

Calcolo di integrali gaussiani

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

1 Calcolo di integrali gaussiani

Calcoliamo

$$I_n(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-ax^2} dx, \quad (a > 0, \quad n \in \mathbb{N}), \quad (1)$$

partendo dal noto risultato

$$I_0(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Segue immediatamente (da un banale cambio di variabile)

$$I_0(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (2)$$

Per $n \geq 1$ poniamo

$$f_n(x) = x^n e^{-ax^2} \quad (3)$$

Tale funzione ha la stessa parità di n (il grafico è in fig. 1):

$$f_n(-x) = (-1)^n f_n(x)$$

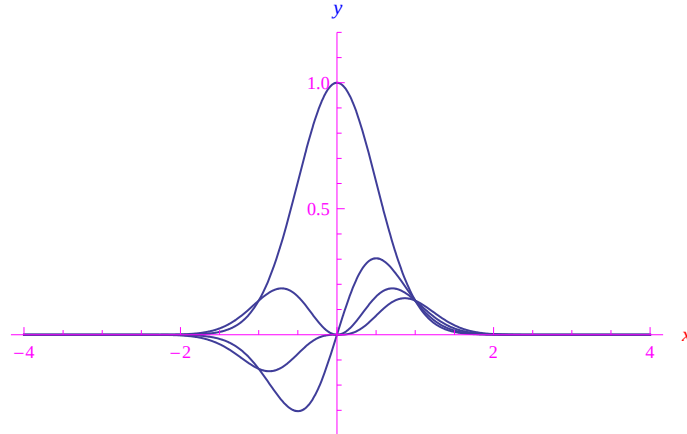


Figura 1: Grafico delle funzioni $f_n(x) = x^n e^{-2x^2}$ per $n = 0, 1, 2, 3$.

Ciò suggerisce di procedere per decomposizione:

$$I_n(a) = \underbrace{\int_{-\infty}^0 x^n e^{-ax^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax^2} dx}_{I_2} \quad (4)$$

Nel primo integrale eseguiamo il cambio di variabile $\xi = -x$, per cui $dx = -d\xi$ e gli estremi di integrazione mutano come

$$-\infty < x = -\xi < +\infty \implies +\infty > \xi > -\infty$$

Quindi

$$I_1 = -(-1)^n \int_{+\infty}^0 f_n(\xi) d\xi = (-1)^n \int_0^{+\infty} f_n(\xi) d\xi$$

Siccome ξ è una variabile muta, posso chiamarla come voglio:

$$I_1 = (-1)^n \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = (-1)^n I_2$$

Ne consegue

$$I_n(a) = [(-1)^n + 1] \int_0^{+\infty} f_n(\xi) d\xi = \begin{cases} 2 \int_0^{+\infty} f_n(\xi) d\xi, & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5)$$

Vediamo quanto valgono quelli non nulli. A tale scopo deriviamo rispetto alla variabile a , primo e secondo membro della prima delle (5):

$$\frac{dI_n(a)}{da} = 2 \int_0^{+\infty} x^n \frac{\partial}{\partial a} (e^{-ax^2}) dx = -2 \int_0^{+\infty} x^{n+2} e^{-ax^2} dx$$

ottenendo la formula di ricorrenza:

$$I_{n+2}(a) = -\frac{dI_n(a)}{da}, \quad (6)$$

rammentando che n è pari. Sappiamo già che

$$I_0(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

per cui

$$I_2(a) = -\frac{d}{da} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

Per $n = 2$

$$I_4(x) = -\frac{dI_2(a)}{da} = -\frac{1}{2} \frac{d}{da} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

Per $n = 4$

$$I_6(x) = -\frac{dI_4(a)}{da} = -\frac{3}{2} \frac{d}{da} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}} = \frac{15}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^7}}$$

e così via. Riassumendo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-ax^2} dx &= \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 e^{-ax^2} dx &= \frac{15}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^7}} \\ &\dots \end{aligned} \quad (7)$$