Interpretazione intuitiva dell'integrale curvilineo di una funzione

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Completiamo la lezione precedente con il seguente esempio. Sia data la funzione:

$$f(x,y) = \sin(20x) + y, \tag{1}$$

che è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$, il cui grafico è riportato in fig. 1. Ci proponiamo di calcolare l'integrale curvilineo:

$$I = \int_{\gamma(O,P)} f(x,y)\,ds, \tag{2}$$

dove il cammino di integrazione γ è il luogo geometrico

$$x = \varphi(s)\,, \;\; y = \psi(s)\,, \quad s \in \left[0, \sqrt{2}\right], \tag{3}$$

cioè il segmento del piano coordinato xy di estremi $O(0,0)$ e $P(1,1)$. Verifichiamo innanzitutto che la (3) è la rappresentazione naturale di γ, i.e. il parametro s definisce un riferimento curvilineo su γ. A tale scopo calcoliamo:

$$H(s) = +\sqrt{\varphi'(s)^2 + \psi'(s)^2} = +\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1, \quad \forall s \in \left[0, \sqrt{2}\right],$$

per cui la (3) è la rappresentazione naturale di γ. Segue:

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} g(s)\,ds, \tag{4}$$

essendo

$$g(s) = f[\varphi(s), \psi(s)] = \sin\left(10\sqrt{2}s\right) + \frac{s}{\sqrt{2}}, \tag{5}$$

il cui grafico è riportato in fig. 2. Quindi I è l'area del rettangoloide relativo a tale funzione e di base $\left[0, \sqrt{2}\right]$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{2}} \left[\sin\left(10\sqrt{2}s\right) + \frac{s}{\sqrt{2}}\right] ds = \int_0^{\sqrt{2}} \sin\left(10\sqrt{2}s\right) ds + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}} sds \\ &= -\frac{1}{10\sqrt{2}}\left[\cos(20) - 1\right] + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Cioè

$$I = \frac{1}{10\sqrt{2}}\left[11 - \cos(20)\right] \tag{6}$$

Eseguiamo ora la sostituzione di parametro ammissibile:

$$s(t) = -\sqrt{2}t, \quad t \in [-1, 0] \tag{7}$$

La funzione $s(t)$ è strettamente decrescente, per cui

$$ds = -\sqrt{2}t$$

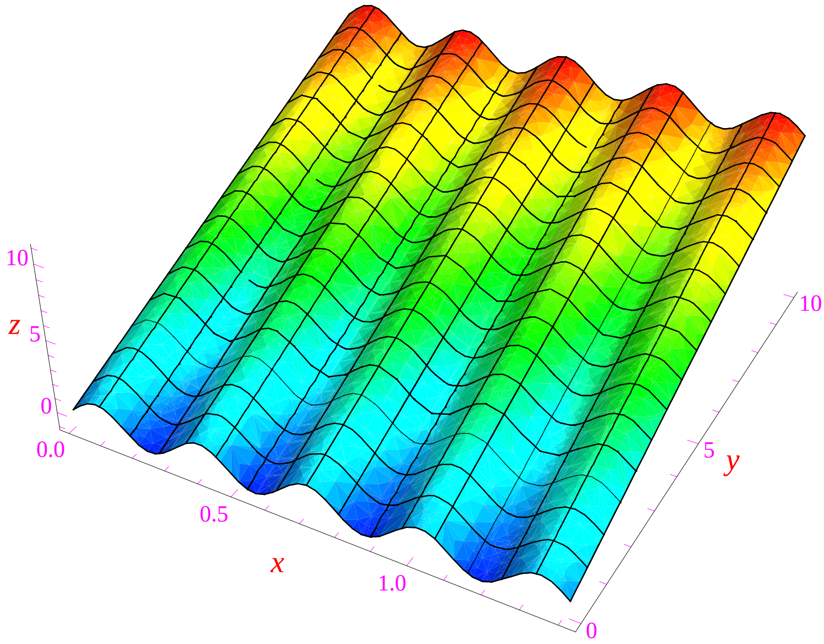

Figura 1: Grafico della funzione (1).

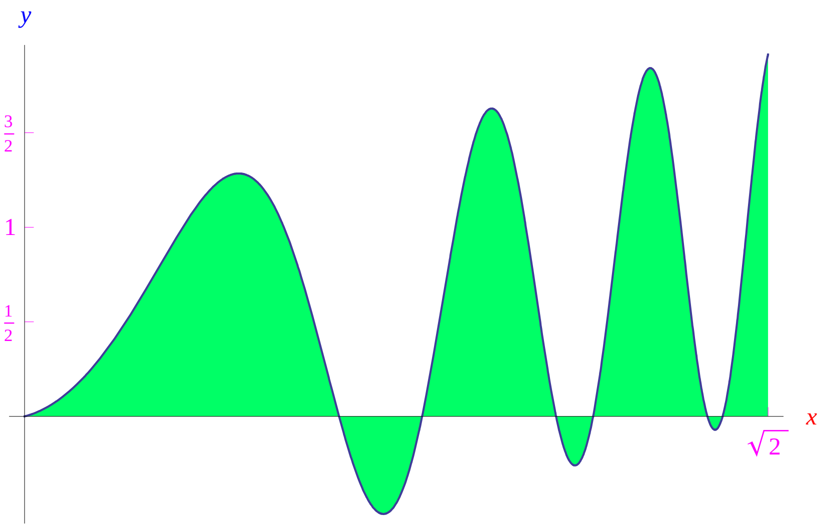

Figura 2: Grafico della funzione (5). È visibile il rettangoloide relativo a tale funzione e di base $[0, \sqrt{2}]$.

Risulta:

$$x(t) = \varphi(s(t)) = -t, \quad y(t) = \psi(s(t)) = -t \tag{8}$$

e

$$H(t) = +\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{2} \tag{9}$$

Inoltre

$$h(t) = f[x(t), y(t)] = -(\sin 20t + t), \tag{10}$$

per cui la funzione da integrare è

$$h(t)\,H(t) = -\sqrt{2}(\sin 20t + t), \quad t \in [-1, 0], \tag{11}$$

il cui grafico è riportato in fig. 3. Determiniamo i nuovi estremi di integrazione:

$$0 \leq s = -\sqrt{2}t \leq \sqrt{2} \Longrightarrow 0 \geq t \geq -1, \tag{12}$$

cosicché

$$\begin{aligned} I &= -\sqrt{2}\int_0^{-1} f[x(t), y(t)]\,dt = \sqrt{2}\int_0^{-1}(\sin 20t + t)\,dt \\ &= -\sqrt{2}\int_{-1}^{0}(\sin 20t + t)\,dt = -\frac{1}{10\sqrt{2}}(11 - \cos 20), \end{aligned} \tag{13}$$

cioè lo stesso risultato precedente.

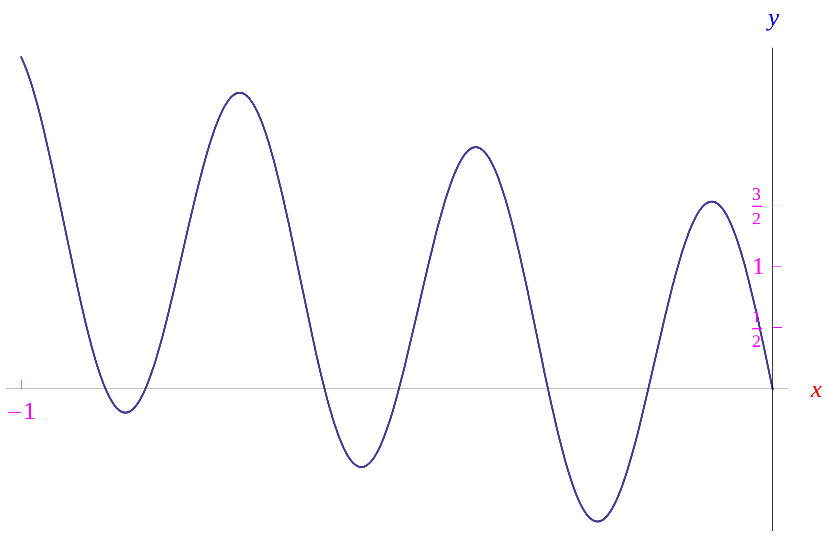

Figura 3: Grafico della funzione $h(t)\,H(t)$.