Indicatore degli zeri della zeta di Riemann non appartenenti alla retta critica

Marcello Colozzo

Riprendiamo lo sviluppo

$$\pi_{0,N_0'}(x) = R(x) + G(x) + H_{N_0'}(x), \tag{1}$$

con particolare riferimento alla funzione $H_{N_0'}(x)$, dove il pedice N_0' denota il numero di coppie di zeri della funzione zeta di Riemann non appartenenti alla retta critica. Per quanto visto nei numeri precedenti, riesce:

$$H_{N_0'}(x) = K_{N_0'}(x) + H_{RH}(x) \tag{2}$$

ove il pedice RH è l'acronimo *Riemann Hypothesis*, in quanto la funzione $H_{RH}(x)$ è lo sviluppo $H(x)$ assumendo la predetta ipotesi ($N_0' = 0$). La funzione $K_{N_0'}(x)$ è uno sviluppo simile in cui compaiono gli zeri non appartenenti alla retta critica. Quest'ultimi sono

$$\eta_n = \alpha_n + i\gamma_n, \quad \alpha_n \in (0,1) - \left\{\frac{1}{2}\right\}, \ \beta_n > 0, \ n = 1, 2, ..., N_0', \tag{3}$$

conservando l'usuale notazione per gli zeri sulla retta critica:

$$\rho_n = \frac{1}{2} + i\beta_n, \ n = N_0' + 1, ..., \nu_0, \tag{4}$$

come illustrato in fig. 1. Evidentemente

$$\beta_n \neq \gamma_n, \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{5}$$

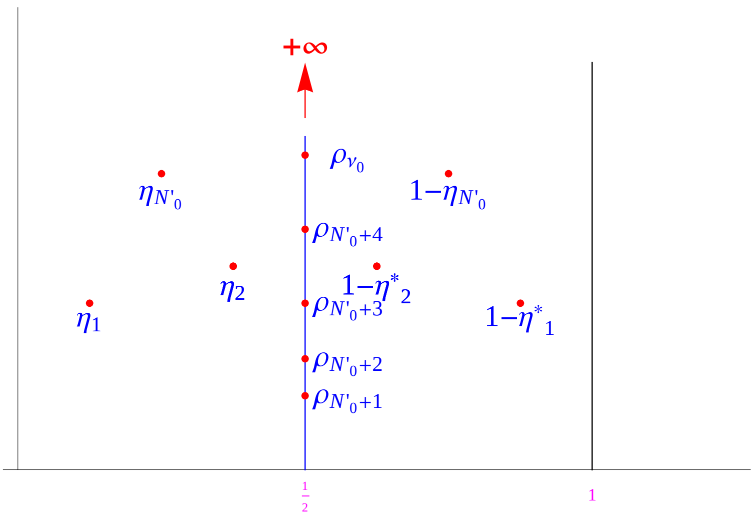

Figura 1: Enumerazione degli zeri. Iniziamo con quelli non appartenenti alla retta critica. Questa enumerazione può essere applicata per $N_0' < +\infty$. Nel caso contrario, bisogna adottare due enumerazioni differenti, una per gli zeri fuori della retta critica, l'altra per quella sulla retta critica.

Rammentiamo, inoltre, che il numero di zeri non appartenenti alla retta critica è $2N_0'$, con $N_0' \leq +\infty$. Nel caso $N_0' = +\infty$, l'enumerazione appena vista non è corretta in quanto dobbiamo contare indipendentemente gli zeri a seconda dell'appartenenza o meno alla retta critica. Trattandosi di sviluppi in serie, ci si riferisce dapprima alla somma parziale di un ordine ν_0 assegnato, dopodiché verrà eseguita l'operazione di passaggio al limite:

$$N_0 = 2N_0' + \nu_0 \underset{\nu_0 \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \tag{6}$$

Diversamente, al finito e per $N_0 \gg 1$, possiamo applicare la nota formula asintotica di Riemann-Von Mangoldt:

$$N_0 = \frac{T}{2\pi} \ln \left(\frac{T}{2\pi} \right) - \frac{T}{2\pi} + c \ln T, \qquad (c = \text{costante positiva}) \tag{7}$$

dove $T \gg 1$ è l'ordinata di un assegnato punto dell'asse immaginario t del piano complesso, come mostrato in fig. 2, in cui è rappresentata la frontiera del seguente dominio contenuto nella striscia critica:

$$D_\delta(T) = [\delta, 1-\delta] \times [0, T], \qquad 0 \leq \delta < \frac{1}{2}, \quad T \geq 0 \tag{8}$$

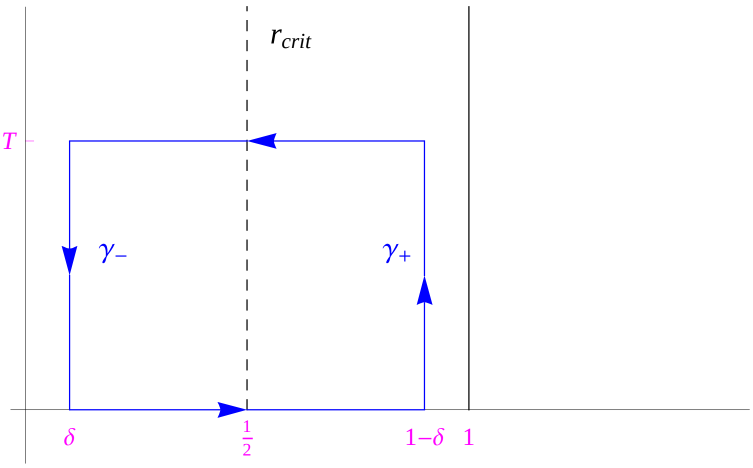

Figura 2: Significato del termine T che compare a secondo membro della (7).

D'altra parte, la funzione $\xi(s)$ di Riemann ha gli stessi zeri non banali della funzione zeta. Trattandosi di una trascendente intera, il teorema dell'indicatore logaritmico restituisce

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{+\partial D_\delta(T)} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = N_\delta, \tag{9}$$

essendo N_δ il numero di zeri appartenenti all'interno di $D_\delta(T)$ cioè a $\mathring{D}_\delta(T)$. Per $\delta = 0$ ritroviamo il risultato (7). Il predetto teorema è applicabile solo se il cammino di integrazione $\partial D_\delta(T)$ è libero da zeri, in quanto singolarità dell'integrando. Più precisamente se η è uno generico zero non appartenente alla retta critica, per $\delta = \mathrm{Re}\,\eta$ si ha $\eta \in \gamma_+$ e $(1-\eta^*) \in \gamma_-$. Dal momento che $\frac{1}{2\pi i}\oint_{+\partial D_\delta(T)} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds$ è un numero reale, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = \pm\infty,$$

e

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = \mp\infty$$

Ne consegue la forma indeterminata $\infty - \infty$ a primo membro della (9)

$$... + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma}}_{=\infty-\infty} = N_\delta$$

Possiamo allora definire la seguente funzione reale delle variabili reali (δ, T):

$$F(\delta, T) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{+\partial D_\delta(T)} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds \tag{10}$$

definita nel dominio illimitato

$$A = \left\{ (\delta, T) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \delta < \frac{1}{2}, \quad T \geq 0 \right\} \tag{11}$$

Per quanto precede:

$$F(\delta, T) = N_\delta(T), \quad \forall (\delta, T) \in A \tag{12}$$

Se l'ipotesi di Riemann è vera, la funzione (12) non si presenta mai nella forma indeterminata $\infty - \infty$. Viceversa, esiste un sottoinsieme B di A al più infinito numerabile, in cui la funzione dà luogo a $\infty - \infty$. Gli elementi di B sono ovviamente gli zeri non appartenenti alla retta critica. Ciò suggerisce di definire la (12) come *indicatore degli zeri non banali* della funzione zeta di Riemann.