

Instabilità numerica dovuta ad errore sottrattivo

Marcello Colozzo - <http://www.extrabyte.info>

```
In[1]:= SetOptions[
  {
    Plot,
    ListPlot,
    ListLinePlot
  },
  TicksStyle -> Directive[
    Hue[5 / 6],
    8
  ],
  FrameStyle -> Directive[
    Hue[5 / 6],
    8
  ]
];
```

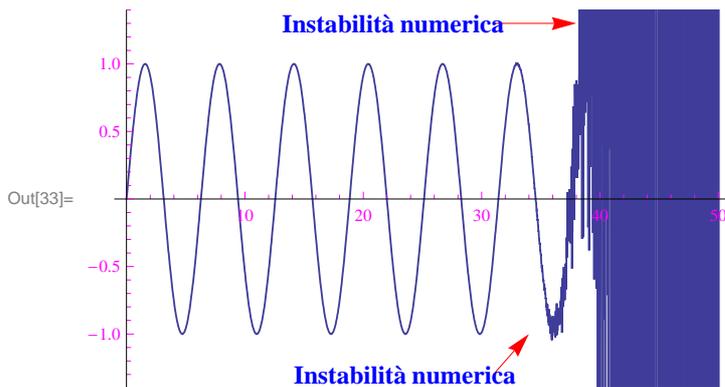
Chiediamo a *Mathematica* di ricavare lo sviluppo in serie di MacLauren della funzione $\sin(x)$, troncato al termine di ordine 200.

```
In[2]:= pol = Series[Sin[x], {x, 0, 200}] // Normal;
```

```
In[3]:= pol[{{1, 2, 3, -1, -2, -3}}] // N
```

```
Out[3]= x - 0.166667 x3 + 0.00833333 x5 - 3.858174975375697 × 10-364 x195 +
  9.99216558421138 × 10-369 x197 - 2.535953906961925 × 10-373 x199
```

```
In[33]:= Plot[
  pol,
  {x, 0, 50},
  PlotRange -> {-1.4, 1.4},
  PlotStyle -> Thickness[0.003],
  Epilog -> {
    Red,
    Arrow[{{31, 1.3}, {38, 1.3}}],
    Arrow[{{31, -1.3}, {34, -1}}],
    Text[Style["Instabilità numerica", Medium, Blue, Bold], {22.5, 1.3}],
    Text[Style["Instabilità numerica", Medium, Blue, Bold], {23.5, -1.3}]
  }
]
```



Questa instabilità numerica è dovuta ad un errore di arrotondamento nel calcolo della somma, utilizzando la sola precisione di macchina.

```
In[5]:= pol /. x -> 70 // Short
```

```
Out[5]/Short=
  15 487 859 032 665 <<227>> 17 890 379 485 090
  20 012 991 057 518 <<227>> 55 397 245 832 337
```

```
In[6]:= pol /. x -> 70 // N
```

```
Out[6]= 0.77389
```

Più precisamente, l'instabilità è generata da un "errore sottrattivo", cioè dovuto alla sottrazione di numeri "molto grandi" e numeri "molto piccoli", nello stesso ambiente di precisione macchina. Se non utilizziamo la notazione puntata (per la quale *Mathematica* vede un **Real**). Ad esempio:

```
In[7]:= 1020 +  $\frac{1}{100}$  - 1020
```

```
Out[7]= 0.
```

Simbolicamente:

```
In[8]:= 1020 +  $\frac{1}{100}$  - 1020
```

```
Out[8]=  $\frac{1}{100}$ 
```

Proviamo ad aumentare la precisione di 20 cifre:

```
In[9]:= pol /. x -> N[70, 20]
```

```
Out[9]= 0. × 1011
```

la cui precisione è nulla:

```
In[10]:= % // Precision
```

```
Out[10]= 0.
```

Portiamo a 200 cifre

```
In[11]:= pol /. x -> N[70, 200]
```

```
Out[11]= 0.7738902689834263186938461899389307381642309632775372591999593091926823 .
15742797858186448865544573438948452655642981068494625065940591294542913 .
420189299009127259031796462
```

```
In[12]:= % // Precision
```

```
Out[12]= 167.944
```

Ciò suggerisce l'utilizzo di `WorkingPrecision->200` per generare il grafico:

```
In[13]:= Plot[
  pol,
  {x, 0, 100},
  PlotRange -> {-1.4, 1.4},
  PlotStyle -> Thickness[0.003],
  WorkingPrecision -> 200
]
```

