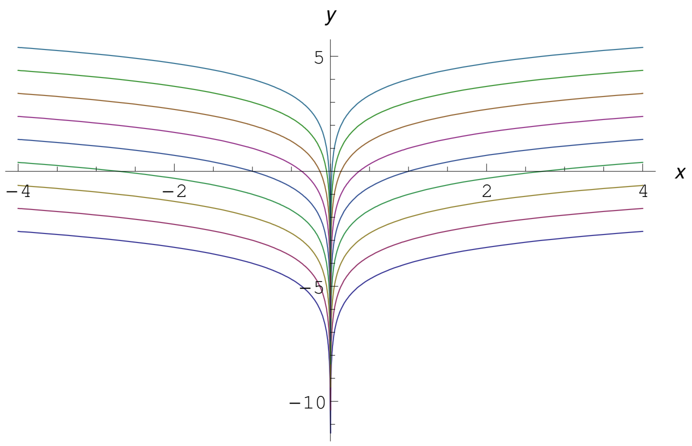
SCIENTIA – http://www.scientiajournal.org/
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Quaderni di Matematica – 2015

Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info

Funzioni primitive e valore assoluto

Marcello Colozzo



1 Funzioni primitive e valore assoluto. Integrali fondamentali di funzioni iperboliche

Una questione spesso trascurata è la generalizzazione dell'espressione della primitiva di una assegnata funzione $f : X \to \mathbb{R}$. In realtà abbiamo già trattato tale problema nella ricerca di una primitiva di x^{-1}. Siamo infatti portati a scrivere:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \tag{1}$$

giacchè $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$. È chiaro che la (1) ha senso solo per $x \in (0, +\infty)$. D'altra parte:

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Distinguiamo i due casi:

- $x > 0$
$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$
- $x < 0$
$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{(-x)}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$

Cioè
$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \tag{2}$$

Si noti che a differenza della (1), la (2) ha senso per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Ne consegue che la famiglia delle primitive di x^{-1} è

$$\mathcal{F} = \{\ln|x| + C \mid C \in \mathbb{R}\} \tag{3}$$

Notiamo incidentalmente che $\ln|x|$ è una funzione pari, onde il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y, come mostrato in fig. 1. In fig. 2 vediamo, invece, il grafico di alcune primitive di x^{-1}.

Vediamo ora altri integrali che coinvolgono valori assoluti. Ad esempio:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C \tag{4}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Osserviamo che $x + \sqrt{x^2+1} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, per cui possiamo omettere il valore assoluto. Inoltre, sappiamo che $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \text{arcsinh}x$, quindi l'integrale (4) si può anche esprimere come

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \text{arcsinh}x + C \tag{5}$$

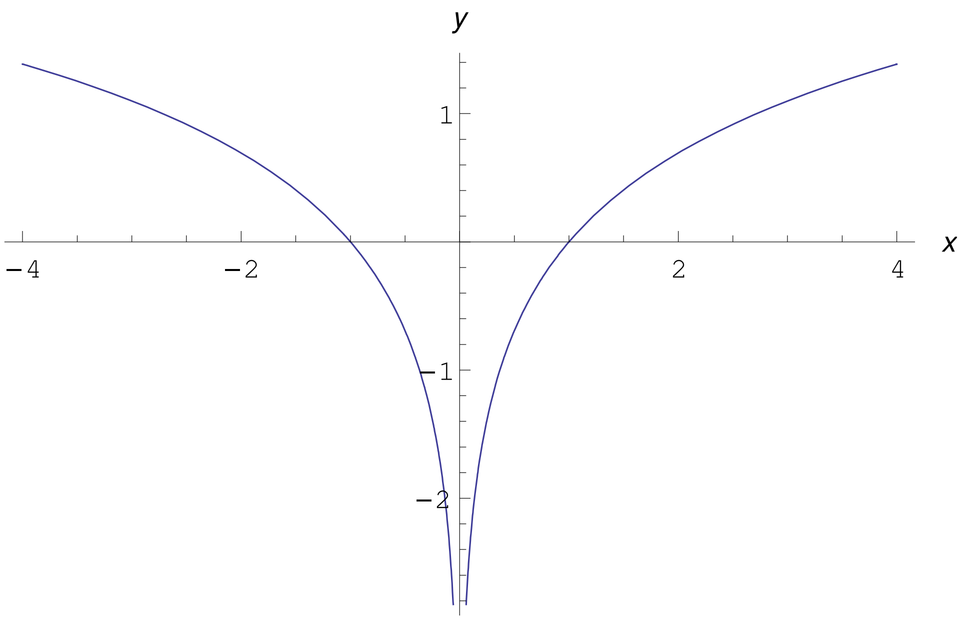


Figura 1: Diagramma cartesiano della funzione $\ln|x|$.

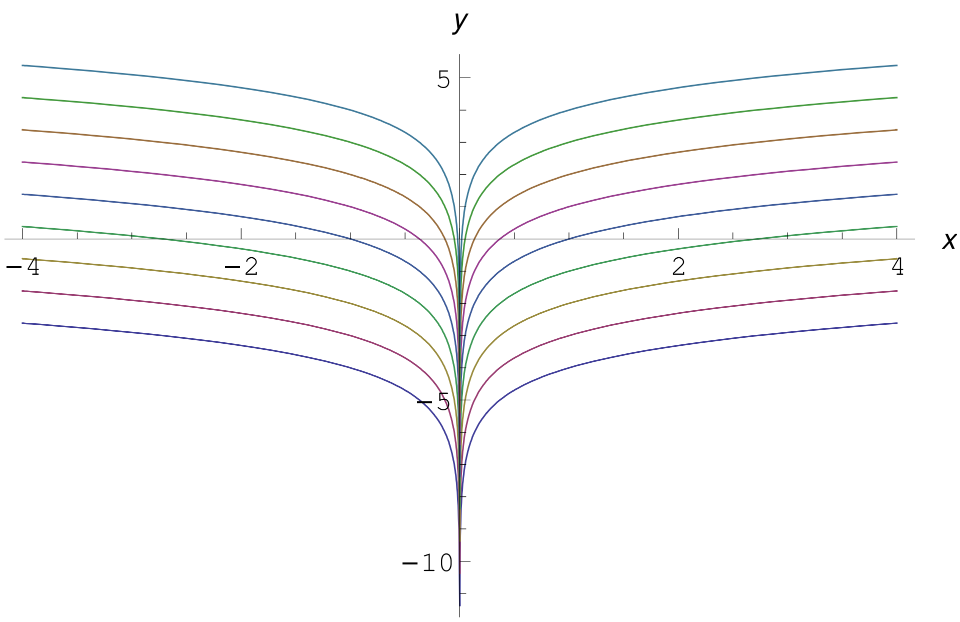


Figura 2: Diagramma cartesiano di alcune primitive di $\frac{1}{x}$.

Ora dimostriamo che

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C \tag{6}$$

Non dobbiamo fare altro che calcolare la derivata del secondo membro. Per svincolarci dal valore assoluto, studiamo il segno del suo argomento:

$$\begin{aligned} &x+\sqrt{x^2-1} > 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2-1} > -x \Longleftrightarrow x \geq 1 \\ &x+\sqrt{x^2-1} < 0 \Longleftrightarrow x \leq -1, \end{aligned}$$

onde

$$\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| = \begin{cases} \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), & \text{se } x \geq 1 \\ \ln\left[-\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right], & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

- $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| &= \frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

- $x \leq -1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| &= \frac{d}{dx}\ln\left[-\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot(-1)\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \end{aligned}$$

da cui la (6) che possiamo riscrivere precisandone il campo di validità:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C, \quad x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

Se $x \in (1,+\infty)$ è $x+\sqrt{x^2-1} > 0$, per cui possiamo omettere il valore assoluto. D'altra parte $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ =arccosh$x$, quindi:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{arccosh}x + C, \quad x \in (1,+\infty) \tag{7}$$

Un altro integrale notevole è:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C, \tag{8}$$

che si dimostra derivando il secondo membro. Per $x \in (-1,1)$ è $\frac{1+x}{1-x} > 0$, quindi possiamo omettere il valore assoluto, e ricordando che $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ =arctanh$x$, si ha:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \text{arctanh}x + C, \quad x \in (-1,1)$$

Concludiamo determinando gli integrali fondamentali delle funzioni iperboliche:

$$\int \sinh x dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^x-e^{-x}}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int e^x dx - \int e^{-x}dx\right)$$

Calcoliamo a parte il secondo integrale nell'ultimo membro dell'equazione precedente:

$$\int e^{-x}dx = -\int e^{-x}d(-x) = -e^{-x} + C_2, \quad \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$\int \sinh x dx = \frac{1}{2}\left(e^x + C_1 + e^{-x} + C_2\right),$$

giacchè $\int e^x dx = e^x + C_1, \quad \forall C_2 \in \mathbb{R}$. Ponendo $C = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$, si ha $\int \sinh x dx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + C$. Cioè:

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C \tag{9}$$

Allo stesso modo si dimostra

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C \tag{10}$$

Passiamo alla ricerca delle primitive di $\tanh x$:

$$\begin{aligned}\int \tanh x dx &= \int \frac{\sinh x}{\cosh x}dx = \int \frac{d(\cosh x)}{\cosh x} \\ &= \ln|\cosh x| + C\end{aligned}$$

Ma $|\cosh x| = \cosh x$, per cui

$$\int \tanh x dx = \ln \cosh x + C \tag{11}$$

Segnaliamo infine:

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + c, \quad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + c \tag{12}$$

Di seguito la tabella degli integrali fondamentali.

$\int x^\lambda dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C, \quad (\lambda \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C'$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0)$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \cosh x dx = \sinh x + C$
$\int \sin x dx = \cos x + C$	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh$
$\int \cos x dx = -\sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C = \text{arcsinh}x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \text{arccosh}x + C, & x \in (1, +\infty) \\ \ln\left\|x + \sqrt{x^2-1}\right\|, & x \notin (-1, 1) \end{cases}$
	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \text{arctanh}x, & x \in (-1, 1) \\ \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|, & x \notin (-1, 1) \end{cases}$