Prime proprietà dell'integrale curvilineo

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Ricapitoliamo i risultati raggiunti. Se il cammino di integrazione è in rappresentazione naturale:

$$x = \varphi(s), \; y = \psi(s), \; z = \chi(s), \qquad s \in [\alpha, \beta], \tag{1}$$

riesce

$$\int_{\gamma(P,Q)} f(x,y,z)\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)]\, ds$$

Se invece γ è in rappresentazione parametrica non naturale:

$$x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t), \quad t \in [a,b], \tag{2}$$

allora

$$\int_{\gamma(P,Q)} f(x,y,z)\, ds = \int_{a}^{b} f[x(t), y(t), z(t)]\, H(t)\, dt, \tag{3}$$

dove $H(t)$ è l'ArcLenghtFactor:

$$H(t) = +\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \tag{4}$$

Osserviamo poi che per stabilire la "naturalità" di una rappresentazione parametrica

$$x = x(\lambda), \; y = y(\lambda), \; z = z(\lambda), \quad \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1], \tag{5}$$

occorre e basta calcolare l'ArcLenghtFactor che in questo caso si scrive:

$$H(\lambda) = +\sqrt{x'(\lambda)^2 + y'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2} \tag{6}$$

Se risulta $H(\lambda) = 1$, allora la (5) è la rappresentazione naturale della curva assegnata. Ciò premesso, sussistono i seguenti teoremi:

Teorema 1 *(**Proprietà additiva**)*
Comunque prendiamo $A \in \gamma(P,Q)$

$$\int_{\gamma(P,Q)} f(x,y,z)\, ds = \int_{\gamma(P,A)} f(x,y,z)\, ds + \int_{\gamma(A,Q)} f(x,y,z)\, ds \tag{7}$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalla proprietà additiva dell'integrale definito. ■

Teorema 2 *(**Teorema della media**)*

$$mL \leq \int_{\gamma(P,Q)} f(x,y,z)\, ds \leq ML,$$

dove

$$m = \min_{\gamma(P,Q)} f(x,y,z), \quad M = \max_{\gamma(P,Q)} f(x,y,z),$$

mentre L è la lunghezza di $\gamma(P,Q)$.

Dimostrazione. Scriviamo la rappresentazione parametrica naturale di γ:

$$x = \varphi(s)\,,\ y = \psi(s)\,,\ z = \chi(s)\,, \qquad s \in [\alpha, \beta]\ , \tag{8}$$

Quindi

$$\begin{aligned} m &= \min_{[\alpha,\beta]} f\left[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)\right] \\ M &= \max_{[\alpha,\beta]} f\left[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)\right] \\ L &= \int_\alpha^\beta ds = \beta - \alpha \end{aligned} \tag{9}$$

Per il teorema della media (integrale definito)

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)\right] ds \leq M(\beta - \alpha)\,,$$

onde l'asserto ■