Una proposta di dimostrazione

Marcello Colozzo

In quest'articolo viene proposta una dimostrazione della congettura di Riemann. Partiamo dallo sviluppo in prodotto infinito (sviluppo di Hadamard) della funzione $\xi(s)$ di Riemann

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_k}\right), \quad \rho_k \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ sono gli zeri non banali,} \tag{1}$$

osservando che in realtà, l'indice k va da $-\infty$ a $+\infty$. Tuttavia diamo per buona la formula appena scritta. Segue

$$\xi(s) = \frac{\xi(0)}{\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{+\infty}} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (\rho_k - s) \tag{2}$$

Dalle proprietà di simmetria della $\xi(s)$ (vedi articolo linkato sopra), si ha

$$\rho_k - s = [(s - \alpha_k) - i\beta_k]\,[(s - \alpha_k) + i\beta_k],$$

dove $\alpha_k = \operatorname{Re}\rho_k$, $\beta_k = \operatorname{Im}\rho_k$. Quindi

$$\xi(s) = \frac{\xi(0)}{\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{+\infty} \rho_k} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} [(s - \alpha_k) - i\beta_k]\,[(s - \alpha_k) + i\beta_k] \tag{3}$$

Poniamo

$$c_0 = \frac{\xi(0)}{\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{+\infty} \rho_k}, \quad \xi(0) \neq 0 \text{ (ovviamente!)} \tag{4}$$

Ma

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \prod_{k=1}^{n} \rho_k \right| = +\infty,$$

in forza della seguente condizione necessaria per la convergenza dello sviluppo di Hadamard:

$$\lim_{k\to+\infty} |\rho_k| = +\infty$$

Ne consegue

$$|c_0| = \frac{|\xi(0)|}{+\infty} = 0 \Longrightarrow c_0 = 0$$

Da un punto di vista puramente formale:

$$\xi(s) = \underbrace{c_0}_{=0} \underbrace{\prod_{k=1}^{+\infty} [(s - \alpha_k) - i\beta_k]\,[(s - \alpha_k) + i\beta_k]}_{\to\infty} = 0 \cdot \infty \tag{5}$$

$\xi(s)$ è una trascendente intera, per cui è rappresentabile da uno sviluppo di Taylor di raggio di convegenza infinita. Riemann ha calcolato i coefficienti dello sviluppo di Taylor di punto iniziale $1/2$. Dal momento che la funzione ha parità $(+1)$ rispetto alla linea critica, si ha

$$\xi(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{2k} \tag{6}$$

con la solita formula

$$a_{2k} = \frac{\xi^{2k}(0)}{(2k)!}$$

e per quanto detto sono noti, pur essendo non elementarmente esprimibili. Eseguendo il cambio di variabile

$$Y = s - \frac{1}{2},$$

si ha

$$\xi(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} \left(Y^2\right)^k$$

La somma parziale di ordine n è il polinomio di grado $2n$

$$S_n(Y) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2k} \left(Y^2\right)^k$$

per cui ha $2n$ zeri che denotiamo con $Y_1^2, Y_2^2, ..., Y_{2n}^2 \in \mathbb{C}$. Segue quindi la fattorizzazione

$$S_n(Y) = a_{2n} \prod_{h=1}^{2n} \left(Y^2 - Y_h^2\right) \tag{7}$$

Quindi

$$\xi(Y) = \lim_{n \to +\infty} \left[a_{2n} \prod_{h=1}^{2n} \left(Y^2 - Y_h^2\right) \right], \quad Y = s - \frac{1}{2} \tag{8}$$

Riscriviamo la (1):

$$\xi(s) = \xi(0) \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\rho_k - s}{\rho_k} \tag{9}$$

L'unicità della rappresentazione di una trascendente intera implica l'uguaglianza dei fattori delle produttorie (8)-(9). Ma ciò non è possibile per le ragioni:

1. il coefficiente di Taylor non può essere portato dentro la produttoria a secondo membro della (8);
2. per un assegnato n, il numero di fattori è il doppio dell'altro. Precisamente, in (9) abbiamo n fattori, mentre in (8) ci sono $2n$ fattori.

Proviamo allora a fare il confronto all'infinito:

$$\xi(Y) = \left(\underbrace{\lim_{n \to +\infty} a_{2n}}_{= \lim_{n \to +\infty} \frac{\xi^{2n}(0)}{(2n)!} = 0} \right) \left[\underbrace{\lim_{n \to +\infty} \prod_{h=1}^{2n} \left(Y^2 - Y_h^2\right)}_{\to \infty} \right], \quad Y = s - \frac{1}{2} \tag{10}$$

Cioè restituisce la forma indetermina $0 \cdot \infty$

$$\xi(Y) = c_1 \prod_{k=1}^{+\infty} \left(Y^2 - Y_k^2\right) = 0 \cdot \infty, \quad c_1 \stackrel{def}{=} \lim_{n \to +\infty} a_{2n} = 0 \tag{11}$$

Siamo tentati ad uguagliare i singoli fattori delle produttorie a secondo membro delle (11)-(5), in virtù dell'unicità della rappresentazione di una trascendente intera. Ma dalle eq. citate si ha:

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(Y^2 - Y_k^2\right) = \frac{\xi(Y)}{0} \tag{12}$$

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left[(s - \alpha_k) - i\beta_k\right] \left[(s - \alpha_k) + i\beta_k\right] = \frac{\xi(s)}{0}$$

Ne concludiamo che i due sviluppi in prodotto infinito di cui sopra, sono gli sviluppi *non* della ξ ma di $\frac{\xi(s)}{0}$. Tale operazione non lecita implica che il procedimento seguito è errato, anche se miracolosamente conduce alla dimostrazione della congettura i.e.

$$[(s-\alpha_k)-i\beta_k]\,[(s-\alpha_k)+i\beta_k]=(Y-Y_k)\,(Y+Y_k)\Longrightarrow \alpha_k=\frac{1}{2},\ \ \forall k$$

Tale risultato può essere simboleggiato da:

$$\left\{\begin{array}{l}\prod\limits_{k=1}^{+\infty}(Y^2-Y_k^2)\overset{?}{=}\frac{\xi(Y)}{0}\\ \prod\limits_{k=1}^{+\infty}[(s-\alpha_k)-i\beta_k]\,[(s-\alpha_k)+i\beta_k]\overset{?}{=}\frac{\xi(s)}{0}\end{array}\right.\Longrightarrow \alpha_k=\frac{1}{2},\ \ \forall k$$