Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Integrazione dell'equazione di Fermi. Probabilità di fuga alle risonanze

Riscriviamo l'equazione di Fermi

$$\nabla^2 q(\mathbf{x},\tau) - \frac{3}{\lambda_{tr}(u)\,\lambda_a(u)} q(\mathbf{x},\tau) - \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0 \tag{1}$$

Se poniamo

$$q(\mathbf{x},\tau) = q^*(\mathbf{x},\tau)\,p(\tau), \tag{2}$$

la predetta equazione si riscrive:

$$p(\tau)\,\nabla^2 q^*(\mathbf{x},\tau) - q^*\left[\frac{3}{\lambda_{tr}\lambda_a} p(\tau) + \frac{dp}{d\tau}\right] - p(\tau)\frac{\partial q^*}{\partial \tau} = 0 \tag{3}$$

Annulliamo il secondo termine:

$$\frac{3}{\lambda_{tr}\lambda_a} p(\tau) + \frac{dp}{d\tau} = 0 \Longrightarrow \frac{dp}{d\tau} = -\frac{3}{\lambda_{tr}\lambda_a} p(\tau) \Longrightarrow \frac{dp}{p(\tau)} = \frac{3d\tau}{\lambda_{tr}\lambda_a} \tag{4}$$

Integrando

$$p(\tau) = \text{const} \cdot \exp\left(-3\int_0^\tau \frac{d\tau'}{\lambda_{tr}\lambda_a}\right) \tag{5}$$

Quindi scelto questo $p(\tau)$, l'eq. 3 diventa:

$$\nabla^2 q^* - \frac{\partial q^*}{\partial \tau} = 0 \tag{6}$$

Ricordando la posizione (2) possiamo scrivere:

$$q = q^* \exp\left(-3\int_0^\tau \frac{d\tau'}{\lambda_{tr}\lambda_a}\right) \tag{7}$$

Se $\lambda_a = 0$ è $q = q^*$; dunque q^* è la densità di rallentamento in assenza di assorbimento. Vediamo ora cosa fisicamente rappresenta $p(\tau)$. Si ha:

$$d\tau = \frac{1}{3\xi}\lambda_{tr}(u)\,\lambda_a(u)\,du \tag{8}$$

che sostituito nella (5) restituisce:

$$p(\tau) \equiv p(u) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\xi}\int_0^u \frac{du'}{\Sigma_a + \Sigma_s}\right) \tag{9}$$

dove Σ_a si riferisce all'uranio e Σ_s al moderatore. Allora $p(\tau)$ rappresenta la *probabilità di fuga alle risonanze*. Vediamo come si integra l'equazione (6). Procediamo per separazione di variabili, i.e. ricerchiamo soluzioni del tipo:

$$q^*(\mathbf{x},\tau) = Q(\mathbf{x})\,\Theta(\tau) \tag{10}$$

Segue

$$\nabla^2 \left[Q(\mathbf{x}) \Theta(\tau) \right] = Q(\mathbf{x}) \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} \Longrightarrow \frac{\nabla^2 Q(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})} = \frac{1}{\Theta(\tau)} \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} \tag{11}$$

Due funzioni uguali di diversa variabile non possono che essere delle costanti. Poniamo allora

$$\frac{\nabla^2 Q(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})} = -B^2, \quad \frac{1}{\Theta(\tau)} \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} = -B^2 \tag{12}$$

Integrando la seconda:

$$\Theta(\tau) = \text{const} \cdot e^{-B^2 \tau} \tag{13}$$

e dunque scriveremo

$$q^*(\mathbf{x}, \tau) = Q(\mathbf{x}) \cdot e^{-B^2 \tau} \tag{14}$$

Quando $\tau = 0$ è anche $u = 0$ cioè $E = E_0$. Quindi $q^*(\mathbf{x}, 0) = Q(\mathbf{x})$ e rappresenta la sorgente di neutroni veloci per i quali appunto la $u = 0$. È chiaro che $p(0) = 1$ e allora avremo:

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{\text{q.tà neutroni veloci prodotti}}{\text{cm}^3\,\text{s}} = \varepsilon \eta \Sigma_a \Phi_{th} = \frac{K}{p} \Sigma_a \Phi_{th} \tag{15}$$

dove

$$\Sigma_a = \Sigma_{Uranio} + \Sigma_{\text{mod}} + \Sigma_{parassite} \tag{16}$$

La prima delle (12), in cui si sostituisce a $Q(\mathbf{x})$ il valore della (15), diventa:

$$\nabla^2 \Phi_{th} + B^2 \Phi_{th} = 0 \tag{17}$$

Dunque vediamo che in un reattore nucleare il flusso termico, in funzione di coordinate spaziali, è assai simile all'equazione di diffusione senza il termine di sorgente, cioè:

$$D \cdot \nabla^2 \Phi - \Sigma_a \Phi = 0 \Longrightarrow \nabla^2 \Phi - K^2 \Phi = 0 \tag{18}$$

Ricordiamo ancora che è $q = q^* p(\tau)$, per cui

$$q(\mathbf{x}, \tau) = p(\tau) Q(\mathbf{x}) e^{-B^2 \tau} \tag{19}$$

Se poniamo $\tau = \tau_{th}$ corrispondente a $u_{th} = \ln \frac{E_0}{E}$ è chiaro il significato fisico dei termini

$$\begin{cases} p(\tau_{th}) = \text{probabilità di fuga alle risonanze, come già visto} \\ Q(\mathbf{x}) = \text{sorgente di neutroni } / \text{ cm}^3\,\text{s a letargia nulla} \\ \exp\left(-B^2 \tau_{th}\right) = \text{probabilità di } \textit{non fuggire} \text{ durante il rallentamento} \\ \qquad\qquad \text{e quindi probabilità di pervenire all'età termica } \tau_{th} \\ q(\mathbf{x}, \tau) = \text{q.tà di neutroni/ cm}^3 \text{ che pervengono all'età termica } \tau_{th} \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione (17) immaginando che le condizioni al contorno siano l'annullamento del flusso sulla superficie di un parallelepipedo di lati a, b, c.

$$\nabla^2 \Phi_{th}(x, y, z) + B^2 \Phi_{th}(x, y, z) = 0 \tag{20}$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi_{th}\left(\pm \frac{a}{2}, y, z\right) + B^2 \Phi_{th}\left(\pm \frac{a}{2}, y, z\right) = 0 \\ \nabla^2 \Phi_{th}\left(x, \pm \frac{b}{2}, z\right) + B^2 \Phi_{th}\left(x, \pm \frac{b}{2}, z\right) = 0 \\ \nabla^2 \Phi_{th}\left(x, y, \pm \frac{c}{2}\right) + B^2 \Phi_{th}\left(x, y, \pm \frac{c}{2}\right) = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Anche in questo procediamo per separazione di variabili, ovvero ricerchiamo soluzioni che si fattorizzano nel prodotto di tre funzioni:

$$\Phi_{th}(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z) \tag{22}$$

Si può scrivere allora

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} YZ + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} ZX + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} XY + B^2 XYZ = 0 \tag{23}$$

Dal momento che stiamo cercando soluzioni non banali ($XYZ \neq 0$):

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + B^2 = 0 \tag{24}$$

Poniamo

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\alpha^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\beta^2, \quad \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\chi^2 \tag{25}$$

Cioè

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \alpha^2 X = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \beta^2 Y = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \chi^2 Z = 0 \tag{26}$$

L'integrale generale della prima è:

$$X(x) = K_1 e^{i\alpha x} + K_2 e^{-i\alpha x} \tag{27}$$

Per α reale o α complesso si hanno rispettivamente

$$X(x) = A_1 \cos(\alpha x) + A_2 \sin(\alpha x), \quad X(x) = B_1 \cosh(\alpha x) + B_2 \sinh(\alpha x) \tag{28}$$

Il flusso è una funzione pari, e dunque non possono figurare le funzioni dispari. Perciò $A_2 = \overline{A_2} = 0$. Dovendo poi il flusso annullarsi nei punti $-a/2$ e $a/2$ dovrà essere $\overline{A_1} = 0$ (fig. 1). Infatti:

$$\overline{A_1} \cosh(\alpha x)\big|_{x=\frac{a}{2}} = \overline{A_1} \frac{e^{\alpha \frac{a}{2}} + e^{-\alpha \frac{a}{2}}}{2} \tag{29}$$

e non potendo essere nullo il numeratore sarà $\overline{A_1} = 0$.

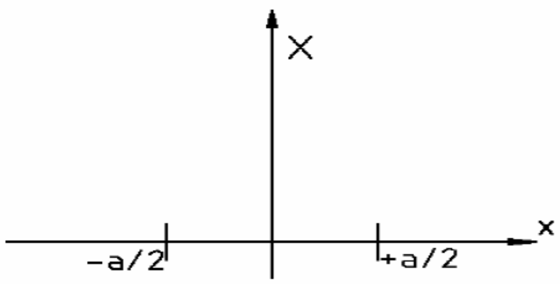

Figura 1: Il flusso si annulla nei punti $\pm a/2$.

Allora il flusso diventa

$$X(x) = A_1 \cos(\alpha x), \quad Y(y) = B_1 \cos(\beta y), \quad Z(z) = C_1 \cos(\chi z) \tag{30}$$

Dovendo poi essere

$$X\left(\pm\frac{a}{2}\right)=Y\left(\pm\frac{b}{2}\right)=Z\left(\pm\frac{c}{2}\right)=0 \tag{31}$$

I valori di α,β,χ saranno

$$\alpha=l\frac{\pi}{a},\ \ \beta=m\frac{\pi}{b},\ \ \chi=n\frac{\pi}{c},\quad \text{con } l,m,n=1,2,3,... \tag{32}$$

Potremo scrivere allora:

$$\Phi_{th}\left(x,y,z\right)=\sum_{l,m,n}A_{lmn}\cos\left(l\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(m\frac{\pi}{b}y\right)\cos\left(n\frac{\pi}{c}z\right) \tag{33}$$

Essendo $B^2=\alpha^2+\beta^2+\chi^2$ somma di tre numeri reali è un numero reale. Più in generale si scriverà

$$B_{lmn}=\alpha_l^2+\beta_m^2+\chi_n^2 \tag{34}$$

Poniamo:

$$B_g^2=B_{111}=\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \tag{35}$$

legato alle dimensioni fisiche del reattore. Esempio: il parallelepipedo preso in esame per le condizioni al controno sia un cubo. Allora:

$$B_g^2=B_{111}=3\pi^2\frac{1}{a^2}\Longrightarrow B_g=\frac{\pi}{a}\sqrt{3} \tag{36}$$

e quindi il volume

$$V=a^3=\left(\frac{\pi}{B_g}\sqrt{3}\right)^3=\frac{161}{B_g^3} \tag{37}$$