Integrale curvilineo esteso ad un arco di spirale logaritmica

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Calcolare*

$$\int_{\gamma(P,0)} \left(x^2+y^2\right)^2 ds, \tag{1}$$

dove $\gamma(P,0)$ *è l'arco dell'esercizio precedente.*

Soluzione

Il cammino di integrazione è illustrato in fig. 1. Dal momento che già conosciamo la rappresentazione naturale della curva (cfr. esercizio precedente):

$$\begin{cases} x = \frac{a\sqrt{1+b^2}-bs}{\sqrt{1+b^2}} \cos\left[\frac{1}{b}\ln\left(\frac{a\sqrt{1+b^2}-bs}{a\sqrt{1+b^2}}\right)\right] \\ y = \frac{a\sqrt{1+b^2}-bs}{\sqrt{1+b^2}} \sin\left[\frac{1}{b}\ln\left(\frac{a\sqrt{1+b^2}-bs}{a\sqrt{1+b^2}}\right)\right] \end{cases}, \quad s \in \left[0, \frac{a\sqrt{1+b^2}}{b}\right], \tag{2}$$

conviene integrare rispetto a s. A tale scopo determiniamo a parte:

$$x(s)^2 + y(s)^2 = \frac{1}{1+b^2}\left[a^2\left(1+b^2\right) - 2ab\sqrt{1+b^2} + b^2s^2\right] \tag{3}$$

Segue

$$I = \frac{1}{\left(1+b^2\right)^2}\int_0^{\frac{a\sqrt{1+b^2}}{b}} \left[a^2\left(1+b^2\right) - 2ab\sqrt{1+b^2} + b^2s^2\right]^2 ds \tag{4}$$

Eseguendo i calcoli

$$I = \frac{a^5\sqrt{1+b^2}}{5b} \tag{5}$$

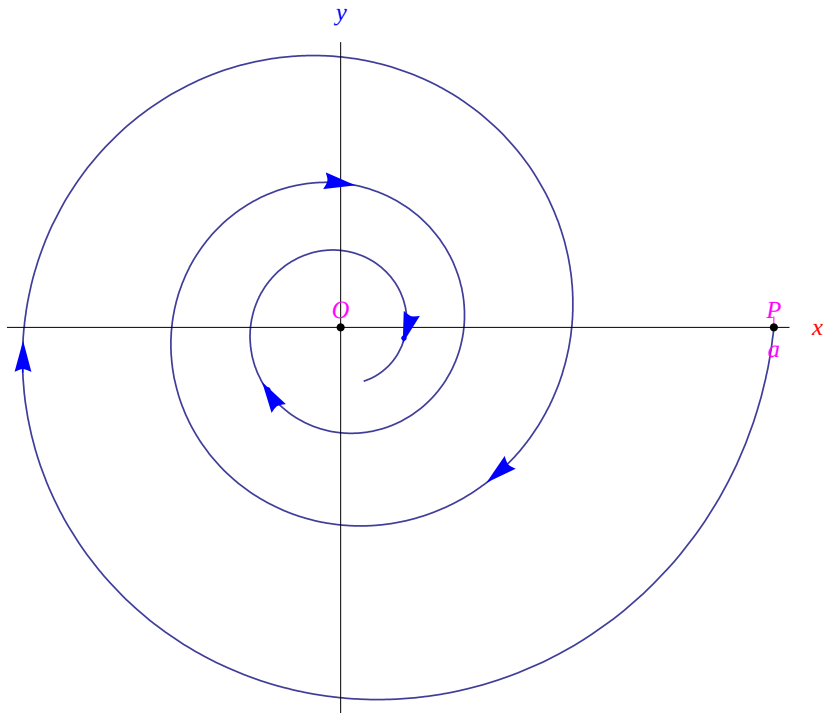

Figura 1: Cammino di integrazione relativo all'integrale (1).