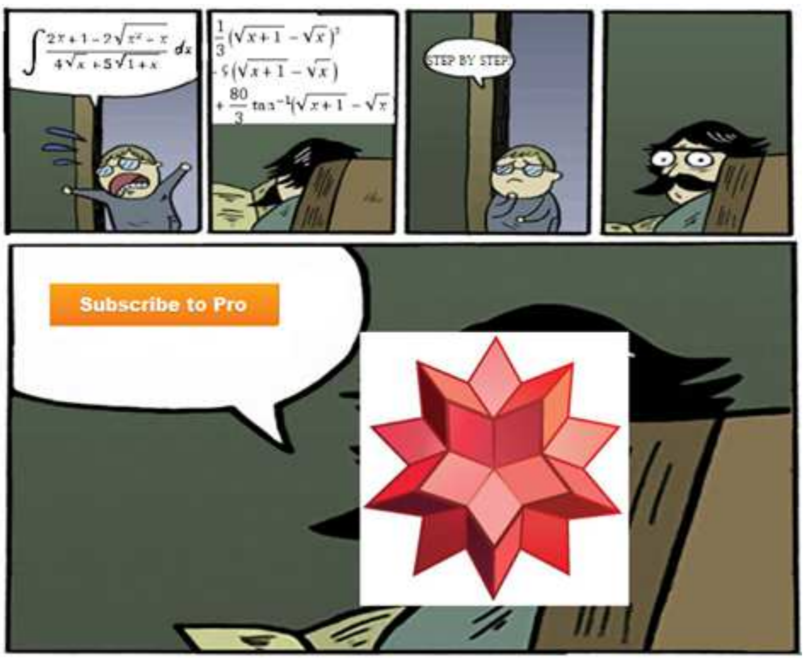
SCIENTIA – http://www.scientiajournal.org/
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Quaderni di Matematica – 2015

Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info

Integrali indefiniti

Marcello Colozzo



0.1 Integrali indefiniti

Per quanto visto nelle altre dispense, la più generale primitiva di una funzione f continua nell'intervallo X (limitato o non) è:

$$F(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

Definizione 1 *Dicesi* ***integrale indefinito*** *di f, una sua qualunque primitiva e si denota con il simbolo*

$$\int f(x)\, dx \tag{1}$$

Evidentemente:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \tag{2}$$

La primitiva $F(x)$ è una ***determinazione*** *dell'integrale indefinito (1), mentre c è una* ***costante di integrazione****.*

Per definizione di funzione primitiva, deve aversi:

$$\frac{d}{dx}\int f'(x)\, dx = f(x)$$
$$\int f'(x)\, dx = f(x) + c, \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

Il simbolo $\int$ denota l'operazione di integrazione indefinita, che risulta essere l'operazione inversa dell'operazione di derivazione. In simboli:

$$D : f \to f'$$
$$\int : f' \to f$$

0.1.1 Integrali indefiniti fondamentali

Dalla conoscenza delle derivate delle funzioni elementari, si ottengono gli integrali indefiniti delle funzioni elementari. Ad esempio, nel caso della funzione potenza di esponente reale:

$$\int x^{\lambda} dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c, \quad (\lambda \neq -1) \tag{3}$$

Per $\lambda = -1$:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c \tag{4}$$

Osserviamo che nella (4) la funzione integranda è definita in $\mathbb{R} - \{0\}$, mentre la funzione a secondo membro, cioè $\ln x$, è definita in $(0, +\infty)$. Tuttavia, osservando che $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$, si perviene

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c, \tag{5}$$

valida per $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Integrali fondamentali di funzioni trigonometriche:

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad \int \sin x dx = -\cos x + c \tag{6}$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

Integrali fondamentali di funzioni iperboliche:

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c, \quad \int \sinh x dx = \cosh x + c \tag{7}$$
$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + c, \quad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \coth x + c$$

Per le funzioni trigonometriche inverse, ricordiamo che:

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

per cui:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c'$$

Ciò implica:

$$\forall x \in [-1,1]\,, \quad \arcsin x + c = -\arccos x + c' \Longrightarrow \arcsin x + \arccos x = c' - c$$

In virtù della relazione fondamentale

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

si ha:

$$c' = c + \frac{\pi}{2}$$

Quindi $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ si esprime:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c + \frac{\pi}{2} \tag{8}$$

Passiamo alle funzioni $\arctan x$ e $\operatorname{arccot} x$:

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

Perciò

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c'$$

Ricordando la relazione fondamentale $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c + \frac{\pi}{2} \tag{9}$$

Passiamo alle funzioni iperboliche inverse:

- $\frac{d}{dx}\text{arcsinh}x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Ricordando la relazione $\text{arcsinh}x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, segue:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arcsinh}x + c = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c \tag{10}$$

- $\frac{d}{dx}\text{arccosh}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Ma $\text{arccosh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, onde:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{arccosh}x + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \tag{11}$$

- $\frac{d}{dx}\text{arctanh}x = \frac{1}{1-x^2}$. Ma $\text{arctanh}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, per cui:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \text{arctanh}x + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$$