinei delle forme differenziali lineari. Ad esempio:

$$\int_{\gamma(z_0,\bar{z})} f(z)\,dz = -\int_{\gamma(\bar{z},z_0)} f(z)\,dz \tag{9}$$

Inoltre, un integrale complesso può essere esteso a una curva regolare semplice e chiusa. In tal caso si parla di integrale di circuitazione simboleggiato da:

$$\oint_{\pm\gamma} f(z)\,dz \tag{10}$$